บทที่ 3
ผลการวิจัย

กำหนดให้ X เป็นเซต R เป็นกรุปภายใต้การบวก G เป็นกรุปภายใต้การคูณ โดยมี 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G และสมมติว่ากรุป G กระทำบน X ในงานต่อไปนี้ต้องการหาฟังก์ชัน $x:R\to X$ และฟังก์ชัน $g:R\to G$ สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

1. $g(s+t)x(u) \;=\; g(t)x(u+s)$ เมื่อ $s,t,u\in R$
2. $g(s+t)x(u) \;=\; g(s)x(u-t)$ เมื่อ $s,t,u\in R$
3. $g(s+t)x(u) \;=\; g(t)x(-s+u)$ เมื่อ $s,t,u\in R$
4. ให้ $a\in R$, $g(s+t)x(u) \;=\; g(s+a)x(t-a+u)$ เมื่อ $s,t,u\in R$
5. $g(s+t)x(u) \;=\; g(t)x(s+u)$ เมื่อ $s,t,u\in R$
6. $g(s+t)x(u) \;=\; g(s)x(u+t)$ เมื่อ $s,t,u\in R$

สมการเชิงฟังก์ชัน $g(s+t)x(u) \;=\; g(t)x(u+s)$ **สำหรับทุก ๆ** $s,t,u\in R$

ในลำดับแรกพิจารณาฟังก์ชัน $h:R\to G$ โดยที่ $h(0) = 1$ และมีสมบัติ $h(s)x(u) = x(u+s)$ สำหรับทุก ๆ $s,u\in R$

ทฤษฎีบท 4.1 ให้ X เป็นเซต R เป็นกรุปภายใต้การบวก G เป็นกรุปภายใต้การคูณ โดยที่ G กระทำบน X และมี 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G และให้ $x:R\to X$ และ $h:R\to G$ เป็นฟังก์ชันโดยที่ $h(0) = 1$ จะได้ว่าฟังก์ชัน x และฟังก์ชัน h สอดคล้องกับสมการ

$$h(s)x(u) = x(u+s) \text{ สำหรับทุก ๆ } s,u\in R \tag{4.1}$$

ก็ต่อเมื่อ 1) มี $H\le G$

2) มี $N \triangleleft H$ โดยที่ $N\le G_{x_0}$ สำหรับบาง $x_0\in X$

3) มีฟังก์ชัน $\Psi:R\to H/N$ ซึ่งมีสมบัติดังนี้

3.1) $\Psi(s+t) = \Psi(t)\Psi(s)$ สำหรับทุก ๆ $s,t\in R$

3.2) $x(r) = \Psi(r)x_0$ สำหรับทุก ๆ $r\in R$

3.3) $h(r)\in \Psi(r)$ สำหรับทุก ๆ $r\in R$

โดยที่ H/N กระทำบน $H(x_0)$ มีนิยามคือ $(hN)\cdot(kx_0) = (hk)x_0$ สำหรับทุก ๆ $h,k\in H$

พิสูจน์ กำหนดให้ X เป็นเซต R เป็นกรุปภายใต้การบวก G เป็นกรุปภายใต้การคูณ โดยที่ G กระทำบน X และมี 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G

ให้ $x:R\to X$ และ $h:R\to G$ เป็นฟังก์ชันโดยที่ $h(0)=1$

($\Rightarrow$) ให้ฟังก์ชัน $x:R\to X$ และฟังก์ชัน $h:R\to G$ สอดคล้องกับสมการ $h(s)x(u)=x(u+s)$ สำหรับทุก ๆ $s,u\in R$

ให้ $H=\left\{ \prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i} \,\middle|\, n \text{ เป็นจำนวนนับ}, r_i\in R, j_i\in\{1,-1\}, i=1,2,\dots,n \right\}$

จากนิยาม H จะได้ว่า $H\subseteq G$

ต่อไปจะแสดงว่า $H\le G$

1) H ไม่เป็นเซตว่างเพราะว่า $1 = h(0)^1 \in H$

2) ให้ $h_1,h_2\in H$

ดังนั้น $h_1=h(r_1)^{j_1}h(r_2)^{j_2}\dots h(r_m)^{j_m}$ เมื่อ $r_i\in R,\ j_i\in\{-1,1\}\ \ i=1,2,\dots,m$

และ $h_2=h(r_1')^{j_1'}h(r_2')^{j_2'}\dots h(r_k')^{j_k'}$ เมื่อ $r_i\in R,\ j_i\in\{-1,1\}\ \ i=1,2,\dots,k$

$$\begin{aligned} h_1h_2^{-1} &= h(r_1)^{j_1}h(r_2)^{j_2}\dots h(r_m)^{j_m}\left(h(r_1')^{j_1'}h(r_2')^{j_2'}\dots h(r_k')^{j_k'}\right)^{-1} \\ &= h(r_1)^{j_1}h(r_2)^{j_2}\dots h(r_m)^{j_m}h(r_k')^{-j_k'}h(r_{k-1}')^{-j_{k-1}'}\dots h(r_1')^{-j_1'} \end{aligned}$$

ให้ $r_i'=r_{m+k-i+1}$ และ $-j_i'=j_{m+k-i+1}$ เมื่อ $i=1,2,\dots,k$

เพราะฉะนั้น $h_1h_2^{-1}=h(r_1)^{j_1}\dots h(r_m)^{j_m}h(r_{m+1})^{j_{m+1}}h(r_{m+2})^{j_{m+2}}\dots h(r_{m+k})^{j_{m+k}}$

หรือได้ว่า $h_1h_2^{-1}=\prod_{i=1}^{m+k} h(r_i)^{j_i}\in H$

นั่นคือ $H\le G$

ให้ $N=\left(\bigcap_{u\in R} G_{x(u)}\right)\bigcap H$

ต่อไปจะแสดงว่า $N\lhd H$

เนื่องจาก $G_{x(u)}$ เป็นกรุปจะได้ว่า $\bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$ เป็นกรุปและจาก H เป็นกรุป

ดังนั้น $\left(\bigcap_{u\in R} G_{x(u)}\right)\cap H = N$ เป็นกรุป

เพราะว่า $N=\left(\bigcap_{u\in R} G_{x(u)}\right)\bigcap H\subseteq H$ ดังนั้น $N\le H$

จะแสดงว่าถ้า $s\in R$ แล้วมี $g_s\in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$ ซึ่ง $h(s)^{-1}=h(-s)g_s$

ให้ $s,u\in R$

$$\begin{aligned} \text{จาก } x(u) &= x(u+(-s)+s) \\ &= h(s)x(u+(-s)) && \text{(จากสมการที่ (4.1))} \\ &= h(s)h(-s)x(u) && \text{(จากสมการที่ (4.1))} \end{aligned}$$

$$x(u)=h(-s)^{-1}h(s)^{-1}x(u)$$

จะได้ว่า $h(-s)^{-1}h(s)^{-1} \in G_{x(u)}$ สำหรับทุก ๆ $u \in R$

นั่นคือ $h(-s)^{-1}h(s)^{-1} \in \bigcap_{u \in R} G_{x(u)}$

ดังนั้นมี $g_s \in \bigcap_{u \in R} G_{x(u)}$ ที่ซึ่ง $h(-s)^{-1}h(s)^{-1} = g_s$

ดังนั้น $h(s)^{-1} = h(-s)g_s$

ต่อไปจะแสดงว่า $\left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i}\right) N \left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i}\right)^{-1} \leq N$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ $r_i \in R$ และ $j_i \in \{-1, 1\}$ โดยใช้การอุปนัยทางคณิตศาสตร์บน n

ให้ $g \in N$

$n = 1$, ให้ $r \in R$ จะแสดงว่า $h(r)g\,h(r)^{-1} \in N$

จะมี $g_r \in \bigcap_{u \in R} G_{x(u)}$ ที่ทำให้ $h(r)^{-1} = h(-r)g_r$

จาก
$$\begin{aligned} h(r)g\,h(r)^{-1}x(u) &= h(r)gh(-r)g_r x(u) \\ &= h(r)gh(-r)x(u) && \text{(เพราะว่า } g_r \in \textstyle\bigcap_{u \in R} G_{x(u)}\text{)} \\ &= h(r)\,gx(u-r) && \text{(จากสมการที่ (4.1))} \\ &= h(r)x(u-r) && \text{(เพราะว่า } g \in N\text{)} \\ &= x(u-r+r) && \text{(จากสมการที่ (4.1))} \\ &= x(u) \end{aligned}$$

จะได้ว่า $h(r)g\,h(r)^{-1} \in G_{x(u)}$ สำหรับทุก ๆ $u \in R$

ดังนั้น $h(r)g\,h(r)^{-1} \in \bigcap_{u \in R} G_{x(u)}$

เนื่องจาก $h(r) \in H$ และ $g \in H$ จะได้ว่า $h(r)g\,h(r)^{-1} \in H$

ดังนั้น $h(r)g\,h(r)^{-1} \in N$

ต่อไปจะแสดงว่า $h(r)^{-1}g\,h(r) \in N$

จะมี $g_r \in \bigcap_{u \in R} G_{x(u)}$ ที่ทำให้ $h(r)^{-1} = h(-r)g_r$

จาก
$$\begin{aligned} h(r)^{-1}g\,h(r)x(u) &= h(-r)g_r gh(r)x(u) \\ &= h(-r)g_r gx(u+r) && \text{(จากสมการที่ (4.1))} \\ &= h(-r)x(u+r) \\ &= x(u+r-r) && \text{(จากสมการที่ (4.1))} \\ &= x(u) \end{aligned}$$

จะได้ว่า $h(r)^{-1}g\,h(r) \in G_{x(u)}$ สำหรับทุก ๆ $u \in R$

นั่นคือ $h(r)^{-1}g\,h(r) \in \bigcap_{u \in R} G_{x(u)}$

เนื่องจาก $g \in H$ และ $h(r) \in H$ จะได้ว่า $h(r)^{-1} g\, h(r) \in H$

ดังนั้น $h(r)^{-1} g\, h(r) \in N$

ดังนั้น $h(r)^{j} g\, h(r)^{-j} \in N$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ $r \in R \quad j \in \{-1, 1\}$

สมมติให้ $\left(\prod_{i=1}^{k} h(r_i)^{j_i}\right) g \left(\prod_{i=1}^{k} h(r_i)^{j_i}\right)^{-1} \in N$ สำหรับทุก ๆ $g \in N$

