

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่ใช้ในงานวิจัยนี้ที่ประกอบไปด้วยบทนิยามและแนวคิดรวมทั้งงานวิจัยต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย และวิธีไฮเพอร์โบลิคเซแคนต์ ซึ่งเป็นส่วนประกอบสำคัญสำหรับงานวิจัยนี้อย่างมาก

ความรู้พื้นฐาน

วรรณทนา ภาณุพันธุ์ (2549) ปัญหาต่าง ๆ ที่เราพบในชีวิตประจำวันนั้นสามารถพิจารณาเป็นสมการคณิตศาสตร์ ที่อยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน อัตราการเพิ่มของประชากร ปัญหาของการนำความร้อนในแท่งโลหะ หรือแผ่นโลหะ การหาปะจุหรือกระแสในวงจรไฟฟ้า การสั้นของเส้นลวด อัตราการสลายตัวของกัมมันตภาพรังสี เป็นต้น จะเห็นว่าสมการเชิงอนุพันธ์นั้น เป็นพื้นฐานที่สำคัญทั้งในสาขาคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์ เพราะว่ากฎเกณฑ์และปัญหาต่าง ๆ ในสาขาวิชาเหล่านี้ล้วนพิจารณาเป็นสมการคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ทั้งสิ้น

นิยาม 2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation) หมายถึง สมการที่มีอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่า (unknown function) รวมอยู่ด้วย ซึ่งอนุพันธ์ที่ปรากฏจะมีเพียงหนึ่งหรือมากกว่าก็ได้ แบ่งได้เป็น 2 ประเภท คือ

1. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation)
2. สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation)

นิยาม 2.2 สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีฟังก์ชันไม่ทราบค่าของตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation)

นิยาม 2.3 สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีฟังก์ชันไม่ทราบค่าของตัวแปรอิสระมากกว่าหนึ่งตัวแปร เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation)

สำหรับในงานวิจัยฉบับนี้เรามุ่งเน้นที่การศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ซึ่งเป็นสมการที่มีตัวแปรอิสระหลายตัว โดยแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ สมการอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นและสมการอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น มีรูปแบบ และการเขียนสัญลักษณ์ ดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม 2.4 ให้ u เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ n ตัว $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ อนุพันธ์ของ u เทียบกับ x_i เขียนสัญลักษณ์

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{หรือ} \quad u_{x_i}$$

กำหนดค่าดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - u(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$$

ถ้าลิมิตทางขวามีค่าเกิดขึ้น

จากนิยามจะเห็นว่า อนุพันธ์ย่อยเป็นค่าลิมิต เมื่อตัวแปรอิสระหนึ่งตัวมีค่าเปลี่ยนไป ซึ่งค่าลิมิตจะเกี่ยวข้องกับตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียวเท่านั้น ดังนั้นการหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปรอิสระใด เราจะให้ตัวแปรอิสระอื่นเป็นค่าคงที่ แล้วทำการหาอนุพันธ์โดยใช้สูตรเหมือนกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันของตัวแปรอิสระตัวแปรเดียว สัญลักษณ์ที่ใช้สำหรับอนุพันธ์ย่อยเป็นดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_t \quad \text{เป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับ } t$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x \quad \text{เป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับ } x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx} \quad \text{เป็นอนุพันธ์อันดับสองเทียบกับ } x$$

โดยเราจะหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับ x ก่อน แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้มาหาอนุพันธ์เทียบกับ x อีกครั้ง

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = u_{tx} \quad \text{เป็นอนุพันธ์อันดับสองเทียบกับ } x \text{ และ } t$$

โดยเราจะหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับ x ก่อน แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้มาหาอนุพันธ์เทียบกับ t อีกครั้ง

นิยาม 2.5 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย คือสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีฟังก์ชันไม่ทราบค่าตัวแปรมากกว่า 1 ตัวแปรปรากฏอยู่ในสมการ โดยที่สมการมีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันดังนี้

$$P(x, y, z, t : u, u_x, u_y, u_z, u_t, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (2.1)$$

เมื่อ x, y, z, t เป็นตัวแปรอิสระ u เป็นตัวแปรตาม และ

$$u_x, u_y, u_z, u_t, u_{xx}, u_{xy}, u_{xz}, u_{xt}, u_{yy}, u_{yz}, u_{yt}, \dots$$

