

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การหาผลเฉลยสมการเคตีวีปรับปรุง (MKdV) และสมการเคตีวีประกอบ (compound KdV) โดยวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. ศึกษาวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์
2. เลือกสมการที่ต้องการหาผลเฉลย คือ สมการเคตีวีปรับปรุง และสมการเคตีวีประกอบ
3. ใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์หาผลเฉลยสมการเคตีวีปรับปรุง และสมการเคตีวีประกอบ

วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์

1. พิจารณารูปแบบทั่วไปของสมการไม่เชิงเส้น

$$P(u, u_x, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (3.1)$$

2. กำหนดตัวแปรคลื่น $\xi = \alpha(x - \beta t)$ จะได้

$$u(x, t) = U(\xi) \quad (3.2)$$

โดยที่คำตอบคลื่น $U(\xi)$ นั้นเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว β แปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (3.1) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$P(U, U', U'', \dots) = 0 \quad (3.3)$$

3. ถ้าทุกพจน์ของผลลัพธ์ในสมการเชิงอนุพันธ์มีอนุพันธ์ของ ξ ให้อินทิเกรตสมการ (3.3) และกำหนดให้ค่าคงที่ของการอินทิเกรตเป็นศูนย์ แล้วจัดรูปสมการ

4. กำหนดตัวแปรอิสระใหม่คือ

$$Y = \operatorname{sech}(\xi) \quad (3.4)$$

แล้วทำการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอันดับต่าง ๆ

5. กำหนดให้

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^M a_k Y^k \quad (3.5)$$

6. หาค่าพารามิเตอร์ M จากการนำพจน์เชิงเส้นที่มีอนุพันธ์อันดับสูงสุดของผลลัพธ์เปรียบเทียบกับอันดับสูงสุดในพจน์ไม่เชิงเส้น โดยการเทียบสัมประสิทธิ์กำลังของ Y ในสมการของผลลัพธ์ โดยใช้ M นี้กับสมการ (3.5) จะทำให้เราได้คำตอบวิเคราะห์ที่อยู่ในรูปแบบปิด

สมการเคดีวีปรับปรุงและสมการเคดีวีประกอบ

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นที่เราต้องการหาผลเฉลยในงานวิจัยฉบับนี้ คือ สมการเคดีวีปรับปรุง (MKdV) มีรูปแบบ

$$u_t + qu^2 u_x + ru_{xxx} = 0 \quad (3.6)$$

และสมการเคดีวีประกอบ (compound KdV) มีรูปแบบ

$$u_t + puu_x + qu^2 u_x + ru_{xxx} = 0 \quad (3.7)$$

การหาผลเฉลยโดยวิธีไฮเพอร์โบลิคเซแคนต์

สมการเคดีวีประกอบ

พิจารณารูปแบบทั่วไปของสมการเคดีวีประกอบ (3.7) และกำหนดตัวแปรคลื่น $\xi = \alpha(x - \beta t)$ จะได้

$$u(x, t) = U(\xi) \quad (3.8)$$

โดยเราจะเขียนแทน $u(x, t)$ ด้วยสัญลักษณ์ u และ $U(\xi)$ ด้วยสัญลักษณ์ U

หาอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$\frac{du}{dt} = -\alpha\beta \frac{dU}{d\xi}$$

$$\frac{du}{dx} = \alpha \frac{dU}{d\xi}$$

(3.9)

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \alpha^2 \frac{d^2U}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = \alpha^3 \frac{d^3U}{d\xi^3}$$

สำหรับอนุพันธ์อันดับอื่น ๆ ก็สามารถคำนวณหาได้ในทำนองเดียวกัน
แทนค่าอนุพันธ์ (3.9) ในสมการ (3.7) จะได้

$$-\alpha\beta \frac{dU}{d\xi} + \alpha p U \frac{dU}{d\xi} + \alpha q U^2 \frac{dU}{d\xi} + \alpha^3 r \frac{d^3U}{d\xi^3} = 0 \quad (3.10)$$