ดังนั้นจะมี $g' \in N$ โดยที่ $g' = h(r_{k+1})^{j_{k+1}} g h(r_{k+1})^{-j_{k+1}}$

$$\left(\prod_{i=1}^{k+1} h(r_i)^{j_i}\right) g \left(\prod_{i=1}^{k+1} h(r_i)^{j_i}\right)^{-1} x(u) = \left(\prod_{i=1}^{k} h(r_i)^{j_i}\right) h(r_{k+1})^{j_{k+1}} g h(r_{k+1})^{-j_{k+1}} \left(\prod_{i=1}^{k} h(r_i)^{j_i}\right)^{-1} x(u)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{k} h(r_i)^{j_i}\right) g' \left(\prod_{i=1}^{k} h(r_i)^{j_i}\right)^{-1} x(u)$$

$$= x(u) \qquad \text{(จากสมมติฐาน)}$$

ดังนั้น $\left(\prod_{i=1}^{k+1} h(r_i)^{j_i}\right) g \left(\prod_{i=1}^{k+1} h(r_i)^{j_i}\right)^{-1} \in G_{x(u)}$ สำหรับทุก ๆ $u \in R$

นั่นคือ $\left(\prod_{i=1}^{k+1} h(r_i)^{j_i}\right) g \left(\prod_{i=1}^{k+1} h(r_i)^{j_i}\right)^{-1} \in \bigcap_{u \in R} G_{x(u)}$

เนื่องจาก $\left(\prod_{i=1}^{k+1} h(r_i)^{j_i}\right), g \in H$

จะได้ว่า $\left(\prod_{i=1}^{k+1} h(r_i)^{j_i}\right) g \left(\prod_{i=1}^{k+1} h(r_i)^{j_i}\right)^{-1} \in H$

ดังนั้น $\left(\prod_{i=1}^{k+1} h(r_i)^{j_i}\right) g \left(\prod_{i=1}^{k+1} h(r_i)^{j_i}\right)^{-1} \in N$

จากการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ได้ว่า $\left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i}\right) g \left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i}\right)^{-1} \in N$ สำหรับทุก ๆ $g \in N$

ดังนั้น $\left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i}\right) N \left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i}\right)^{-1} \leq N$

นั่นคือ $N \lhd H$

ให้ $x_0 = x(0)$ ดังนั้น $x_0 \in X$

ต่อไปจะแสดงว่า $N \leq G_{x_0}$

เนื่องจาก N เป็นกรุปและ $N = \left(\bigcap_{u \in R} G_{x(u)}\right) \cap H \subseteq G_{x(0)} = G_{x_0}$ ดังนั้น $N \leq G_{x_0}$

ให้ $\Psi : R \to H/N$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $\Psi(r) = h(r)N$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

ต่อไปจะแสดงว่า $\Psi : R \to H/N$ มีสมบัติ $\Psi(s+t) = \Psi(t)\Psi(s)$ สำหรับทุก ๆ $s, t \in R$

ให้ $s, t, u \in R$

จากสมการ $h(s+t)x(u) = x(u+s+t) = h(t)h(s)x(u)$

ดังนั้น $h(s+t)^{-1}h(t)h(s)x(u) = x(u)$

ได้ว่า $h(s+t)^{-1}h(t)h(s) \in G_{x(u)}$ สำหรับทุก ๆ $u \in R$

ดังนั้น $h(s+t)^{-1}h(t)h(s) \in \bigcap_{u \in R} G_{x(u)}$

เนื่องจาก $h(s+t)^{-1}h(t)h(s) \in H$ จะได้ว่า $h(s+t)^{-1}h(t)h(s) \in N$

$$h(t)h(s) \in h(s+t)N$$

ดังนั้น $h(t)h(s)N = h(s+t)N$

$$\Psi(s+t) = h(s+t)N = h(t)h(s)N = h(t)Nh(s)N = \Psi(t)\Psi(s)$$

ดังนั้น $\Psi(s+t) = \Psi(t)\Psi(s)$

ให้ H/N กระทำบน $H(x_0)$ มีนิยามคือ

$(hN)\cdot(kx_0) = (hk)x_0$ สำหรับทุก ๆ $h, k \in H$

ลำดับต่อไปจะแสดงว่าการกระทำข้างต้นเป็นฟังก์ชัน

สมมติว่า $hN = h_1N$ และ $kx_0 = k_1x_0$

ต้องการแสดงว่า $(hk)x_0 = (h_1k_1)x_0$

เนื่องจาก $h_1 \in hN$ จะมี $n \in N$ ซึ่ง $h_1 = hn$

เนื่องจาก $N \triangleleft H$ และ $n \in N$ $k \in H$ จะมี $n_1 \in N$ ซึ่ง $nk = kn_1$

$$\begin{aligned}(h_1k_1)x_0 &= (hnk_1)x_0 = (hn)k_1x_0 = (hn)kx_0 = h(nk)x_0 \\ &= h(kn_1)x_0 = (hk)n_1x_0 = (hk)x_0\end{aligned}$$

ดังนั้นนิยามข้างต้นเป็นฟังก์ชัน

ให้ $k, h_1', h_2' \in H$

เนื่องจาก N เป็นเอกลักษณ์ใน H/N พบว่า

$(N)\cdot(kx_0) = (1N)\cdot(kx_0) = (1k)x_0 = kx_0$

และจะได้ว่า

$$\begin{aligned}(h_1'Nh_2'N)\cdot(kx_0) &= (h_1'h_2'N)\cdot(kx_0) = (h_1'h_2'k)x_0 \\ &= (h_1'(h_2'k))x_0 = (h_1'N)\cdot(h_2'k)x_0 \\ &= (h_1'N)\cdot((h_2'N)\cdot(k)x_0)\end{aligned}$$

ดังนั้น H/N กระทำบน $H(x_0)$

เห็นได้ชัดว่า $h(r) \in h(r)N = \Psi(r)$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$ และได้ว่า

$$\Psi(r)x_0 = (h(r)N)\cdot x_0 = (h(r)N)\cdot(1x_0) = (h(r)1)x_0 = h(r)x_0$$

$$= h(r)x(0) \quad = x(0+r) \quad = x(r)$$

$(\Leftarrow)$ ให้ $H \le G$ $N \triangleleft H$ โดยที่ $N \le G_{x_0}$ เมื่อ $x_0 \in X$ ฟังก์ชัน $\Psi : R \to H/N$ มีสมบัติคือ $\Psi(s+t) = \Psi(t)\Psi(s)$ $x(r) = \Psi(r)x_0$ และ $h(r) \in \Psi(r)$ สำหรับทุก ๆ $s,t,r \in R$ โดยที่ H/N กระทำบน $H(x_0)$ มีนิยามคือ $(hN)\cdot(kx_0) = (hk)x_0$ สำหรับทุก ๆ $h,k \in H$

ให้ $s,u \in R$

$$h(s)x(u) = h(s)\Psi(u)x_0 = (\Psi(s)\Psi(u))x_0$$
$$= \Psi(u+s)x_0 = x(u+s)$$

ดังนั้น $h(s)x(u) = x(u+s)$ สำหรับทุก ๆ $s,u \in R$ #

ทฤษฎีบท 4.2 ให้ X เป็นเซต R เป็นกรุปภายใต้การบวก G เป็นกรุปภายใต้การคูณ โดยที่ G กระทำบน X และมี 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G และให้ $x:R \to X$ เป็นฟังก์ชันจะได้ว่ามีฟังก์ชัน $h:R \to G$ มีสมบัติที่ว่า

1) $h(0) = 1$ และ

2) $h(s)x(u) = x(u+s)$ สำหรับทุก ๆ $s,u \in R$

ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $g:R \to G$ มีสมบัติว่า $g(s+t)x(u) = g(t)x(u+s)$ เมื่อ $s,t,u \in R$

พิสูจน์ กำหนดให้ X เป็นเซต R เป็นกรุปภายใต้การบวก G เป็นกรุปภายใต้การคูณ โดยที่ G กระทำบน X และมี 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G และให้ $x:R \to X$ เป็นฟังก์ชัน

$(\Rightarrow)$ สมมติว่ามีฟังก์ชัน $h:R \to G$ ซึ่งมีสมบัติคือ $h(0) = 1$ และ $h(s)x(u) = x(u+s)$ สำหรับทุก ๆ $s,u \in R$

ให้ $g:R \to G$ เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $g(r) = g_0 h(r)$ เมื่อ $r \in R$ และ $g_0 \in G$

ให้ $s,t,u \in R$

$$g(s+t)x(u) = g_0 h(s+t)x(u) = g_0 x(u+s+t)$$
$$= g_0 h(t)x(u+s) = g(t)x(u+s)$$

ดังนั้น $g(s+t)x(u) = g(t)x(u+s)$ เมื่อ $s,t,u \in R$

$(\Leftarrow)$ สมมติว่ามีฟังก์ชัน $g:R \to G$ สอดคล้องกับสมการ $g(s+t)x(u) = g(t)x(u+s)$ เมื่อ $s,t,u \in R$

ให้ $h:R \to G$ เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $h(r) = g(0)^{-1} g(r)$ เมื่อ $r \in R$

ดังนั้น $h(0) = g(0)^{-1} g(0) = 1$

ให้ $s,u \in R$

$$h(s)x(u) = g(0)^{-1} g(s)x(u) = g(0)^{-1} g(s+0)x(u)$$

$$= \quad g(0)^{-1}g(0)x(u+s) = \quad x(u+s)$$

ดังนั้น $h(s)x(u) = x(u+s)$ สำหรับทุก ๆ $s,u \in R$ #

สมการเชิงฟังก์ชัน $g(s+t)x(u) = g(s)x(u-t)$ สำหรับทุก ๆ $s,t,u \in R$

ในลำดับแรกพิจารณาฟังก์ชัน $h:R \to G$ โดยที่ $h(0) = 1$ และมีสมบัติ $h(s)x(u) = x(u-s)$ สำหรับทุก ๆ $s,u \in R$

ทฤษฎีบท 4.3 ให้ X เป็นเซต R เป็นกรุปภายใต้การบวก G เป็นกรุปภายใต้การคูณ โดยที่ G กระทำบน X และมี 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G และให้ $x:R \to X$ และ $h:R \to G$ เป็นฟังก์ชันโดยที่ $h(0) = 1$ จะได้ว่าฟังก์ชัน x และฟังก์ชัน h สอดคล้องกับสมการ

$$h(s)x(u) = x(u-s) \text{ สำหรับทุก ๆ } s,u \in R \tag{4.2}$$

ก็ต่อเมื่อ 1) มี $H \le G$

2) มี $N \lhd H$ โดยที่ $N \le G_{x_0}$ สำหรับบาง $x_0 \in X$

3) มีฟังก์ชัน $\Psi : R \to H/N$ ซึ่งมีสมบัติดังนี้

3.1) Ψ เป็นสาทิสสัณฐาน

3.2) $x(r) = \Psi(-r)x_0$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

3.3) $h(r) \in \Psi(r)$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

โดยที่ H/N กระทำบน $H(x_0)$ มีนิยามคือ $(hN)\cdot(kx_0) = (hk)x_0$ สำหรับทุก ๆ $h,k \in H$