เป็นอนุพันธ์ย่อยอันดับต่าง ๆ ของ u

นิยาม 2.6 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (2.1) จะเรียกว่าเป็นสมการอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้น (linear partial differential equation) ถ้าฟังก์ชัน P มีสภาพเชิงเส้นในแต่ละตัวแปร $u, u_x, u_y, \dots$ และถ้าสัมประสิทธิ์ของ u และอนุพันธ์ของ u เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระเท่านั้น สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นจะเรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น (nonlinear partial differential equation)

ในการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ สามารถหาคำตอบของสมการได้ง่ายตามวิธีการต่าง ๆ เช่น วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ ใช้ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ วิธีแปรตัวพารามิเตอร์ เป็นต้น แต่สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย จะไม่มีรูปแบบวิธีการที่แน่นอนในการหาคำตอบของสมการ สามารถเลือกใช้วิธีการหาคำตอบได้หลายวิธี ซึ่งหลักการเลือกใช้นั้น ขึ้นอยู่กับรูปแบบเฉพาะของแต่ละสมการ เช่น วิธีเอ็กซ์โพเนนเชียลฟังก์ชัน วิธีไซน์-โคไซน์ วิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน วิธีการแปลงเชิงเส้นคู่ วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ เป็นต้น โดยสมการเชิงอนุพันธ์ทั้ง 2 แบบ จะถูกจำแนกตามอันดับสูงสุดของฟังก์ชันไม่ทราบค่า

วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์

Ganji and Abdollahzadeh (2008) ได้สรุปขั้นตอนของวิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ และวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ ซึ่งถูกนำเสนอโดย Malfied (1992) และมีการพัฒนามาอย่างต่อเนื่อง ดังต่อไปนี้

1. พิจารณารูปแบบทั่วไปของสมการไม่เชิงเส้น

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (2.2)$$

2. หาคำตอบของสมการ (2.2) โดยกำหนดตัวแปรคลื่นเดียว $\xi = \alpha(x - \beta t)$ ดังนั้นจะได้

$$u(x, t) = U(\xi) \quad (2.3)$$

โดยที่คำตอบคลื่น $U(\xi)$ นั้นเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว β ด้วยข้อตกลงนี้เราจะได้

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= -\alpha\beta \frac{d}{d\xi} \\ \frac{d}{dx} &= \alpha \frac{d}{d\xi} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \alpha^2 \frac{d^2}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3}{dx^3} = \alpha^3 \frac{d^3}{d\xi^3}$$

และอนุพันธ์อันดับอื่น ๆ อีก ซึ่งในที่นี้ $\frac{d}{dt}$ คือ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรตาม เทียบกับตัวแปรอิสระ t ซึ่งสามารถคำนวณได้โดยอาศัยกฎลูกโซ่ แสดงรายละเอียดได้ ดังนี้ จากสมการตั้งต้น

$$u(x, t) = U(\xi)$$

โดยใช้สัญลักษณ์ u แทน $u(x, t)$ และใช้สัญลักษณ์ U แทน $U(\xi)$ ภายใต้งื่อนไข

$$\xi = \alpha(x - \beta t)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dt} &= \frac{dU}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dt} \\
 &= \frac{dU}{d\xi} \cdot \frac{d}{dt}(\alpha x - \alpha \beta t) \\
 &= \frac{dU}{d\xi} \cdot \left[\frac{d}{dt}(\alpha x) - \frac{d}{dt}(\alpha \beta t) \right] \\
 &= \frac{dU}{d\xi} \cdot \left[\alpha \frac{d}{dt}(x) - \alpha \beta \frac{d}{dt}(t) \right] \\
 &= \frac{dU}{d\xi} \cdot (0 - \alpha \beta) \\
 &= -\alpha \beta \frac{dU}{d\xi}
 \end{aligned}$$

และสามารถคำนวณหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรตาม u เทียบกับตัวแปรอิสระ x ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dx} &= \frac{dU}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} \\
 &= \frac{dU}{d\xi} \cdot \frac{d}{dx}(\alpha x - \alpha \beta t) \\
 &= \frac{dU}{d\xi} \cdot \left[\alpha \frac{d}{dx}(x) - \alpha \beta \frac{d}{dx}(t) \right] \\
 &= \frac{dU}{d\xi} \cdot (\alpha - 0) \\
 &= \alpha \frac{dU}{d\xi}
 \end{aligned}$$

เมื่อแทนสมการ (2.4) แล้วจะทำให้แปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสมการ (2.2) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$P(U, U', U'', \dots) = 0 \quad (2.5)$$

3. ถ้าทุกพจน์ของผลลัพธ์ในสมการเชิงอนุพันธ์สามัญนั้นมีอนุพันธ์ของ ξ แล้วเราจะสามารถอินทิเกรตสมการนี้ได้ และกำหนดให้ค่าคงที่ของการอินทิเกรตเป็นศูนย์ จะทำให้เราได้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่จัดรูปเรียบร้อยแล้ว