หารสมการ (3.10) ด้วย α ตลอดสมการจะได้

$$-\beta \frac{dU}{d\xi} + p U \frac{dU}{d\xi} + q U^2 \frac{dU}{d\xi} + \alpha^2 r \frac{d^3U}{d\xi^3} = 0 \quad (3.11)$$

อินทิเกรตสมการ (3.11) เทียบ ξ และกำหนดให้ค่าคงที่การอินทิเกรตเป็นศูนย์จะได้

$$-\beta U + \frac{p}{2} U^2 + \frac{q}{3} U^3 + \alpha^2 r \frac{d^2U}{d\xi^2} = 0 \quad (3.12)$$

กำหนดให้

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^M a_k Y^k \quad (3.13)$$

เมื่อ M เป็นจำนวนเต็มบวก และเขียน $S(Y)$ แทนด้วยสัญลักษณ์ S จากนั้นกำหนดตัวแปรอิสระใหม่ คือ

$$Y = \sec h(\xi) \quad (3.14)$$

หาอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{dU}{d\xi} = -Y\sqrt{1-Y^2} \frac{dS}{dY} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2U}{d\xi^2} &= -Y\sqrt{1-Y^2} \left(-\sqrt{1-Y^2} \frac{dS}{dY} + \frac{Y^2}{\sqrt{1-Y^2}} \frac{d^2S}{dY^2} - Y\sqrt{1-Y^2} \frac{d^2S}{dY^2} \right) \\ &= (Y - 2Y^3) \frac{dS}{dY} + (Y^2 - Y^4) \frac{d^2S}{dY^2} \end{aligned}$$

แทนค่า (3.13) และ (3.15) ในสมการ (3.12) จะได้

$$-\beta S + \frac{p}{2} S^2 + \frac{q}{3} S^3 + \alpha^2 r \left[(Y - 2Y^3) \frac{dS}{dY} + (Y^2 - Y^4) \frac{d^2S}{dY^2} \right] = 0 \quad (3.16)$$

จาก (3.16) นำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นที่มีอนุพันธ์อันดับสูงสุด คือ $\alpha^2 r Y^4 \frac{d^2S}{dY^2}$ และพจน์ที่ไม่เชิงเส้นที่มีอันดับสูงสุด คือ $\frac{q}{3} S^3$ มาเปรียบเทียบกับเลขชี้กำลังเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ M ได้โดยการกระจายอนุกรม $S(Y)$ ในสมการ (3.13) และหาอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$S(Y) = \sum_{k=0}^M a_k Y^k = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 + \dots + a_M Y^M$$

$$\frac{dS}{dY} = \sum_{k=0}^M k a_k Y^{k-1} = a_1 + 2a_2 Y + 3a_3 Y^2 + \dots + M a_M Y^{M-1}$$

$$\frac{d^2 S}{dY^2} = \sum_{k=0}^M k(k-1)a_k Y^{k-2} = 2a_2 + 6a_3 Y + \dots + M(M-1)a_M Y^{M-2} \quad (3.17)$$

ดังนั้นจะได้

$$\frac{q}{3} S^3 = \frac{q}{3} \left(\sum_{k=0}^M a_k Y^k \right)^3 = \frac{q}{3} (a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 + \dots + a_M Y^M)^3 \quad (3.18)$$

และ

$$\begin{aligned} \alpha^2 r Y^4 \frac{d^2 S}{dY^2} &= \alpha^2 r Y^4 \sum_{k=0}^M k(k-1)a_k Y^{k-2} \\ &= \alpha^2 r Y^4 (2a_2 + 6a_3 Y + \dots + M(M-1)a_M Y^{M-2}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