พิสูจน์ กำหนดให้ X เป็นเซต R เป็นกรุปภายใต้การบวก G เป็นกรุปภายใต้การคูณ โดยที่ G กระทำบน X และมี 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G

ให้ $x:R \to X$ และ $h:R \to G$ เป็นฟังก์ชันโดยที่ $h(0)=1$

$(\Rightarrow)$ ให้ฟังก์ชัน $x:R \to X$ และฟังก์ชัน $h:R \to G$ สอดคล้องสมการ $h(s)x(u) = x(u-s)$ สำหรับทุก ๆ $s,u \in R$

ให้ $H = \left\{ \prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i} \,\middle|\, n \text{ เป็นจำนวนนับ}, r_i \in R, j_i \in \{1,-1\}, i = 1,2,\ldots,n \right\}$

จากนิยาม H จะได้ว่า $H \subseteq G$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่า $H \le G$

ให้ $N = \left(\bigcap_{u \in R} G_{x(u)} \right) \cap H$

ต่อไปจะแสดงว่า $N \lhd H$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่า $N \le H$

จะแสดงว่าถ้า $s \in R$ แล้วมี $g_s \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$ ซึ่ง $h(s)^{-1} = h(-s)g_s$

ให้ $s,u \in R$

จาก $x(u) = x(u+s-s)$

$= h(s)x(u-(-s))$ (จากสมการที่ (4.2))

$= h(s)h(-s)x(u)$ (จากสมการที่ (4.2))

$x(u) = h(-s)^{-1}h(s)^{-1}x(u)$

จะได้ว่า $h(-s)^{-1}h(s)^{-1} \in G_{x(u)}$ สำหรับทุก ๆ $u \in R$

นั่นคือ $h(-s)^{-1}h(s)^{-1} \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$

ดังนั้นมี $g_s \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$ ที่ซึ่ง $h(-s)^{-1}h(s)^{-1} = g_s$

ดังนั้น $h(s)^{-1} = h(-s)g_s$

ต่อไปจะแสดงว่า $\left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i}\right) N \left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i}\right)^{-1} \leq N$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ $r_i \in R$ และ $j_i \in \{-1,1\}$ โดยใช้การอุปนัยทางคณิตศาสตร์บน n

ให้ $g \in N$

$n=1$, ให้ $r \in R$ จะแสดงว่า $h(r)g\,h(r)^{-1} \in N$

จะมี $g_r \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$ ที่ทำให้ $h(r)^{-1} = h(-r)g_r$

จาก $h(r)g\,h(r)^{-1}x(u) = h(r)gh(-r)g_r x(u)$

$= h(r)gh(-r)x(u)$

$= h(r)gx(u+r)$ (จากสมการที่ (4.2))

$= h(r)x(u+r)$ (เพราะว่า $g \in N$)

$= x(u+r-r)$ (จากสมการที่ (4.2))

$= x(u)$

จะได้ว่า $h(r)g\,h(r)^{-1} \in G_{x(u)}$ สำหรับทุกๆ $u \in R$

นั่นคือ $h(r)g\,h(r)^{-1} \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$

เนื่องจาก $h(r) \in H$ และ $g \in H$ จะได้ว่า $h(r)g\,h(r)^{-1} \in H$

ดังนั้น $h(r)g\,h(r)^{-1} \in N$

ต่อจะแสดงว่า $h(r)^{-1} g\,h(r) \in N$

จะมี $g_r \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$ ที่ทำให้ $h(r)^{-1} = h(-r)g_r$

จาก $h(r)^{-1} g\,h(r)x(u) = h(-r)g_r gh(r)x(u)$

$$= \quad h(-r)g_r gx(u-r) \quad \text{(จากสมการที่ (4.2))}$$
$$= \quad h(-r)x(u-r)$$
$$= \quad x(u-r+r) \qquad \text{(จากสมการที่ (4.2))}$$
$$= \quad x(u)$$

จะได้ว่า $h(r)^{-1} g\, h(r) \in G_{x(u)}$ สำหรับทุก ๆ $u \in R$

นั่นคือ $h(r)^{-1} g\, h(r) \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$

เนื่องจาก $g \in H$ และ $h(r) \in H$ จะได้ว่า $h(r)^{-1} g\, h(r) \in H$

ดังนั้น $h(r)^{-1} g\, h(r) \in N$

ดังนั้น $h(r)^{j} g\, h(r)^{-j} \in N$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ $r \in R$ $j \in \{-1, 1\}$

สมมติให้ $\left(\prod_{i=1}^{k} h(r_i)^{j_i}\right) g \left(\prod_{i=1}^{k} h(r_i)^{j_i}\right)^{-1} \in N$ สำหรับทุก ๆ $g \in N$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.1 ได้ว่า $\left(\prod_{i=1}^{k+1} h(r_i)^{j_i}\right) g \left(\prod_{i=1}^{k+1} h(r_i)^{j_i}\right)^{-1} \in N$

จากการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ได้ว่า $\left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i}\right) g \left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i}\right)^{-1} \in N$ สำหรับทุก ๆ

$g \in N$

ดังนั้น $\left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i}\right) N \left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i}\right)^{-1} \leq N$

นั่นคือ $N \lhd H$

ให้ $x_0 = x(0)$ ดังนั้น $x_0 \in X$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.1 ได้ว่า $N \leq G_{x_0}$

ให้ $\Psi : R \to H/N$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $\Psi(r) = h(r)N$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

ต่อไปจะแสดงว่า $\Psi : R \to H/N$ เป็นสาทิสสัณฐาน

ให้ $s, t, u \in R$

จากสมการ $h(s+t)x(u) = x(u-(s+t)) = x(u-t-s) = h(s)h(t)x(u)$

ดังนั้น $h(s+t)^{-1} h(s)h(t)x(u) = x(u)$

ได้ว่า $h(s+t)^{-1} h(s)h(t) \in G_{x(u)}$ สำหรับทุก ๆ $u \in R$

นั่นคือ $h(s+t)^{-1} h(s)h(t) \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$

เนื่องจาก $h(s+t)^{-1} h(s)h(t) \in H$ จะได้ว่า $h(s+t)^{-1} h(s)h(t) \in N$

$h(s)h(t) \in h(s+t)N$

ดังนั้น $h(s)h(t)N = h(s+t)N$

$$\Psi(s+t) = h(s+t)N = h(s)h(t)N = h(s)Nh(t)N = \Psi(s)\Psi(t)$$

ดังนั้น $\Psi : R \to H/N$ เป็นสาทิสสัณฐาน

ให้ H/N กระทำบน $H(x_0)$ มีนิยามคือ

$(hN)\cdot(kx_0) = (hk)x_0$ สำหรับทุก ๆ $h,k \in H$

พิสูจน์เช่นเดียวกับทฤษฎีบท 4.1 ได้ว่า H/N กระทำบน $H(x_0)$ เป็นฟังก์ชัน

เห็นได้ชัดว่า $h(r) \in h(r)N = \Psi(r)$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$ และได้ว่า

$$\begin{aligned}\Psi(-r)x_0 &= (h(-r)N)\cdot x_0 = (h(-r)N)\cdot(1x_0) = (h(-r)1)x_0 \\ &= h(-r)x_0 = h(-r)x(0) = x(0-(-r)) = x(r)\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) ให้ $H \le G$ $N \lhd H$ โดยที่ $N \le G_{x_0}$ เมื่อ $x_0 \in X$ ฟังก์ชัน $\Psi : R \to H/N$ เป็นสาทิสสัณฐาน $x(r) = \Psi(-r)x_0$ และ $h(r) \in \Psi(r)$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$ โดยที่ H/N กระทำบน $H(x_0)$ มีนิยามคือ $(hN)\cdot(kx_0) = (hk)x_0$ สำหรับทุก ๆ $h,k \in H$

ให้ $s,u \in R$

$$\begin{aligned}h(s)x(u) &= h(s)\Psi(-u)x_0 = (\Psi(s)\Psi(-u))x_0 \\ &= \Psi(s-u)x_0 = x(-(s-u)) = x(u-s)\end{aligned}$$

ดังนั้น $h(s)x(u) = x(u-s)$ สำหรับทุก ๆ $s,u \in R$ #

ทฤษฎีบท 4.4 ให้ X เป็นเซต R เป็นกรุปภายใต้การบวก G เป็นกรุปภายใต้การคูณ โดยที่ G กระทำบน X และมี 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G และให้ $x:R \to X$ เป็นฟังก์ชันจะได้ว่ามีฟังก์ชัน $h:R \to G$ มีสมบัติที่ว่า

1) $h(0) = 1$ และ

2) $h(s)x(u) = x(u-s)$ สำหรับทุก ๆ $s,u \in R$

ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $g:R \to G$ มีสมบัติว่า $g(s+t)x(u) = g(s)x(u-t)$ เมื่อ $s,t,u \in R$

พิสูจน์ กำหนดให้ X เป็นเซต R เป็นกรุปภายใต้การบวก G เป็นกรุปภายใต้การคูณ โดยที่ G กระทำบน X และมี 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G และให้ $x:R \to X$ เป็นฟังก์ชัน

($\Rightarrow$) สมมติว่ามีฟังก์ชัน $h:R \to G$ ซึ่งมีสมบัติคือ $h(0) = 1$ และ $h(s)x(u) = x(u-s)$ สำหรับทุก ๆ $s,u \in R$

ให้ $g:R \to G$ เป็นฟังก์ชันมีนิยามโดย $g(r) = g_0 h(r)$ เมื่อ $r \in R$ และ $g_0 \in G$

ให้ $s,t,u \in R$

$$\begin{aligned}g(s+t)x(u) &= g_0 h(s+t)x(u) = g_0 x(u-t-s) \\ &= g_0 h(s)x(u-t) = g(s)x(u-t)\end{aligned}$$

ดังนั้น $g(s+t)x(u) = g(s)x(u-t)$ เมื่อ $s,t,u \in R$

($\Leftarrow$) สมมติว่ามี $x:R\to X$ และฟังก์ชัน $g:R\to G$ สอดคล้องกับสมการ $g(s+t)x(u) = g(s)x(u-t)$ เมื่อ $s,t,u\in R$

ให้ $h:R\to G$ เป็นฟังก์ชันมีนิยามโดย $h(r)=g(0)^{-1}g(r)$ เมื่อ $r\in R$

ดังนั้น $h(0) = g(0)^{-1}g(0) = 1$

ให้ $s,u\in R$

$$\begin{aligned} h(s)x(u) &= g(0)^{-1}g(s)x(u) = g(0)^{-1}g(0+s)x(u) \\ &= g(0)^{-1}g(0)x(u-s) = x(u-s) \end{aligned}$$