4. ในขั้นนี้เราจะกำหนดตัวแปรอิสระใหม่คือ

$$Y = \sec h(\xi) \quad (2.6)$$

ผลจากการกำหนดข้างต้น เราสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้โดยอาศัยทฤษฎีพื้นฐาน

$$\cosh^2(\xi) - \sinh^2(\xi) = 1$$

ซึ่งหาอนุพันธ์ได้โดย

$$Y' = \sec h'(\xi) = -\sec h(\xi) \tanh(\xi) = -\sec h \sqrt{1 - \sec^2 h(\xi)}$$

$$\sec h''(\xi) = \sec h(\xi) \tanh^2(\xi) - \sec h^3(\xi) = \sec h(\xi)(1 - \sec^2 h(\xi)) - \sec h^3(\xi)$$

จาก $Y' = -Y\sqrt{1 - Y^2}$ และกฎลูกโซ่จะได้

$$\frac{d}{d\xi} = \frac{d}{dY} \frac{dY}{d\xi} = -Y\sqrt{1 - Y^2} \frac{d}{dY}$$

ทำให้เราหาอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{d}{d\xi} = -Y\sqrt{1-Y^2} \frac{d}{dY}$$

(2.7)

$$\frac{d^2}{d\xi^2} = -Y\sqrt{1-Y^2} \left(-\sqrt{1-Y^2} \frac{d}{dY} + \frac{Y^2 \frac{d}{dY}}{\sqrt{1-Y^2}} - Y\sqrt{1-Y^2} \frac{d^2}{dY^2} \right)$$

และสามารถหาอนุพันธ์อันดับอื่น ๆ ได้ในทำนองเดียวกัน

5. กำหนดให้

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^M a_k Y^k \quad (2.8)$$

เมื่อ M เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งเราจะต้องหาค่า M นี้เพื่อแทนในสมการ (2.7) และ (2.8) ในสมการ (2.5) ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ จะได้สมการที่เป็นสมการยกกำลังของ Y

6. พารามิเตอร์ M หาได้จากการนำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นอันดับสูงสุด ในสมการของผลลัพธ์ เปรียบเทียบกับอันดับสูงสุดของพจน์ไม่เชิงเส้น แล้วทำการหา M โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ของกำลังของ Y ในสมการของผลลัพธ์ ซึ่งจะทำให้ได้ระบบสมการพีชคณิตที่เกี่ยวข้องกับ a_k ($k=0, \dots, M$), α และ β เมื่อหา M ซึ่งส่วนใหญ่จะเป็นจำนวนเต็มบวกได้แล้ว และใช้ M นี้กับสมการ (2.8) จะทำให้เราได้คำตอบวิเคราะห์ที่เป็นอยู่ในรูปแบบปิด

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ตัวอย่างงานวิจัยที่ใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์

Ganji and Abdollahzadeh (2008) ผลเฉลยแม่นยำตรงสำหรับสมการเคดีวีอันดับ 7 ของเล็กซ์ (Lax's seventh-order KdV) โดยวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ และวิธีเอ็กซ์โพเนนเชียลฟังก์ชันตรรกยะ ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$u_t + (35u^4 + 70(u^2 u_{xx} + uu_x^2) + 7(2uu_{xxx} + 3u_{xx}^2 + 4u_x u_{xxx}) + u_{xxxxx})_x = 0 \quad (2.9)$$

ใช้สมการ (2.3) และ (2.4)

ให้

$$u(x,t) = U(\xi)$$

เมื่อ

$$\xi = \alpha(x - B)t$$

ดังนั้น จะได้

$$\frac{d}{dt} = -\alpha\beta \frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{d}{dx} = \alpha \frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \alpha^2 \frac{d^2}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3}{dx^3} = \alpha^3 \frac{d^3}{d\xi^3}$$

เปลี่ยนสมการที่ (2.9) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ จะได้

$$\begin{aligned} & -\beta U' + 140U^3U' + 280\alpha^2UU'U'' + 70\alpha^2U^2U''' + 70\alpha^2U'^3 \\ & + 42\alpha^4U'U^{(4)} + 14\alpha^4UU^{(5)} + 70\alpha^4U''U''' + \alpha^6U^{(7)} = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

กำหนด

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^M a_k Y^k \quad \text{เมื่อ} \quad Y = \operatorname{sech}(\xi) \quad (2.11)$$

