บทที่ 4
สรุปผลการวิจัย

จากการศึกษาหาผลเฉลยของสมการเชิงฟังก์ชันโดยวิธีทางพีชคณิตดังต่อไปนี้

กำหนดให้ G เป็นกรุปภายใต้การคูณกระทำบนเซต X และให้ R เป็นกรุปภายใต้การบวก ต้องการหาฟังก์ชัน $x:R\to X$ และฟังก์ชัน $g:R\to G$ ซึ่งค่าของฟังก์ชันทั้งสองสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $g(s+t)x(u) \;=\; g(t)x(u+s)$ เมื่อ $s,t,u\in R$
2. $g(s+t)x(u) \;=\; g(s)x(u-t)$ เมื่อ $s,t,u\in R$
3. $g(s+t)x(u) \;=\; g(t)x(-s+u)$ เมื่อ $s,t,u\in R$
4. ให้ $a\in R, g(s+t)x(u) \;=\; g(s+a)x(t-a+u)$ เมื่อ $s,t,u\in R$
5. $g(s+t)x(u) \;=\; g(t)x(s+u)$ เมื่อ $s,t,u\in R$
6. $g(s+t)x(u) \;=\; g(s)x(u+t)$ เมื่อ $s,t,u\in R$

มีผลการวิจัยสรุปได้ดังต่อไปนี้

1. สมการเชิงฟังก์ชัน $g(s+t)x(u) \;=\; g(t)x(u+s)$ **สำหรับทุก ๆ** $s,t,u\in R$

1.1 ให้ $x:R\to X$ และ $h:R\to G$ เป็นฟังก์ชันโดยที่ $h(0) = 1$ จะได้ว่าฟังก์ชัน x และฟังก์ชัน h สอดคล้องกับสมการ $h(s)x(u) = x(u+s)$ สำหรับทุกๆ $s,u\in R$ ก็ต่อเมื่อ

1) มี $H\le G$

2) มี $N \triangleleft H$ โดยที่ $N\le G_{x_0}$ สำหรับบาง $x_0\in X$

3) มีฟังก์ชัน $\Psi : R\to H/N$ ซึ่งมีสมบัติดังนี้

3.1) $\Psi(s+t) = \Psi(t)\Psi(s)$ สำหรับทุก ๆ $s,t \in R$

3.2) $x(r) = \Psi(r)x_0$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

3.3) $h(r) \in \Psi(r)$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

โดยที่ H/N กระทำบน $H(x_0)$ มีนิยามคือ $(hN)\cdot(kx_0) = (hk)x_0$ สำหรับทุกๆ $h,k \in H$

1.2 ให้ $x:R\to X$ เป็นฟังก์ชันจะได้ว่ามีฟังก์ชัน $h:R\to G$ มีสมบัติที่ว่า

1) $h(0) = 1$ และ

2) $h(s)x(u) = x(u+s)$ สำหรับทุก ๆ $s,u\in R$

ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $g:R\to G$ มีสมบัติว่า $g(s+t)x(u) = g(t)x(u+s)$ เมื่อ $s,t,u\in R$

2. สมการเชิงฟังก์ชัน $g(s+t)x(u) = g(s)x(u-t)$ สำหรับทุก ๆ $s,t,u \in R$

2.1 ให้ $x:R \to X$ และ $h:R \to G$ เป็นฟังก์ชันโดยที่ $h(0) = 1$ จะได้ว่าฟังก์ชัน x และฟังก์ชัน h สอดคล้องกับสมการ $h(s)x(u) = x(u-s)$ สำหรับทุกๆ $s,u \in R$ ก็ต่อเมื่อ

1) มี $H \leq G$

2) มี $N \triangleleft H$ โดยที่ $N \leq G_{x_0}$ สำหรับบาง $x_0 \in X$

3) มีฟังก์ชัน $\Psi : R \to H/N$ ซึ่งมีสมบัติดังนี้

3.1) Ψ เป็นสาทิสสัณฐาน

3.2) $x(r) = \Psi(-r)x_0$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

3.3) $h(r) \in \Psi(r)$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

โดยที่ H/N กระทำบน $H(x_0)$ มีนิยามคือ $(hN)\cdot(kx_0) = (hk)x_0$ สำหรับทุก ๆ $h,k \in H$