ดังนั้น $h(s)x(u) = x(u-s)$ สำหรับทุก ๆ $s,u\in R$ #

สมการเชิงฟังก์ชัน $g(s+t)x(u) = g(t)x(-s+u)$ สำหรับทุกๆ $s,t,u\in R$

ในลำดับแรกพิจารณาฟังก์ชัน $h:R\to G$ โดยที่ $h(0) = 1$ และมีสมบัติ $h(s)x(u) = x(-s+u)$ สำหรับทุกๆ $s,u\in R$

ทฤษฎีบท 4.5 ให้ X เป็นเซต R เป็นกรุปภายใต้การบวก G เป็นกรุปภายใต้การคูณ โดยที่ G กระทำบน X และมี 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G และให้ $x:R\to X$ และ $h:R\to G$ เป็นฟังก์ชันโดยที่ $h(0) = 1$ จะได้ว่าฟังก์ชัน x และฟังก์ชัน h สอดคล้องกับสมการ

$$h(s)x(u) = x(-s+u) \text{ สำหรับทุก ๆ } s,u\in R \tag{4.3}$$

ก็ต่อเมื่อ 1) มี $H\le G$

2) มี $N \triangleleft H$ โดยที่ $N\le G_{x_0}$ สำหรับบาง $x_0\in X$

3) มีฟังก์ชัน $\Psi : R\to H/N$ ซึ่งมีสมบัติดังนี้

3.1) $\Psi(s+t) = \Psi(t)\Psi(s)$ สำหรับทุกๆ $s,t\in R$

3.2) $x(r) = \Psi(-r)x_0$ สำหรับทุก ๆ $r\in R$

3.3) $h(r)\in\Psi(r)$ สำหรับทุก ๆ $r\in R$

โดยที่ H/N กระทำบน $H(x_0)$ มีนิยามคือ $(hN)\cdot(kx_0) = (hk)x_0$ สำหรับทุก ๆ $h,k\in H$

พิสูจน์ กำหนดให้ X เป็นเซต R เป็นกรุปภายใต้การบวก G เป็นกรุปภายใต้การคูณ โดยที่ G กระทำบน X และมี 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G

ให้ $x:R\to X$ และ $h:R\to G$ เป็นฟังก์ชันโดยที่ $h(0)=1$

($\Rightarrow$) ให้ฟังก์ชัน $x:R\to X$ และฟังก์ชัน $h:R\to G$ สอดคล้องกับสมการ $h(s)x(u) = x(-s+u)$ สำหรับทุก ๆ $s,u\in R$

ให้ $H = \left\{ \prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i} \;\middle|\; n \text{ เป็นจำนวนนับ}, r_i \in R, j_i \in \{1,-1\}, i = 1,2,\ldots,n \right\}$

จากนิยาม H จะได้ว่า $H \subseteq G$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่า $H \leq G$

ให้ $N = \left(\bigcap_{u\in R} G_{x(u)} \right) \cap H$

ต่อไปจะแสดงว่า $N \lhd H$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่า $N \leq H$

จะแสดงว่าถ้า $s \in R$ แล้วมี $g_s \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$ ซึ่ง $h(s)^{-1} = h(-s)g_s$

ให้ $s,u \in R$

จาก
$$\begin{aligned} x(u) &= x(-s+s+u) \\ &= h(s)x(-(-s)+u) && \text{(จากสมการที่ (4.3))} \\ &= h(s)h(-s)x(u) && \text{(จากสมการที่ (4.3))} \\ x(u) &= h(-s)^{-1}h(s)^{-1}x(u) \end{aligned}$$

จะได้ว่า $h(-s)^{-1}h(s)^{-1} \in G_{x(u)}$ สำหรับทุก ๆ $u \in R$

นั่นคือ $h(-s)^{-1}h(s)^{-1} \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$

ดังนั้นมี $g_s \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$ ที่ซึ่ง $h(-s)^{-1}h(s)^{-1} = g_s$

ดังนั้น $h(s)^{-1} = h(-s)g_s$

ต่อไปจะแสดงว่า $\left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i} \right) N \left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i} \right)^{-1} \leq N$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ $r_i \in R$ และ $j_i \in \{-1,1\}$ โดยใช้การอุปนัยทางคณิตศาสตร์บน n

ให้ $g \in N$

$n=1$, ให้ $r \in R$ จะแสดงว่า $h(r)g\,h(r)^{-1} \in N$

จะมี $g_r \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$ ที่ทำให้ $h(r)^{-1} = h(-r)g_r$

จาก
$$\begin{aligned} h(r)g\,h(r)^{-1}x(u) &= h(r)gh(-r)g_r x(u) \\ &= h(r)gh(-r)x(u) \\ &= h(r)gx(r+u) && \text{(จากสมการที่ (4.3))} \\ &= h(r)x(r+u) && \text{(เพราะว่า } g \in N\text{)} \\ &= x(-r+r+u) && \text{(จากสมการที่ (4.3))} \\ &= x(u) \end{aligned}$$

จะได้ว่า $h(r)g\,h(r)^{-1} \in G_{x(u)}$ สำหรับทุก ๆ $u \in R$

ดังนั้น $h(r)g\,h(r)^{-1} \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$

เนื่องจาก $h(r)\in H$ และ $g\in H$ จะได้ว่า $h(r)g\,h(r)^{-1}\in H$

ดังนั้น $h(r)g\,h(r)^{-1}\in N$

ต่อแสดงว่า $h(r)^{-1}g\,h(r) \in N$

จะมี $g_r \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$ ที่ทำให้ $h(r)^{-1} = h(-r)g_r$

$$
\begin{aligned}
\text{จาก } h(r)^{-1}g\,h(r)x(u) &= h(-r)g_r g h(r)x(u) \\
&= h(-r)g_r g x(-r+u) \quad \text{(จากสมการที่ (4.3))} \\
&= h(-r)x(-r+u) \\
&= x(r-r+u) \qquad \text{(จากสมการที่ (4.3))} \\
&= x(u)
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า $h(r)^{-1}g\,h(r) \in G_{x(u)}$ สำหรับทุก ๆ $u\in R$

นั่นคือ $h(r)^{-1}g\,h(r) \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$

เนื่องจาก $g\in H$ และ $h(r)\in H$ จะได้ว่า $h(r)^{-1}g\,h(r)\in H$

ดังนั้น $h(r)^{-1}g\,h(r)\in N$

ดังนั้น $h(r)^{j}g\,h(r)^{-j}\in N$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ $r\in R$ $j\in\{-1,1\}$

สมมติให้ $\left(\prod_{i=1}^{k} h(r_i)^{j_i}\right) g \left(\prod_{i=1}^{k} h(r_i)^{j_i}\right)^{-1} \in N$ สำหรับทุก ๆ $g\in N$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.1 ได้ว่า $\left(\prod_{i=1}^{k+1} h(r_i)^{j_i}\right) g \left(\prod_{i=1}^{k+1} h(r_i)^{j_i}\right)^{-1} \in N$

จากการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ได้ว่า $\left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i}\right) g \left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i}\right)^{-1} \in N$ สำหรับทุก ๆ $g\in N$

ดังนั้น $\left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i}\right) N \left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i}\right)^{-1} \leq N$

นั่นคือ $N \lhd H$

ให้ $x_0 = x(0)$ ดังนั้น $x_0 \in X$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.1 ได้ว่า $N\leq G_{x_0}$

ต่อไปจะแสดงว่า $\Psi : R\to H/N$ มีสมบัติ $\Psi(s+t) = \Psi(t)\Psi(s)$ สำหรับทุก ๆ $s,t\in R$

ให้ $s,t,u\in R$

จากสมการ $h(s+t)x(u) = x(-(s+t)+u) = x(-t-s+u)$

$= h(t)h(s)x(u)$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่า $\Psi(s+t) = \Psi(t)\Psi(s)$

ให้ $\Psi : R \to H/N$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $\Psi(r) = h(r)N$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

ให้ H/N กระทำบน $H(x_0)$ มีนิยามคือ

$(hN)\cdot(kx_0) = (hk)x_0$ สำหรับทุก ๆ $h,k \in H$

พิสูจน์เช่นเดียวกับทฤษฎีบท 4.1 ได้ว่า H/N กระทำบน $H(x_0)$ เป็นฟังก์ชัน

เห็นได้ชัดว่า $h(r) \in h(r)N = \Psi(r)$ สำหรับทุกๆ $r \in R$ และจากการพิสูจน์ในทฤษฎีบท 4.3 ได้ว่า $\Psi(-r)x_0 = h(-r)x_0$

ดังนั้น $\Psi(-r)x_0 = h(-r)x_0 = h(-r)x(0) = x(-(-r)+0) = x(r)$

$(\Leftarrow)$ ให้ $H \le G$ $N \triangleleft H$ โดยที่ $N \le G_{x_0}$ เมื่อ $x_0 \in X$ ฟังก์ชัน $\Psi : R \to H/N$ มีสมบัติคือ $\Psi(s+t) = \Psi(t)\Psi(s)$ $x(r) = \Psi(-r)x_0$ และ $h(r) \in \Psi(r)$ สำหรับทุก ๆ $s,t,r \in R$ โดยที่ H/N กระทำบน $H(x_0)$ มีนิยามคือ $(hN)\cdot(kx_0) = (hk)x_0$ สำหรับทุก ๆ $h,k \in H$

ให้ $s,u \in R$

$$\begin{aligned} h(s)x(u) &= h(s)\Psi(-u)x_0 = (\Psi(s)\Psi(-u))x_0 \\ &= \Psi(-u+s)x_0 = x(-(-u+s)) = x(-s+u) \end{aligned}$$

ดังนั้น $h(s)x(u) = x(-s+u)$ สำหรับทุก ๆ $s,u \in R$ #

ทฤษฎีบท 4.6 ให้ X เป็นเซต R เป็นกรุปภายใต้การบวก G เป็นกรุปภายใต้การคูณ โดยที่ G กระทำบน X และมี 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G และให้ $x:R \to X$ เป็นฟังก์ชันจะได้ว่ามีฟังก์ชัน $h:R \to G$ มีสมบัติที่ว่า

1) $h(0) = 1$ และ

2) $h(s)x(u) = x(-s+u)$ สำหรับทุก ๆ $s,u \in R$

ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $g:R \to G$ มีสมบัติว่า $g(s+t)x(u) = g(t)x(-s+u)$ เมื่อ $s,t,u \in R$