เทียบเลขชี้กำลัง Y^{3M} ในสมการ (3.18) และ Y^{4+M-2} ในสมการ (3.19) จะได้

$$3M = 4 + M - 2$$

$$M = 1$$

แทนค่า $M=1$ ในสมการ (3.13) จะได้

$$S(Y) = a_0 + a_1 Y \quad (3.20)$$

และ

$$\frac{dS}{dY} = a_1 \quad (3.21)$$

$$\frac{d^2 S}{dY^2} = 0$$

แทนค่า (3.20) และ (3.21) ในสมการ (3.16) จะได้สมการวิเคราะห์ในรูปแบบปิดดังนี้

$$\begin{aligned}
& -\beta(a_0 + a_1 Y) + \frac{p}{2}(a_0 + a_1 Y)^2 + \frac{q}{3}(a_0 + a_1 Y)^3 \\
& + \alpha^2 r[(Y - 2Y^3)(a_1) + (Y^2 - Y^4)(0)] = 0
\end{aligned}$$

จัดรูปสมการใหม่

$$\begin{aligned}
& (-6\beta a_0 + 3pa_0^2 + 2qa_0^3) + (-6\beta a_1 + 6pa_0 a_1 + 6qa_0^2 a_1 + 6r\alpha^2 a_1)Y \\
& + (3pa_1^2 + 6qa_0 a_1^2)Y^2 + (2qa_1^3 - 2r\alpha^2 a_1)Y^3 = 0
\end{aligned} \quad (3.22)$$

เทียบสัมประสิทธิ์แต่ละเลขชี้กำลังของ Y จะได้

$$\begin{aligned}
Y^0 & \quad ; \quad -6\beta a_0 + 3pa_0^2 + 2qa_0^3 = 0, \\
Y^1 & \quad ; \quad -6\beta a_1 + 6pa_0 a_1 + 6qa_0^2 a_1 + 6r\alpha^2 a_1 = 0, \\
Y^2 & \quad ; \quad 3pa_1^2 + 6qa_0 a_1^2 = 0, \\
Y^3 & \quad ; \quad 2qa_1^3 - 2r\alpha^2 a_1 = 0
\end{aligned} \quad (3.23)$$

แก้ระบบสมการ (3.23) จะได้

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\frac{p}{2q}, \quad a_1 = \frac{\sqrt{5}p}{q}, \quad \beta = \frac{p^2}{3q}, \quad \alpha = p\sqrt{\frac{5}{qr}} \\
a_0 &= -\frac{p}{2q}, \quad a_1 = -\frac{\sqrt{5}p}{q}, \quad \beta = \frac{p^2}{3q}, \quad \alpha = p\sqrt{\frac{5}{qr}} \\
a_0 &= -\frac{p}{2q}, \quad a_1 = \frac{\sqrt{5}p}{q}, \quad \beta = \frac{p^2}{3q}, \quad \alpha = -p\sqrt{\frac{5}{qr}} \\
a_0 &= -\frac{p}{2q}, \quad a_1 = -\frac{\sqrt{5}p}{q}, \quad \beta = \frac{p^2}{3q}, \quad \alpha = -p\sqrt{\frac{5}{qr}}
\end{aligned} \quad (3.24)$$

แทนค่า (3.24) ในสมการ (3.20) โดยเงื่อนไข

$$Y = \sec h(\xi)$$

และ

$$\xi = \alpha(x - \beta t)$$

จะได้ผลเฉลย ดังนี้

$$u_1(x, t) = -\frac{p}{2q} + \frac{\sqrt{5}p}{q} \sec h\left(p\sqrt{\frac{5}{qr}}\left(x - \frac{p^2}{3q}t\right)\right)$$

$$u_2(x, t) = -\frac{p}{2q} + \frac{\sqrt{5}p}{q} \sec h\left(-p\sqrt{\frac{5}{qr}}\left(x - \frac{p^2}{3q}t\right)\right)$$

$$u_3(x, t) = -\frac{p}{2q} - \frac{\sqrt{5}p}{q} \sec h\left(p\sqrt{\frac{5}{qr}}\left(x - \frac{p^2}{3q}t\right)\right)$$

และ

$$u_4(x, t) = -\frac{p}{2q} - \frac{\sqrt{5}p}{q} \sec h\left(-p\sqrt{\frac{5}{qr}}\left(x - \frac{p^2}{3q}t\right)\right)$$