จากสมการ (2.7) จะได้

$$\frac{dU(\xi)}{d\xi} = -Y\sqrt{1-Y^2} \frac{dS}{dY}$$

$$\frac{d^2 U(\xi)}{d\xi^2} = -Y\sqrt{1-Y^2} \left(-\sqrt{1-Y^2} \frac{dS}{dY} + \frac{Y^2 \frac{dS}{dY}}{\sqrt{1-Y^2}} - Y\sqrt{1-Y^2} \frac{d^2 S}{dY^2} \right)$$

$$\frac{d^3 U(\xi)}{d\xi^3} = -Y\sqrt{1-Y^2} \left(1-6Y^2 \frac{dS}{dY} + (3Y-6Y^2) \frac{d^2 S}{dY^2} + Y^2(1-Y^2) \frac{d^3 S}{dY^3} \right) \quad (2.12)$$

และอนุพันธ์อันดับอื่น ๆ หาได้ในทำนองเดียวกัน

จาก (2.11) จะได้

$$S(Y) = \sum_{k=0}^M a_k Y^k = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 + \dots + a_M Y^M$$

$$S'(Y) = \sum_{k=0}^M k a_k Y^{k-1} = a_1 + 2a_2 Y + 3a_3 Y^2 + \dots + M a_M Y^{M-1}$$

$$S''(Y) = \sum_{k=0}^M k(k-1) a_k Y^{k-2} = 2a_2 + 6a_3 Y + \dots + M(M-1) a_M Y^{M-2}$$

$$S'''(Y) = \sum_{k=0}^M k(k-1)(k-2) a_k Y^{k-3}$$

$$= 6a_3 + 24a_4 Y + \dots + M(M-1)(M-2) a_M Y^{M-3} \quad (2.13)$$

แทน (2.12) และ (2.13) โดยเงื่อนไข (2.11) ในสมการ (2.10) เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ M ซึ่งได้จากการนำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นของอันดับสูงสุด ในสมการของผลลัพธ์มาเท่ากับอันดับสูงสุด ในพจน์ไม่เชิงเส้น แล้วทำการหา M โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ของกำลังของ Y นั่นคือ เทียบเลขชี้กำลังของพจน์ Y^{M+8} ที่ปรากฏในพจน์ $U^{(7)}$ ซึ่งเป็นอนุพันธ์อันดับสูงสุดของพจน์เชิงเส้นกับ Y^{4M+2} ในพจน์ $U^3 U'$ ซึ่งเป็นพจน์ไม่เชิงเส้นอันดับสูงสุด ของสมการ (2.10) จะได้

$$M + 8 = 4M + 2$$

นั่นคือ

$$M = 2$$

แทนค่า $M = 2$ ในสมการ (2.11) จะได้

$$S(Y) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 \quad (2.14)$$

และหาอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$S'(Y) = a_1 + 2a_2 Y$$

$$S''(Y) = 2a_2$$

$$S'''(Y) = S^{(4)}(Y) = S^{(5)}(Y) = S^{(6)}(Y) = S^{(7)}(Y) = 0$$

แทนค่า (2.14) และอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ลงในสมการ (2.10) แล้วพิจารณาสัมประสิทธิ์แต่ละกำลังของ Y จะได้ระบบสมการที่ประกอบด้วย a_0 , a_1 , a_2 , α และ β ดังนี้

$$Y^0 : -14\alpha^4 a_0 a_1 - 140a_0^3 a_1 - 70\alpha^2 a_0^2 a_1 - \alpha^6 a_1 + \beta a_1 = 0,$$

$$Y^1 : \begin{aligned} & -420\alpha^3 a_1^2 a_0 - 128\alpha^6 a_2 - 126\alpha^4 a_1^2 - 448\alpha^4 a_0 a_2 - 280a_2 a_0^3 \\ & + 2\beta a_2 - 560\alpha^2 a_2 a_0^2 - 420a_0^2 a_1^2 = 0, \end{aligned}$$

$$Y^2 : \begin{aligned} & -2940\alpha^4 a_0 a_1 a_2 + 140a_0^3 a_1 + 490\alpha^2 a_0^2 a_1 - 420a_0 a_1^3 + 854\alpha^4 a_0 a_1 \\ & - 1260a_0^2 a_2 a_1 - 2058\alpha^4 a_1 a_0 - \beta a_1 - 420\alpha^2 a_1^3 + 547\alpha^6 a_1 = 0, \end{aligned}$$