พิสูจน์ กำหนดให้ X เป็นเซต R เป็นกรุปภายใต้การบวก G เป็นกรุปภายใต้การคูณ โดยที่ G กระทำบน X และมี 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G และให้ $x:R \to X$ เป็นฟังก์ชัน

$(\Rightarrow)$ สมมติว่ามีฟังก์ชัน $h:R \to G$ ซึ่งมีสมบัติคือ $h(0) = 1$ และ $h(s)x(u) = x(-s+u)$ สำหรับทุก ๆ $s,u \in R$

ให้ $g:R \to G$ เป็นฟังก์ชันมีนิยามโดย $g(r) = g_0 h(r)$ เมื่อ $r \in R$ และ $g_0 \in G$

ให้ $s,t,u \in R$

$$g(s+t)x(u) = g_0 h(s+t)x(u) = g_0 x(-t-s+u)$$

$$= \quad g_0 h(t)x - s + u \quad = \quad g(t)x(-s+u)$$

ดังนั้น $g(s+t)x(u) = g(t)x(-s+u)$ เมื่อ $s,t,u \in R$

($\Leftarrow$) สมมติว่ามีฟังก์ชัน $g: R \to G$ สอดคล้องกับสมการ

$g(s+t)x(u) = g(t)x(-s+u)$ เมื่อ $s,t,u \in R$

ให้ $h: R \to G$ เป็นฟังก์ชันมีนิยามโดย $h(r) = g(0)^{-1}g(r)$ เมื่อ $r \in R$

ดังนั้น $h(0) = g(0)^{-1}g(0) = 1$

ให้ $s,u \in R$

$$\begin{aligned} h(s)x(u) &= g(0)^{-1}g(s)x(u) &&= g(0)^{-1}g(s+0)x(u) \\ &= g(0)^{-1}g(0)x(-s+u) &&= x(-s+u) \end{aligned}$$

ดังนั้น $h(s)x(u) = x(-s+u)$ สำหรับทุกๆ $s,u \in R$ #

กำหนดให้ $a \in R$

สมการเชิงฟังก์ชัน $g(s+t)x(u) = g(s+a)x(t-a+u)$ **สำหรับทุก ๆ** $s,t,u \in R$

ในลำดับแรกพิจารณาฟังก์ชัน $h: R \to G$ โดยที่ $h(a) = 1$ และมีสมบัติ $h(s+a)x(u) = x(s+u)$ สำหรับทุก ๆ $s,u \in R$

ทฤษฎีบท 4.7 ให้ X เป็นเซต R เป็นกรุปภายใต้การบวก G เป็นกรุปภายใต้การคูณ โดยที่ G กระทำบน X และมี 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G ให้ $a \in R$ $x: R \to X$ และ $h: R \to G$ เป็นฟังก์ชันโดยที่ $h(a) = 1$ จะได้ว่าฟังก์ชัน x และฟังก์ชัน h สอดคล้องกับสมการ

$$h(s+a)x(u) = x(s+u) \text{ สำหรับทุก ๆ } s,u \in R \tag{4.4}$$

ก็ต่อเมื่อ 1) มี $H \le G$

2) มี $N \triangleleft H$ โดยที่ $N \le G_{x_0}$ สำหรับบาง $x_0 \in X$

3) มีฟังก์ชัน $\Psi: R \to H/N$ ซึ่งมีสมบัติดังนี้

3.1) Ψ เป็นสาทิสสัณฐาน

3.2) $x(r) = \Psi(r)x_0$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

3.3) $h(r) \in \Psi(r-a)$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

โดยที่ H/N กระทำบน $H(x_0)$ มีนิยามคือ $(hN)\cdot(kx_0) = (hk)x_0$ สำหรับทุก ๆ $h,k \in H$

พิสูจน์ ให้ X เป็นเซต R เป็นกรุปภายใต้การบวก G เป็นกรุปภายใต้การคูณโดยที่ G กระทำบน X และมี 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G และให้ $a \in R$

ให้ $x: R \to X$ และ $h: R \to G$ เป็นฟังก์ชันโดยที่ $h(a) = 1$

($\Rightarrow$) ให้ฟังก์ชัน $x:R\to X$ และฟังก์ชัน $h:R\to G$ สอดคล้องกับสมการ $h(s+a)x(u) = x(s+u)$ สำหรับทุก ๆ $s,u\in R$

ให้ $H=\left\{ \prod_{i=1}^{n} h(r_i+a)^{j_i} \;\middle|\; n\in\mathbb{N}, r_i\in R, j_i\in\{1,-1\}, i=1,2,\ldots,n \right\}$

จากนิยาม H จะได้ว่า $H\subseteq G$

ต่อไปจะแสดงว่า $H\leq G$

1) H ไม่เป็นเซตว่างเพราะว่า $1 = h(a)^1 \in H$

2) ให้ $h_1,h_2\in H$

ดังนั้น $h_1 = h(r_1+a)^{j_1}h(r_2+a)^{j_2}\ldots h(r_m+a)^{j_m}$ เมื่อ $r_i\in R$, $j_i\in\{-1,1\}$ $i=1,2,\ldots,m$

และ $h_2 = h(r_1'+a)^{j_1'}h(r_2'+a)^{j_2'}\ldots h(r_k'+a)^{j_k'}$ เมื่อ $r_i\in R$, $j_i\in\{-1,1\}$ $i=1,2,\ldots,k$

$$\begin{aligned} h_1h_2^{-1} &= h(r_1+a)^{j_1}\ldots h(r_m+a)^{j_m}\left(h(r_1'+a)^{j_1'}\ldots h(r_k'+a)^{j_k'}\right)^{-1} \\ &= h(r_1+a)^{j_1}\ldots h(r_m+a)^{j_m}h(r_k'+a)^{-j_k'}\ldots h(r_1'+a)^{-j_1'} \end{aligned}$$

ให้ $r_i' = r_{m+k-i+1}$ และ $-j_i' = j_{m+k-i+1}$ เมื่อ $i=1,2,\ldots,k$

เพราะฉะนั้น $h_1h_2^{-1} = h(r_1+a)^{j_1}\ldots h(r_m+a)^{j_m}h(r_{m+1}+a)^{j_{m+1}}\ldots h(r_{m+k}+a)^{j_{m+k}}$

หรือได้ว่า $h_1h_2^{-1} = \prod_{i=1}^{m+k} h(r_i+a)^{j_i} \in H$

นั่นคือ $H\leq G$

ให้ $N=\left(\bigcap_{u\in R} G_{x(u)}\right)\bigcap H$

ต่อไปจะแสดงว่า $N\lhd H$

เนื่องจาก $G_{x(u)}$ เป็นกรุปจะได้ว่า $\bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$ เป็นกรุปและจาก H เป็นกรุป

ดังนั้น $\left(\bigcap_{u\in R} G_{x(u)}\right)\cap H = N$ เป็นกรุป

เพราะว่า $N = \left(\bigcap_{u\in R} G_{x(u)}\right)\bigcap H \subseteq H$ ดังนั้น $N\leq H$

จะแสดงว่าถ้า $s\in R$ แล้วมี $g_s\in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$ ซึ่ง $h(s)^{-1} = h(a-s+a)g_s$

ให้ $s,u\in R$

$$\begin{aligned} \text{จาก } x(u) &= x((s-a)+(-(s-a))+u) \\ &= h(s-a+a)h(-(s-a)+a)x(u) && \text{(จากสมการที่ (4.4))} \\ &= h(s)h(a-s+a)x(u) && \text{(จากสมการที่ (4.4))} \end{aligned}$$

$$x(u) = h(a-s+a)^{-1}h(s)^{-1}x(u)$$

จะได้ว่า $h(a-s+a)^{-1}h(s)^{-1} \in G_{x(u)}$ สำหรับทุก ๆ $u \in R$

นั่นคือ $h(a-s+a)^{-1}h(s)^{-1} \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$

ดังนั้นมี $g_s \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$ ที่ซึ่ง $h(a-s+a)^{-1}h(s)^{-1} = g_s$

ดังนั้น $h(s)^{-1} = h(a-s+a)g_s$

ต่อไปจะแสดงว่า $\left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i+a)^{j_i}\right)N\left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i+a)^{j_i}\right)^{-1} \le N$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ $r_i \in R$ และ $j_i \in \{-1,1\}$ โดยใช้การอุปนัยทางคณิตศาสตร์บน n

ให้ $g \in N$

$n=1$, ให้ $r \in R$ จะแสดงว่า $h(r+a)g\,h(r+a)^{-1} \in N$

จะมี $g_r \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$ ที่ทำให้ $h(r+a)^{-1} = h(a-(r+a)+a)g_r$

จาก
$$\begin{aligned}
h(r+a)g\,h(r+a)^{-1}x(u) &= h(r+a)gh(a-(r+a)+a)g_r x(u) \\
&= h(r+a)gh(a-a-r+a)x(u) \\
&= h(r+a)gh(-r+a)x(u) \\
&= h(r+a)gx(-r+u) \\
&= h(r+a)x(-r+u) \\
&= x(r-r+u) \\
&= x(u)
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $h(r+a)g\,h(r+a)^{-1} \in G_{x(u)}$ สำหรับทุก ๆ $u \in R$

นั่นคือ $h(r+a)g\,h(r+a)^{-1} \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$

เนื่องจาก $h(r+a), g \in H$

จะได้ว่า $h(r+a)g\,h(r+a)^{-1} \in H$ ดังนั้น $h(r+a)g\,h(r+a)^{-1} \in N$

ต่อไปจะแสดงว่า $h(r+a)^{-1}g\,h(r+a) \in N$

จะมี $g_r \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$ ที่ทำให้ $h(r+a)^{-1} = h(a-(r+a)+a)g_r$

จาก
$$\begin{aligned}
h(r+a)^{-1}g\,h(r+a)x(u) &= h(a-(r+a)+a)g_r gh(r+a)x(u) \\
&= h(a-(r+a)+a)g_r gx(r+u) \\
&= h(a-a-r+a)x(r+u) \\
&= x(-r+r+u) \\
&= x(u)
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $h(r+a)^{-1} g\, h(r+a) \in G_{x(u)}$ สำหรับทุก ๆ $u \in R$

นั่นคือ $h(r+a)^{-1} g\, h(r+a) \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$

เนื่องจาก $g\,,\, h(r+a) \in H$

จะได้ว่า $h(r+a)^{-1} g\, h(r+a) \in H$ ดังนั้น $h(r+a)^{-1} g\, h(r+a) \in N$

ดังนั้น $h(r+a)^{j} g\, h(r+a)^{-j} \in N$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ $r \in R$ $j \in \{-1, 1\}$