สมการเคตีวีปรับปรุง

พิจารณาสมการเคตีประกอบ (3.6) เมื่อกำหนด $p=0$ จะเปลี่ยนรูปแบบเป็นสมการเคตีวีปรับปรุง (3.7) ดังนั้น ในทำนองเดียวกันสมการ (3.11) จะเปลี่ยนเป็น

$$-\beta \frac{dU}{d\xi} + qU^2 \frac{dU}{d\xi} + \alpha^2 r \frac{d^3U}{d\xi^3} = 0 \quad (3.25)$$

อินทิเกรตสมการ (3.25) เทียบ ξ และกำหนดให้ค่าคงที่การอินทิเกรตเป็นศูนย์จะได้

$$-\beta U + \frac{q}{3} U^3 + \alpha^2 r \frac{d^2U}{d\xi^2} = 0 \quad (3.26)$$

แทนค่าสมการ (3.13) และ (3.15) ใน (3.26) จะได้

$$-\beta S + \frac{q}{3} S^3 + \alpha^2 r \left[(Y - 2Y^3) \frac{dS}{dY} + (Y^2 - Y^4) \frac{d^2 S}{dY^2} \right] = 0 \quad (3.27)$$

ในสมการ (3.27) พิจารณาค่าพารามิเตอร์ M โดยการเทียบเลขชี้กำลังของพจน์ Y^{4+Mf-2} และ Y^{3Mf} ที่ปรากฏในเทอม $\alpha^2 r Y^4 \frac{d^2 S}{dY^2}$ และ $\frac{q}{3} S^3$ จากการกระจายอนุกรม (3.17) ตามลำดับ สามารถคำนวณหาค่าได้

$$M=1$$

แทนค่า $M=1$ ใน (3.13) จะได้

$$S(Y) = a_0 + a_1 Y \quad (3.28)$$

จากนั้นหาอนุพันธ์เทียบ Y

$$\frac{dS}{dY} = a_1$$

และ

$$\frac{d^2 S}{dY^2} = 0$$

แทนค่า $S(Y)$, $\frac{dS}{dY}$ และ $\frac{d^2 S}{dY^2}$ ในสมการ (3.27) ทำให้เราได้สมการวิเคราะห์ในรูปแบบปิด ดังนี้

$$-\beta(a_0 + a_1 Y) + \frac{q}{3}(a_0 + a_1 Y)^3 + \alpha^2 r [(Y - 2Y^3)(a_1) + (Y^2 - Y^4)(0)] = 0$$

จัดรูปสมการใหม่

$$\begin{aligned}
 &(-3\beta a_0 + qa_0^3) + (-3\beta a_1 + 3qa_0^2 a_1 + 3r\alpha^2 a_1)Y \\
 &+ (3qa_0 a_1^2)Y^2 + (qa_1^3 - r\alpha^2 a_1)Y^3 = 0
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

เทียบสัมประสิทธิ์แต่ละเลขชี้กำลังของ Y จะได้

$$\begin{aligned}
 Y^0 & \quad ; \quad -3\beta a_0 + qa_0^3 = 0, \\
 Y^1 & \quad ; \quad -3\beta a_1 + 3qa_0^2 a_1 + 3r\alpha^2 a_1 = 0, \\
 Y^2 & \quad ; \quad 3qa_0 a_1^2 = 0, \\
 Y^3 & \quad ; \quad qa_1^3 - r\alpha^2 a_1 = 0
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

แก้ระบบสมการ (3.30) จะได้

$$\begin{aligned}
 a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = \alpha \sqrt{\frac{r}{q}} \quad , \quad \beta = \alpha^2 r \\
 a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = -\alpha \sqrt{\frac{r}{q}} \quad , \quad \beta = -\alpha^2 r
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

แทนค่า (3.31) ในสมการ (3.28) จะได้ผลเฉลย

$$u_1(x, t) = \alpha \sqrt{\frac{r}{q}} \operatorname{sech}(\alpha x - \alpha^3 r t)$$

และ

$$u_2(x, t) = -\alpha \sqrt{\frac{r}{q}} \operatorname{sech}(\alpha x + \alpha^3 r t)$$