2.2 ให้ $x:R \to X$ เป็นฟังก์ชันจะได้ว่ามีฟังก์ชัน $h:R \to G$ มีสมบัติที่ว่า

1) $h(0) = 1$ และ

2) $h(s)x(u) = x(u-s)$ สำหรับทุก ๆ $s,u \in R$

ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $g:R \to G$ มีสมบัติว่า $g(s+t)x(u) = g(s)x(u-t)$ เมื่อ $s,t,u \in R$

3. สมการเชิงฟังก์ชัน $g(s+t)x(u) = g(t)x(-s+u)$ สำหรับทุกๆ $s,t,u \in R$

3.1 ให้ $x:R \to X$ และ $h:R \to G$ เป็นฟังก์ชันโดยที่ $h(0) = 1$ จะได้ว่าฟังก์ชัน x และฟังก์ชัน h สอดคล้องกับสมการ $h(s)x(u) = x(-s+u)$ สำหรับทุก ๆ $s,u \in R$ ก็ต่อเมื่อ

1) มี $H \leq G$

2) มี $N \triangleleft H$ โดยที่ $N \leq G_{x_0}$ สำหรับบาง $x_0 \in X$

3) มีฟังก์ชัน $\Psi : R \to H/N$ ซึ่งมีสมบัติดังนี้

3.1) $\Psi(s+t) = \Psi(t)\Psi(s)$ สำหรับทุก ๆ $s,t \in R$

3.2) $x(r) = \Psi(-r)x_0$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

3.3) $h(r) \in \Psi(r)$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

โดยที่ H/N กระทำบน $H(x_0)$ มีนิยามคือ $(hN)\cdot(kx_0) = (hk)x_0$ สำหรับทุก ๆ $h,k \in H$

3.2 ให้ $x:R \to X$ เป็นฟังก์ชันจะได้ว่ามีฟังก์ชัน $h:R \to G$ มีสมบัติที่ว่า

1) $h(0) = 1$ และ

2) $h(s)x(u) = x(-s+u)$ สำหรับทุก ๆ $s,u \in R$

ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $g:R \to G$ มีสมบัติว่า $g(s+t)x(u) = g(t)x(-s+u)$ เมื่อ $s,t,u \in R$

กำหนดให้ $a \in R$

4. สมการเชิงฟังก์ชัน $g(s+t)x(u) = g(s+a)x(t-a+u)$ **สำหรับทุก ๆ** $s,t,u \in R$

4.1 ให้ $x:R \to X$ และ $h:R \to G$ เป็นฟังก์ชันโดยที่ $h(a) = 1$ จะได้ว่าฟังก์ชัน x และฟังก์ชัน h สอดคล้องกับสมการ $h(s+a)x(u) = x(s+u)$ สำหรับทุก ๆ $s,u \in R$ ก็ต่อเมื่อ

1) มี $H \le G$

2) มี $N \triangleleft H$ โดยที่ $N \le G_{x_0}$ สำหรับบาง $x_0 \in X$

3) มีฟังก์ชัน $\Psi : R \to H/N$ ซึ่งมีสมบัติดังนี้

3.1) Ψ เป็นสาทิสสัณฐาน

3.2) $x(r) = \Psi(r)x_0$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

3.3) $h(r) \in \Psi(r-a)$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

โดยที่ H/N กระทำบน $H(x_0)$ มีนิยามคือ $(hN)\cdot(kx_0) = (hk)x_0$ สำหรับทุก ๆ $h,k \in H$

4.2 ให้ $x:R \to X$ เป็นฟังก์ชันจะได้ว่ามีฟังก์ชัน $h:R \to G$ ซึ่งมีสมบัติที่ว่า

1) $h(a) = 1$ และ

2) $h(s+a)x(u) = x(s+u)$ สำหรับทุก ๆ $s,u \in R$

ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $g:R \to G$ โดยที่ $g(s+t)x(u) = g(s+a)x(t-a+u)$ เมื่อ $s,t,u \in R$