สมมติให้ $\left(\prod_{i=1}^{k} h(r_i+a)^{j_i}\right) g \left(\prod_{i=1}^{k} h(r_i+a)^{j_i}\right)^{-1} \in N$ สำหรับทุก ๆ $g \in N$

จะมี $g' \in N$ โดยที่ $g' = h(r_{k+1}+a)^{j_{k+1}} g h(r_{k+1}+a)^{-j_{k+1}}$

$$\left(\prod_{i=1}^{k+1} h(r_i+a)^{j_i}\right) g \left(\prod_{i=1}^{k+1} h(r_i+a)^{j_i}\right)^{-1} x(u)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{k} h(r_i+a)^{j_i}\right) h(r_{k+1}+a)^{j_{k+1}} g h(r_{k+1}+a)^{-j_{k+1}} \left(\prod_{i=1}^{k} h(r_i+a)^{j_i}\right)^{-1} x(u)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{k} h(r_i+a)^{j_i}\right) g' \left(\prod_{i=1}^{k} h(r_i+a)^{j_i}\right)^{-1} x(u)$$

$$= x(u) \qquad \text{(จากสมมติฐาน)}$$

ดังนั้น $\left(\prod_{i=1}^{k+1} h(r_i+a)^{j_i}\right) g \left(\prod_{i=1}^{k+1} h(r_i+a)^{j_i}\right)^{-1} \in G_{x(u)}$ สำหรับทุก ๆ $u \in R$

นั่นคือ $\left(\prod_{i=1}^{k+1} h(r_i+a)^{j_i}\right) g \left(\prod_{i=1}^{k+1} h(r_i+a)^{j_i}\right)^{-1} \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$

เนื่องจาก $\left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i+a)^{j_i}\right),\ g \in H$

จะได้ว่า $\left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i+a)^{j_i}\right) g \left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i+a)^{j_i}\right)^{-1} \in H$

ดังนั้น $\left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i+a)^{j_i}\right) g \left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i+a)^{j_i}\right)^{-1} \in N$

จากการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ได้ว่า $\left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i+a)^{j_i}\right) g \left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i+a)^{j_i}\right)^{-1} \in N$ สำหรับทุก ๆ $g \in N$

ดังนั้น $\left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i+a)^{j_i}\right) N \left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i+a)^{j_i}\right)^{-1} \leq N$

นั่นคือ $N \lhd H$

ให้ $x_0 = x(0)$ ดังนั้น

ต่อไปจะแสดงว่า $N \leq G_{x_0}$

เนื่องจาก N เป็นกรุปและ $N = \left(\bigcap_{u\in R} G_{x(u)}\right) \cap H \subseteq G_{x(0)} = G_{x_0}$ ดังนั้น $N \le G_{x_0}$

ให้ $\Psi : R \to H/N$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $\Psi(r) = h(r+a)N$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

ต่อไปจะแสดงว่า $\Psi : R \to H/N$ เป็นสาทิสสัณฐาน

ให้ $s, t, u \in R$

จากสมการ $h(s+t+a)x(u) = x(s+t+u) = h(s+a)h(t+a)x(u)$

ดังนั้น $h(s+t+a)^{-1}h(s+a)h(t+a) \in G_{x(u)}$ สำหรับทุก ๆ $u \in R$

นั่นคือ $h(s+t+a)^{-1}h(s+a)h(t+a) \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$

เนื่องจาก $h(s+t+a)^{-1}h(s+a)h(t+a) \in H$

จะได้ว่า $h(s+t+a)^{-1}h(s+a)h(t+a) \in N$

$$h(s+a)h(t+a) \in h(s+t+a)N$$

ดังนั้น $h(s+a)h(t+a)N = h(s+t+a)N$

$$\Psi(s+t) = h(s+t+a)N = h(s+a)h(t+a)N$$
$$= h(s+a)Nh(t+a)N = \Psi(s)\Psi(t)$$

ดังนั้น $\Psi : R \to H/N$ เป็นสาทิสสัณฐาน

ให้ H/N กระทำบน $H(x_0)$ มีนิยามคือ

$(hN)\cdot(kx_0) = (hk)x_0$ สำหรับทุก ๆ $h, k \in H$

พิสูจน์เช่นเดียวกับทฤษฎีบท 4.1 ได้ว่า H/N กระทำบน $H(x_0)$ เป็นฟังก์ชัน

เห็นได้ชัดว่า $h(r) \in h(r)N = h((r-a)+a)N = \Psi(r-a)$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$ และได้ว่า

$$\Psi(r-a)x_0 = (h(r)N)\cdot x_0 = (h(r)N)\cdot(1x_0) = (h(r)1)x_0$$
$$= h(r)x(0) = x(r+0) = x(r)$$

($\Leftarrow$) ให้ $H \le G$ $N \triangleleft H$ โดยที่ $N \le G_{x_0}$ เมื่อ $x_0 \in X$ ฟังก์ชัน $\Psi : R \to H/N$ เป็นสาทิสสัณฐาน $x(r) = \Psi(r)x_0$ และ $h(r) \in \Psi(r-a)$ สำหรับทุกๆ $r \in R$ และ H/N กระทำบน $H(x_0)$ มีนิยามคือ $(hN)\cdot(kx_0) = (hk)x_0$ สำหรับทุกๆ $h, k \in H$

ให้ $s, u \in R$

$$h(s+a)x(u) = h(s+a)\Psi(u)x_0 = (\Psi(s)\Psi(u))x_0$$

$$= \quad \Psi(s+u)x_0 \qquad = \quad x(s+u)$$

ดังนั้น $h(s+a)x(u) = x(s+u)$ สำหรับทุกๆ $s,u \in R$ #

ทฤษฎีบท 4.8 ให้ X เป็นเซต R เป็นกรุปภายใต้การบวก G เป็นกรุปภายใต้การคูณ โดยที่ G กระทำบน X และมี 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G ให้ $a \in R$ และ $x:R \to X$ เป็นฟังก์ชันจะได้ว่ามีฟังก์ชัน $h:R \to G$ ซึ่งมีสมบัติที่ว่า

1) $h(a) = 1$ และ

2) $h(s+a)x(u) = x(s+u)$ สำหรับทุก ๆ $s,u \in R$

ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $g:R \to G$ โดยที่ $g(s+t)x(u) = g(s+a)x(t-a+u)$ เมื่อ $s,t,u \in R$

พิสูจน์ กำหนดให้ X เป็นเซต R เป็นกรุปภายใต้การบวก G เป็นกรุปภายใต้การคูณ โดยที่ G กระทำบน X และมี 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G ให้ $a \in G$ และ $x:R \to X$ เป็นฟังก์ชัน

($\Rightarrow$) สมมติว่ามีฟังก์ชัน $h:R \to G$ ซึ่งมีสมบัติคือ $h(a) = 1$ และ $h(s+a)x(u) = x(s+u)$ สำหรับทุก ๆ $s,u \in R$

ให้ $g:R \to G$ เป็นฟังก์ชันมีนิยามโดย $g(r) = g_a h(r)$ เมื่อ $r \in R$ และ $g_a \in G$

ให้ $s,t,u \in R$

$$\begin{aligned} g(s+t)x(u) &= g_a h((s+t-a)+a)x(u) &&= g_a x(s+(t-a+u)) \\ &= g_a h(s+a)x(t-a+u) &&= g(s+a)x(t-a+u) \end{aligned}$$

ดังนั้น $g(s+t)x(u) = g(s+a)x(t-a+u)$ เมื่อ $s,t,u \in R$

($\Leftarrow$) สมมติว่ามีฟังก์ชัน $g:R \to G$ จะสอดคล้องกับสมการ $g(s+t)x(u) = g(s+a)x(t-a+u)$ เมื่อ $s,t,u \in R$

ให้ $h:R \to G$ เป็นฟังก์ชันมีนิยามโดย $h(r) = g(a)^{-1}g(r)$ เมื่อ $r \in R$

ดังนั้น $h(a) = g(a)^{-1}g(a) = 1$

ให้ $s,u \in R$

$$\begin{aligned} h(s+a)x(u) &= g(a)^{-1}g(s+a)x(u) \\ &= g(a)^{-1}g(0+(s+a))x(u) \\ &= g(a)^{-1}g(a)x(s+a-a+u) \\ &= x(s+u) \end{aligned}$$

ดังนั้น $h(s+a)x(u) = x(s+u)$ สำหรับทุกๆ $s,u \in R$ #

สมการเชิงฟังก์ชัน $g(s+t)x(u) = g(t)x(s+u)$ สำหรับทุก ๆ $s,t,u \in R$

ในลำดับแรกพิจารณาฟังก์ชัน $h:R \to G$ โดยที่ $h(0) = 1$ และมีสมบัติดังต่อไปนี้

$h(s)x(u) = x(s+u)$ และ $h(s+t)x(u) = h(t+s)x(u)$ สำหรับทุก ๆ $s,t,u \in R$

ทฤษฎีบท 4.9 ให้ X เป็นเซต R เป็นกรุปภายใต้การบวก G เป็นกรุปภายใต้การคูณ โดยที่ G กระทำบน X และมี 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G และให้ $x:R\to X$ และ $h:R\to G$ เป็นฟังก์ชันโดยที่ $h(0) = 1$ จะได้ว่าฟังก์ชัน x และฟังก์ชัน h สอดคล้องกับสมการ

1) $h(s)x(u) = x(s+u)$ สำหรับทุกๆ $s,u \in R$ และ (4.5)

2) $h(s+t)x(u) = h(t+s)x(u)$ สำหรับทุกๆ $s,t,u \in R$

ก็ต่อเมื่อ 1) มี $H \le G$

2) มี $N \lhd H$ โดยที่ $N \le G_{x_0}$ สำหรับบาง $x_0 \in X$

3) มีฟังก์ชัน $\Psi : R \to H/N$ ซึ่งมีสมบัติดังนี้

3.1) Ψ เป็นสาทิสสัณฐาน

3.2) $\Psi(s)\Psi(t) = \Psi(t)\Psi(s)$ สำหรับทุก ๆ $s,t \in R$

3.3) $x(r) = \Psi(r)x_0$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

3.4) $h(r) \in \Psi(r)$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

โดยที่ H/N กระทำบน $H(x_0)$ มีนิยามคือ $(hN)\cdot(kx_0) = (hk)x_0$ สำหรับทุก ๆ $h,k \in H$

พิสูจน์ กำหนดให้ X เป็นเซต R เป็นกรุปภายใต้การบวก G เป็นกรุปภายใต้การคูณ โดยที่ G กระทำบน X และมี 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G

