บทที่ 1
บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

มนุษย์สังเกตการณ์เคลื่อนที่ขึ้น - ตกของดวงอาทิตย์ในแต่ละวันเนื่องจากการหมุนรอบตัวเองของโลกมานานแล้วและอาศัยตำแหน่งของดวงอาทิตย์บนท้องฟ้าเป็นเครื่องบอกเวลาในช่วงกลางวันได้อย่างใกล้เคียง เรียกเวลาที่เปรียบเทียบกับดวงอาทิตย์ว่า "เวลาสุริยคติ (Solar Time)" ปัจจุบันเวลาของสุริยคติของวันหนึ่ง ๆ เริ่มต้นเมื่อดวงอาทิตย์อยู่ที่จุดต่ำสุดของท้องฟ้า (เวลาเที่ยงคืน) เป็นเวลา 0.00 นาฬิกา เวลาสุริยคติที่อาศัยการสังเกตของดวงอาทิตย์นั้นมีความคลาดเคลื่อนบ้าง เนื่องจากอัตราเร็วของการโคจรของโลกรอบดวงอาทิตย์ไม่สม่ำเสมอ บางช่วงเคลื่อนที่เร็ว บางช่วงเคลื่อนที่ช้า ทำให้ดวงอาทิตย์ที่เราสังเกตอยู่มีการเคลื่อนที่เร็วบ้างช้าบ้างไปด้วยและเนื่องจากโลกมีวงโคจรรอบดวงอาทิตย์เอียงทำมุม 23.5 องศากับระนาบเส้นศูนย์สูตรของโลก จึงกำหนดให้ดวงอาทิตย์ที่ใช้กำหนดเวลาสุริยคติมี 2 ชนิดคือ ดวงอาทิตย์ปรากฏ (Apparent Solar) และดวงอาทิตย์สมมติ (Mean Solar) ดวงอาทิตย์ปรากฏหมายถึงดวงอาทิตย์ที่สังเกตเห็นได้ประจำวันโดยไม่คำนึงถึงการเคลื่อนที่ที่ไม่สม่ำเสมอดังนั้นเวลาสุริยคติที่ใช้ดวงอาทิตย์ปรากฏเป็นหลักจึงเรียกว่า เวลาสุริยคติปรากฏ (Apparent Solar Time) หรือเวลาท้องถิ่นปรากฏ (Local Apparent Time) ส่วนดวงอาทิตย์สมมตินั้นเป็นดวงอาทิตย์ที่สมมติขึ้นเพื่อแก้ความคลาดเคลื่อนอันเนื่องมาจากการเคลื่อนที่ที่ไม่สม่ำเสมอของดวงอาทิตย์ปรากฏ กำหนดให้ดวงอาทิตย์สมมติหมายถึงดวงอาทิตย์ที่มีอัตราเร็วการเคลื่อนที่สม่ำเสมอ และระนาบวงโคจรรอบดวงอาทิตย์อยู่ในระนาบเดียวกับระนาบของเส้นศูนย์สูตร โดยใช้เวลาครบรอบ 1 ปี เท่ากับเวลาครบรอบของดวงอาทิตย์ปรากฏ โดยที่เวลาสุริยคติที่เปรียบเทียบกับดวงอาทิตย์สมมติเรียกว่า เวลาสุริยคติเฉลี่ย (Mean Solar Time) หรือเวลาท้องถิ่น (Local Civil Time)

ในปี ค.ศ. 1999 Harald Fripertinger และ Jens Schwaiger ได้แสดงเวลาสุริยคติเฉลี่ยว่าสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันดังนี้

$$M(\lambda+t,\phi)^{\mathrm{T}}\,y(s) \;=\; M(\lambda,\phi)^{\mathrm{T}}\,y(s+t) \quad \text{เมื่อ } s,t,\lambda \in R, \frac{-\pi}{2} \le \phi \le \frac{\pi}{2}$$

โดยที่ $y(s)$ เป็นเวคเตอร์หน่วยซึ่งบอกทิศทางจากจุดศูนย์กลางโลกไปยังดวงอาทิตย์ ณ เวลา s (1 วัน $= 2\pi$) และ $M(\lambda,\phi)$ เป็นเมทริกซ์ซึ่งนิยามโดย

$$M(\lambda,\phi) \quad = \quad \begin{bmatrix} -\sin\lambda & -\sin\phi\cos\lambda & \cos\phi\cos\lambda \\ \cos\lambda & -\sin\phi\sin\lambda & \cos\phi\sin\lambda \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $M(\lambda,\phi)y(s)$ จะเป็นทิศทางจากพื้นผิวโลกที่ลองติจูด λ และละติจูด ϕ ไปยังดวงอาทิตย์ในที่นี้จะให้ ϕ เป็นค่าคงที่

ต่อมาในปี ค.ศ. 2001 Harald Fripertinger ได้ศึกษาปัญหาข้างต้นในเชิงพีชคณิต ดังต่อไปนี้

กำหนดให้ G เป็นกรุปภายใต้การคูณกระทำบนเซต X และให้ R เป็นกรุปภายใต้การบวก ต้องการหาฟังก์ชัน $x:R\to X$ และฟังก์ชัน $g:R\to G$ ซึ่งค่าของฟังก์ชันทั้งสองสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$g(s+t)x(u) \;=\; g(s)x(t+u)$ สำหรับทุก ๆ $s,t,u\in R$

ในงานวิจัยนี้อาศัยแนวความคิดของ Harald Fripertinger ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงฟังก์ชันในรูปแบบต่อไปนี้

1. $g(s+t)x(u) \;=\; g(t)x(u+s)$ เมื่อ $s,t,u\in R$
2. $g(s+t)x(u) \;=\; g(s)x(u-t)$ เมื่อ $s,t,u\in R$
3. $g(s+t)x(u) \;=\; g(t)x(-s+u)$ เมื่อ $s,t,u\in R$
4. ให้ $a\in R$, $g(s+t)x(u) \;=\; g(s+a)x(t-a+u)$ เมื่อ $s,t,u\in R$
5. $g(s+t)x(u) \;=\; g(t)x(s+u)$ เมื่อ $s,t,u\in R$
6. $g(s+t)x(u) \;=\; g(s)x(u+t)$ เมื่อ $s,t,u\in R$

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงฟังก์ชันในรูปแบบต่อไปนี้

1. $g(s+t)x(u) \;=\; g(t)x(u+s)$ เมื่อ $s,t,u\in R$
2. $g(s+t)x(u) \;=\; g(s)x(u-t)$ เมื่อ $s,t,u\in R$
3. $g(s+t)x(u) \;=\; g(t)x(-s+u)$ เมื่อ $s,t,u\in R$
4. ให้ $a\in R$, $g(s+t)x(u) \;=\; g(s+a)x(t-a+u)$ เมื่อ $s,t,u\in R$
5. $g(s+t)x(u) \;=\; g(t)x(s+u)$ เมื่อ $s,t,u\in R$
6. $g(s+t)x(u) \;=\; g(s)x(u+t)$ เมื่อ $s,t,u\in R$

โดยอาศัยแนวคิดเกี่ยวกับการกระทำบนกรุป (Group Action)

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้วิธีการหนึ่งของการหาผลเฉลยเชิงฟังก์ชันโดยอาศัยการกระทำบนกรุป
2. เป็นแนวทางการทำวิจัยทางคณิตศาสตร์ขั้นสูงต่อไป

ขอบเขตของการวิจัย

พิจารณาสมการเชิงฟังก์ชันบนกรุป