5. สมการเชิงฟังก์ชัน $g(s+t)x(u) = g(t)x(s+u)$ **สำหรับทุก ๆ** $s,t,u \in R$

5.1 ให้ $x:R \to X$ และ $h:R \to G$ เป็นฟังก์ชันโดยที่ $h(0) = 1$ จะได้ว่าฟังก์ชัน x และฟังก์ชัน h สอดคล้องกับสมการ

1) $h(s)x(u) = x(s+u)$ สำหรับทุก ๆ $s,u \in R$ และ

2) $h(s+t)x(u) = h(t+s)x(u)$ สำหรับทุก ๆ $s,t,u \in R$

ก็ต่อเมื่อ 1) มี $H \le G$

2) มี $N \triangleleft H$ โดยที่ $N \le G_{x_0}$ สำหรับบาง $x_0 \in X$

3) มีฟังก์ชัน $\Psi : R \to H/N$ ซึ่งมีสมบัติดังนี้

3.1) Ψ เป็นสาทิสสัณฐาน

3.2) $\Psi(s)\Psi(t) = \Psi(t)\Psi(s)$ สำหรับทุก ๆ $s,t \in R$

3.3) $x(r) = \Psi(r)x_0$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

3.4) $h(r) \in \Psi(r)$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

โดยที่ H/N กระทำบน $H(x_0)$ มีนิยามคือ $(hN)\cdot(kx_0) = (hk)x_0$ สำหรับทุก ๆ $h,k \in H$

5.2 ให้ $x:R\rightarrow X$ เป็นฟังก์ชันจะได้ว่ามีฟังก์ชัน $h:R\rightarrow G$ มีสมบัติที่ว่า

1) $h(0) = 1$

2) $h(s)x(u) = x(s+u)$ สำหรับทุก ๆ $s,u\in R$ และ

3) $h(s+t)x(u) = h(t+s)x(u)$ สำหรับทุก ๆ $s,t,u\in R$

ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $g:R\rightarrow G$ มีสมบัติว่า $g(s+t)x(u) = g(t)x(s+u)$ เมื่อ $s,t,u\in R$

6. สมการเชิงฟังก์ชัน $g(s+t)x(u) = g(s)x(u+t)$ สำหรับทุก ๆ $s,t,u\in R$

6.1 ให้ $x:R\rightarrow X$ และ $h:R\rightarrow G$ เป็นฟังก์ชันโดยที่ $h(0) = 1$ จะได้ว่าฟังก์ชัน x และฟังก์ชัน h สอดคล้องกับสมการ

1) $h(s)x(u) = x(u+s)$ สำหรับทุก ๆ $s,u\in R$ และ

2) $h(s+t)x(u) = h(t+s)x(u)$ สำหรับทุก ๆ $s,t,u\in R$

ก็ต่อเมื่อ 1) มี $H\leq G$

2) มี $N \triangleleft H$ โดยที่ $N\leq G_{x_0}$ สำหรับบาง $x_0\in X$

3) มีฟังก์ชัน $\Psi : R\rightarrow H/N$ ซึ่งมีสมบัติดังนี้

3.1) Ψ เป็นสาทิสสัณฐาน

3.2) $\Psi(s)\Psi(t) = \Psi(t)\Psi(s)$ สำหรับทุก ๆ $s,t\in R$

3.3) $x(r) = \Psi(r)x_0$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

3.4) $h(r) \in \Psi(r)$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

โดยที่ H/N กระทำบน $H(x_0)$ มีนิยามคือ $(hN)\cdot(kx_0) = (hk)x_0$ สำหรับทุก ๆ $h,k \in H$

6.2 ให้ $x:R\rightarrow X$ เป็นฟังก์ชันจะได้ว่ามีฟังก์ชัน $h:R\rightarrow G$ มีสมบัติที่ว่า

1) $h(0) = 1$

2) $h(s)x(u) = x(u+s)$ สำหรับทุก ๆ $s,u\in R$ และ

3) $h(s+t)x(u) = h(t+s)x(u)$ สำหรับทุก ๆ $s,t,u\in R$

ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $g:R\rightarrow G$ มีสมบัติว่า $g(s+t)x(u) = g(s)x(u+t)$ เมื่อ $s,t,u\in R$