ให้ $x:R\to X$ และ $h:R\to G$ เป็นฟังก์ชันโดยที่ $h(0)=1$

$(\Rightarrow)$ ให้ฟังก์ชัน $x:R\to X$ และฟังก์ชัน $h:R\to G$ สอดคล้องกับสมการ $h(s)x(u) = x(s+u)$ สำหรับทุกๆ $s,u \in R$ และ $h(s+t)x(u) = h(t+s)x(u)$ สำหรับทุก ๆ $s,t,u \in R$

ให้ $H = \left\{ \prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i} \;\middle|\; n \text{ เป็นจำนวนนับ }, r_i \in R, j_i \in \{1,-1\}, i = 1,2,\ldots,n \right\}$

จากนิยาม H จะได้ว่า $H \subseteq G$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่า $H \le G$

ให้ $N = \left(\bigcap_{u\in R} G_{x(u)}\right) \cap H$

ต่อไปจะแสดงว่า $N \lhd H$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่า $N \le H$

จะแสดงว่าถ้า $s \in R$ แล้วมี $g_s \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$ ซึ่ง $h(s)^{-1} = h(-s)g_s$

ให้ $s,u \in R$

จาก $x(u) = x(s-s+u)$

$= h(s)x((-s)+u)$ (จากสมการที่ (4.5))

$= h(s)h(-s)x(u)$ (จากสมการที่ (4.5))

$x(u) = h(-s)^{-1}h(s)^{-1}x(u)$

จะได้ว่า $h(-s)^{-1}h(s)^{-1} \in G_{x(u)}$ สำหรับทุก ๆ $u \in R$

นั่นคือ $h(-s)^{-1}h(s)^{-1} \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$

ดังนั้นมี $g_s \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$ ที่ซึ่ง $h(-s)^{-1}h(s)^{-1} = g_s$

ดังนั้น $h(s)^{-1} = h(-s)g_s$

ต่อไปจะแสดงว่า $\left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i}\right) N \left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i}\right)^{-1} \leq N$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ $r_i \in R$ และ $j_i \in \{-1, 1\}$ โดยใช้การอุปนัยทางคณิตศาสตร์บน n

ให้ $g \in N$

$n=1$, ให้ $r \in R$ จะแสดงว่า $h(r)g\,h(r)^{-1} \in N$

จะมี $g_r \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$ ที่ทำให้ $h(r)^{-1} = h(-r)g_r$

จาก $h(r)g\,h(r)^{-1}x(u) = h(r)gh(-r)g_r x(u)$

$= h(r)gh(-r)x(u)$

$= h(r)gx(-r+u)$ (จากสมการที่ (4.5))

$= h(r)x(-r+u)$ (เพราะว่า $g \in N$)

$= x(r-r+u)$ (จากสมการที่ (4.5))

$= x(u)$

จะได้ว่า $h(r)g\,h(r)^{-1} \in G_{x(u)}$ สำหรับทุกๆ $u \in R$

นั่นคือ $h(r)g\,h(r)^{-1} \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$

เนื่องจาก $h(r) \in H$ และ $g \in H$ จะได้ว่า $h(r)g\,h(r)^{-1} \in H$

ดังนั้น $h(r)g\,h(r)^{-1} \in N$

ต่อไปจะแสดงว่า $h(r)^{-1} g\,h(r) \in N$

จะมี $g_r \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$ ที่ทำให้ $h(r)^{-1} = h(-r)g_r$

จาก $h(r)^{-1} g\,h(r)x(u) = h(-r)g_r gh(r)x(u)$

$= h(-r)g_r gx(r+u)$ (จากสมการที่ (4.5))

$= h(-r)x(r+u)$

$$= \; x(-r+r+u) \qquad \text{(จากสมการที่ (4.5))}$$
$$= \; x(u)$$

จะได้ว่า $h(r)^{-1} g\, h(r) \in G_{x(u)}$ สำหรับทุก ๆ $u \in R$

นั่นคือ $h(r)^{-1} g\, h(r) \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$

เนื่องจาก $g \in H$ และ $h(r) \in H$ จะได้ว่า $h(r)^{-1} g\, h(r) \in H$

ดังนั้น $h(r)^{-1} g\, h(r) \in N$

ดังนั้น $h(r)^{j} g\, h(r)^{-j} \in N$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ $r \in R$ $j \in \{-1,1\}$

สมมติให้ $\left(\prod_{i=1}^{k} h(r_i)^{j_i}\right) g \left(\prod_{i=1}^{k} h(r_i)^{j_i}\right)^{-1} \in N$ สำหรับทุก ๆ $g \in N$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.1 ได้ว่า $\left(\prod_{i=1}^{k+1} h(r_i)^{j_i}\right) g \left(\prod_{i=1}^{k+1} h(r_i)^{j_i}\right)^{-1} \in N$

จากการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ได้ว่า $\left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i}\right) g \left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i}\right)^{-1} \in N$ สำหรับทุกๆ $g \in N$

ดังนั้น $\left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i}\right) N \left(\prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i}\right)^{-1} \le N$

นั่นคือ $N \lhd H$

ให้ $x_0 = x(0)$ ดังนั้น $x_0 \in X$

ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.1 ได้ว่า $N \le G_{x_0}$

ให้ $\Psi : R \to H/N$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $\Psi(r) = h(r)N$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

ต่อไปจะแสดงว่า $\Psi : R \to H/N$ เป็นสาทิสสัณฐาน

ให้ $s, t, u \in R$

จากสมการ $h(s+t)x(u) = x(s+t+u) = h(s)h(t)x(u)$

ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.3 จะได้ว่า $\Psi : R \to H/N$ เป็นสาทิสสัณฐาน

ต่อไปจะแสดงว่า $\Psi(s)\Psi(t) = \Psi(t)\Psi(s)$ สำหรับทุก ๆ $s, t \in R$

จากสมการ $h(s)h(t)x(u) = h(s+t)x(u) = h(t+s)x(u) = h(t)h(s)x(u)$

ดังนั้น $(h(t)h(s))^{-1} h(s)h(t)x(u) = x(u)$

ได้ว่า $(h(t)h(s))^{-1} h(s)h(t) \in G_{x(u)}$ สำหรับทุก ๆ $u \in R$

นั่นคือ $(h(t)h(s))^{-1} h(s)h(t) \in \bigcap_{u\in R} G_{x(u)}$

เนื่องจาก $(h(t)h(s))^{-1} h(s)h(t) \in H$ จะได้ว่า $(h(t)h(s))^{-1} h(s)h(t) \in N$

ดังนั้น $h(s)h(t)N = h(t)h(s)N$

$$\Psi(s)\Psi(t) = h(s)Nh(t)N = h(s)h(t)N = h(t)h(s)N = h(t)Nh(s)N$$
$$= \Psi(t)\Psi(s)$$

นั่นคือ $\Psi(s)\Psi(t) = \Psi(t)\Psi(s)$ สำหรับทุกๆ $s,t \in R$

ให้ H/N กระทำบน $H(x_0)$ มีนิยามคือ

$$(hN)\cdot(kx_0) = (hk)x_0 \text{ สำหรับทุก ๆ } h,k \in H$$

พิสูจน์เช่นเดียวกับทฤษฎีบท 4.1 ได้ว่า H/N กระทำบน $H(x_0)$ เป็นฟังก์ชัน

เห็นได้ชัดว่า $h(r) \in h(r)N = \Psi(r)$ สำหรับทุกๆ $r \in R$ และได้ว่า

$$\Psi(r)x_0 = (h(r)N)\cdot x_0 = (h(r)N)\cdot(1x_0) = (h(r)1)x_0 = h(r)x_0$$
$$= h(r)x(0) = x(0+r) = x(r)$$

$(\Leftarrow)$ ให้ $H \le G$ $N \triangleleft H$ โดยที่ $N \le G_{x_0}$ เมื่อ $x_0 \in X$ ฟังก์ชัน $\Psi : R \to H/N$ เป็นสาทิสสัณฐาน $\Psi(s)\Psi(t) = \Psi(t)\Psi(s)$ สำหรับทุก ๆ $s,t \in R$ $x(r) = \Psi(r)x_0$ และ $h(r) \in \Psi(r)$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$ โดยที่ H/N กระทำบน $H(x_0)$ มีนิยามคือ $(hN)\cdot(kx_0) = (hk)x_0$ สำหรับทุก ๆ $h,k \in H$

ให้ $s,u \in R$

$$h(s)x(u) = h(s)\Psi(u)x_0 = (\Psi(s)\Psi(u))x_0$$
$$= \Psi(s+u)x_0 = x(s+u)$$

ดังนั้น $h(s)x(u) = x(s+u)$ สำหรับทุกๆ $s,u \in R$

$$h(s+t)x(u) = \Psi(s+t)x(u) = \Psi(s)\Psi(t)x(u) = \Psi(t)\Psi(s)x(u)$$
$$= \Psi(t+s)x(u) = h(t+s)x(u)$$

นั่นคือ $h(s+t)x(u) = h(t+s)x(u)$ สำหรับทุกๆ $s,t \in R$ #

ทฤษฎีบท 4.10 ให้ X เป็นเซต R เป็นกรุปภายใต้การบวก G เป็นกรุปภายใต้การคูณ โดยที่ G กระทำบน X และมี 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G และให้ $x:R \to X$ เป็นฟังก์ชันจะได้ว่ามีฟังก์ชัน $h:R \to G$ มีสมบัติที่ว่า

1) $h(0) = 1$

2) $h(s)x(u) = x(s+u)$ สำหรับทุก ๆ $s,u \in R$ และ

3) $h(s+t)x(u) = h(t+s)x(u)$ สำหรับทุก ๆ $s,t,u \in R$

ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $g:R \to G$ มีสมบัติว่า $g(s+t)x(u) = g(t)x(s+u)$ เมื่อ $s,t,u \in R$

พิสูจน์ กำหนดให้ X เป็นเซต R เป็นกรุปภายใต้การบวก G เป็นกรุปภายใต้การคูณ โดยที่ G กระทำบน X และมี 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G และให้ $x:R \to X$ เป็นฟังก์ชัน

$(\Rightarrow)$ สมมติว่ามีฟังก์ชัน $h:R \to G$ ซึ่งมีสมบัติคือ

1) $h(0) = 1$

2) $h(s)x(u) = x(s+u)$ สำหรับทุก ๆ $s,u \in R$ และ

3) $h(s+t)x(u) = h(t+s)x(u)$ สำหรับทุก ๆ $s,t,u \in R$

ให้ $g:R \to G$ เป็นฟังก์ชันมีนิยามโดย $g(r) = g_0 h(r)$ เมื่อ $r \in R$ และ $g_0 \in G$

ให้ $s,t,u \in R$

$$\begin{aligned} g(s+t)x(u) &= g_0 h(s+t)x(u) = g_0 h(t+s)x(u) \\ &= g_0 x(t+s+u) \\ &= g_0 h(t)x(s+u) \\ &= g(t)x(s+u) \end{aligned}$$

ดังนั้น $g(s+t)x(u) = g(t)x(s+u)$ เมื่อ $s,t,u \in R$

($\Leftarrow$) สมมติว่ามี $x:R \to X$ และฟังก์ชัน $g:R \to G$ สอดคล้องกับสมการ $g(s+t)x(u) = g(t)x(s+u)$ เมื่อ $s,t,u \in R$

ให้ $h:R \to G$ เป็นฟังก์ชันมีนิยามโดย $h(r) = g(0)^{-1} g(r)$ เมื่อ $r \in R$

ดังนั้น $h(0) = g(0)^{-1} g(0) = 1$

ให้ $s,u \in R$

$$\begin{aligned} h(s)x(u) &= g(0)^{-1} g(s)x(u) = g(0)^{-1} g(s+0)x(u) \\ &= g(0)^{-1} g(0)x(s+u) = x(s+u) \end{aligned}$$

ดังนั้น $h(s)x(u) = x(s+u)$ สำหรับทุกๆ $s,u \in R$

$$\begin{aligned} h(s+t)x(u) &= g(0)^{-1} g(s+t)x(u) = g(0)^{-1} g(t)x(s+u) \\ &= g(0)^{-1} g(t+0)x(s+u) = g(0)^{-1} g(0)x(t+s+u) \\ &= x((t+s)+u) = h(t+s)x(u) \end{aligned}$$

ดังนั้น $h(s+t)x(u) = h(t+s)x(u)$ สำหรับทุก ๆ $s,t,u \in R$ #

สมการเชิงฟังก์ชัน $g(s+t)x(u) = g(s)x(u+t)$ สำหรับทุก ๆ $s,t,u \in R$

ในลำดับแรกพิจารณาฟังก์ชัน $h:R \to G$ โดยที่ $h(0) = 1$ และมีสมบัติดังต่อไปนี้ $h(s)x(u) = x(u+s)$ และ $h(s+t)x(u) = h(t+s)x(u)$ สำหรับทุก ๆ $s,t,u \in R$

ทฤษฎีบท 4.11 ให้ X เป็นเซต R เป็นกรุปภายใต้การบวก G เป็นกรุปภายใต้การคูณ โดยที่ G กระทำบน X และมี 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G และให้ $x:R \to X$ และ $h:R \to G$ เป็นฟังก์ชันโดยที่ $h(0) = 1$ จะได้ว่าฟังก์ชัน x และฟังก์ชัน h สอดคล้องกับสมการ

1) $h(s)x(u) = x(u+s)$ สำหรับทุกๆ $s,u \in R$ และ (4.6)

2) $h(s+t)x(u) = h(t+s)x(u)$ สำหรับทุกๆ $s,t,u \in R$

ก็ต่อเมื่อ 1) มี $H \leq G$

2) มี $N \triangleleft H$ โดยที่ $N \leq G_{x_0}$ สำหรับบาง $x_0 \in X$

3) มีฟังก์ชัน $\Psi : R \to H/N$ ซึ่งมีสมบัติดังนี้

3.1) Ψ เป็นสาทิสสัณฐาน

3.2) $\Psi(s)\Psi(t) = \Psi(t)\Psi(s)$ สำหรับทุก ๆ $s,t \in R$

3.3) $x(r) = \Psi(r)x_0$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

3.4) $h(r) \in \Psi(r)$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

โดยที่ H/N กระทำบน $H(x_0)$ มีนิยามคือ $(hN)\cdot(kx_0) = (hk)x_0$ สำหรับทุก ๆ $h,k \in H$

พิสูจน์ กำหนดให้ X เป็นเซต R เป็นกรุปภายใต้การบวก G เป็นกรุปภายใต้การคูณ โดยที่ G กระทำบน X และมี 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G

ให้ $x:R \to X$ และ $h:R \to G$ เป็นฟังก์ชันโดยที่ $h(0)=1$

$(\Rightarrow)$ ให้ฟังก์ชัน $x:R \to X$ และฟังก์ชัน $h:R \to G$ สอดคล้องกับสมการ $h(s)x(u) = x(u+s)$ สำหรับทุกๆ $s,u \in R$ และ $h(s+t)x(u) = h(t+s)x(u)$ สำหรับทุก ๆ $s,t,u \in R$

ให้ $H = \left\{ \prod_{i=1}^{n} h(r_i)^{j_i} \,\middle|\, n \text{ เป็นจำนวนนับ}, r_i \in R, j_i \in \{1,-1\}, i=1,2,\ldots,n \right\}$

จากนิยาม H จะได้ว่า $H \subseteq G$

ให้ $N = \left(\bigcap_{u \in R} G_{x(u)} \right) \cap H$

ให้ $x_0 = x(0)$ ดังนั้น $x_0 \in X$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่า $H \leq G$ $N \triangleleft H$ และ $N \leq G_{x_0}$

ให้ $\Psi : R \to H/N$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $\Psi(r) = h(r)N$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

ต่อไปจะแสดงว่า $\Psi : R \to H/N$ เป็นสาทิสสัณฐาน

ให้ $s,t,u \in R$

จากสมการ $h(s+t)x(u) = h(t+s)x(u) = x(u+t+s) = h(s)h(t)x(u)$

ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.3 จะได้ว่า $\Psi : R \to H/N$ เป็นสาทิสสัณฐาน

ต่อไปจะแสดงว่า $\Psi(s)\Psi(t) = \Psi(t)\Psi(s)$ สำหรับทุก ๆ $s,t \in R$

จากสมการ $h(s)h(t)x(u) = h(s+t)x(u) = x(u+s+t) = h(t)h(s)x(u)$

ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.9 จะได้ $\Psi(s)\Psi(t) = \Psi(t)\Psi(s)$ สำหรับทุก ๆ $s,t \in R$

ให้ H/N กระทำบน $H(x_0)$ มีนิยามคือ

$(hN)\cdot(kx_0) = (hk)x_0$ สำหรับทุก ๆ $h,k \in H$

พิสูจน์เช่นเดียวกับทฤษฎีบท 4.1 ได้ว่า H/N กระทำบน $H(x_0)$ เป็นฟังก์ชัน

เห็นได้ชัดว่า $h(r) \in h(r)N = \Psi(r)$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$

ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.1 จะได้ $\Psi(r)x_0 = x(r)$

$(\Leftarrow)$ ให้ $H \le G$ $N \triangleleft H$ โดยที่ $N \le G_{x_0}$ เมื่อ $x_0 \in X$ ฟังก์ชัน $\Psi: R \to H/N$ เป็นสาทิสสัณฐาน $\Psi(s)\Psi(t) = \Psi(t)\Psi(s)$ สำหรับทุก ๆ $s,t \in R$ $x(r) = \Psi(r)x_0$ และ $h(r) \in \Psi(r)$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$ โดยที่ H/N กระทำบน $H(x_0)$ มีนิยามคือ $(hN)\cdot(kx_0) = (hk)x_0$ สำหรับทุก ๆ $h,k \in H$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.1 และ 4.9 จะได้ $h(s)x(u) = x(u+s)$ และ $h(s+t)x(u) = h(t+s)x(u)$ สำหรับทุก ๆ $s,t,u \in R$ ตามลำดับ #

ทฤษฎีบท 4.12 ให้ X เป็นเซต R เป็นกรุปภายใต้การบวก G เป็นกรุปภายใต้การคูณ โดยที่ G กระทำบน X และมี 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G และให้ $x: R \to X$ เป็นฟังก์ชันจะได้ว่ามีฟังก์ชัน $h: R \to G$ มีสมบัติที่ว่า

1) $h(0) = 1$

2) $h(s)x(u) = x(u+s)$ สำหรับทุก ๆ $s,u \in R$ และ

3) $h(s+t)x(u) = h(t+s)x(u)$ สำหรับทุก ๆ $s,t,u \in R$

ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $g: R \to G$ มีสมบัติว่า $g(s+t)x(u) = g(s)x(u+t)$ เมื่อ $s,t,u \in R$

พิสูจน์ กำหนดให้ X เป็นเซต R เป็นกรุปภายใต้การบวก G เป็นกรุปภายใต้การคูณ โดยที่ G กระทำบน X และมี 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G และให้ $x: R \to X$ เป็นฟังก์ชัน

$(\Rightarrow)$ สมมติว่ามีฟังก์ชัน $h: R \to G$ ซึ่งมีสมบัติคือ

1) $h(0) = 1$

2) $h(s)x(u) = x(u+s)$ สำหรับทุก ๆ $s,u \in R$ และ

3) $h(s+t)x(u) = h(t+s)x(u)$ สำหรับทุก ๆ $s,t,u \in R$

ให้ $g: R \to G$ เป็นฟังก์ชันมีนิยามโดย $g(r) = g_0 h(r)$ เมื่อ $r \in R$ และ $g_0 \in G$

ให้ $s,t,u \in R$

$$
\begin{aligned}
g(s+t)x(u) &= g_0 h(s+t)x(u) &&= g_0 h(t+s)x(u) \\
&= g_0 x(u+t+s) &&= g_0 h(s)x(u+t)
\end{aligned}
$$

$$= \quad g(s)x(u+t)$$

ดังนั้น $g(s+t)x(u) = g(s)x(u+t)$ เมื่อ $s,t,u \in R$

($\Leftarrow$) สมมติว่ามี $x:R \to X$ และฟังก์ชัน $g:R \to G$ สอดคล้องกับสมการ $g(s+t)x(u) = g(s)x(u+t)$ เมื่อ $s,t,u \in R$

ให้ $h:R \to G$ เป็นฟังก์ชันมีนิยามโดย $h(r) = g(0)^{-1}g(r)$ เมื่อ $r \in R$

ดังนั้น $h(0) = g(0)^{-1}g(0) = 1$

ให้ $s,u \in R$

$$\begin{aligned} h(s)x(u) &= g(0)^{-1}g(s)x(u) = g(0)^{-1}g(0+s)x(u) \\ &= g(0)^{-1}g(0)x(u+s) = x(u+s) \end{aligned}$$

ดังนั้น $h(s)x(u) = x(u+s)$ สำหรับทุก ๆ $s,u \in R$

$$\begin{aligned} h(s+t)x(u) &= g(0)^{-1}g(s+t)x(u) &&= g(0)^{-1}g(s)x(u+t) \\ &= g(0)^{-1}g(0+s)x(u+t) &&= g(0)^{-1}g(0)x(u+t+s) \\ &= x(u+(t+s)) &&= h(t+s)x(u) \end{aligned}$$

ดังนั้น $h(s+t)x(u) = h(t+s)x(u)$ สำหรับทุก ๆ $s,t,u \in R$ #