$$Y^3 : \begin{aligned} & 7168\alpha^4 a_0 a_2 - 2\beta a_2 + 280a_0^3 a_2 - 4032\alpha^4 a_2^2 + 420a_0^2 a_1^2 \\ & - 1680a_0 a_1^2 a_2 + 2366\alpha^4 a_1^2 + 2240\alpha^2 a_0^2 a_2 - 3080\alpha^2 a_1^2 a_2 \\ & - 140a_1^4 - 840a_2^2 a_0^2 + 8192\alpha^6 a_2 + 1820\alpha^2 a_1^2 a_0 = 0, \end{aligned}$$

$$Y^4 : \begin{aligned} & -700a_2 a_1^3 - 2520\alpha^4 a_1 a_0 + 21238\alpha^4 a_1 a_2 - 5950\alpha^2 a_2^2 a_1 \\ & + 9940\alpha^2 a_0 a_2 a_1 + 1260a_1 a_0^2 a_2 - 420\alpha^2 a_0^2 a_1 + 420a_0 a_1^3 \\ & + 1470\alpha^2 a_1^3 - 2100a_2^2 a_0 a_1 - 4746\alpha^6 a_1 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -5768\alpha^4 a_1^2 - 48384\alpha^6 a_2 - 1400\alpha^2 a_0 a_1^2 + 9380\alpha^2 a_1^2 a_2 \\
Y^5 : & -1680\alpha^2 a_0^2 a_2 + 1680a_1^2 a_0 a_2 - 3360\alpha^2 a_2^3 - 1260a_2^2 a_1^2 \\
& - 840a_0 a_2^3 - 16800\alpha^4 a_0 a_2 + 30912\alpha^4 a_2^2 + 840a_0^2 a_2^2 + 10080\alpha^2 a_0 a_2^2 \\
& + 140a_1^4 = 0, \\
Y^6 : & 700a_1^3 a_2 - 980a_1 a_2^3 + 9240\alpha^6 a_1 + 16730\alpha^2 a_1 a_2^2 + 2100a_0 a_1 a_2^2 \\
& - 43876\alpha^4 a_1 a_2 - 1050\alpha^2 a_1^3 - 7000\alpha^2 a_2 a_1 a_0 + 1680\alpha^4 a_0 a_1 = 0, \\
& - 6720\alpha^2 a_0 a_2^2 - 280a_2^4 + 840a_0 a_2^3 - 6300\alpha^2 a_1^2 a_2 \\
Y^7 : & + 80460\alpha^6 a_2 + 10080\alpha^4 a_0 a_2 + 1260a_1^2 a_2^2 + 8960\alpha^2 a_2^3 \\
& - 57120\alpha^4 a_2^2 + 3528\alpha^4 a_1^2 = 0, \\
Y^8 : & -10780\alpha^2 a_1 a_2^2 + 24696\alpha^4 a_1 a_2 - 5040\alpha^6 a_1 + 980a_1 a_2^3 = 0, \\
Y^9 : & 30240\alpha^4 a_2^2 - 5600\alpha^2 a_2^3 + 250a_2^4 - 40320\alpha^6 a_2 = 0
\end{aligned} \tag{2.15}$$

แก้ระบบสมการ (2.15) จะได้

$$\beta = 64\alpha^6 + 224\alpha^4 a_0 + 140a_0^3 + 280\alpha^2 a_0^2,$$

$$a_1 = 0, \tag{2.16}$$

$$a_2 = 2\alpha^2$$

ในสมการ (2.16) เลือก $a_0 = 0$ จะได้

$$\beta = 64\alpha^6 \tag{2.17}$$

$$a_1 = 0, a_2 = 2\alpha^2$$

แทนค่าตัวแปร β , a_1 และ a_2 จากสมการ (2.17) ในสมการ (2.14) จะได้คำตอบแน่นอนตรง
ของสมการคลื่นที่อยู่ในรูป

$$u = 2[\alpha \operatorname{sech}(\alpha(x - 64\alpha^6 t))]^2$$

Wazwaz (2007) ได้หาผลเฉลยของสมการโคโนเปลเช็งโก-ดูโบรสกี (2+1) มิติ (the (2 + 1)-dimensional Konopelchenko–Dubrovsky equation) ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$u_t - u_{xxx} - 6buu_x + \frac{3}{2}a^2u^2u_x - 3v_y + 3au_xv = 0 \quad (2.18)$$

$$u_y = v_x$$

ใช้สมการ (2.3) และ (2.4)

ให้

$$u(x, y, t) = U(\mu\xi)$$

และ

$$v(x, y, t) = V(\mu\xi)$$

เมื่อ

$$\xi = x + y - ct$$

ดังนั้นจะได้

$$\frac{d}{dt} = -c \frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{d}{dy} = \frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d^2}{d\xi^2}$$

เปลี่ยนสมการ (2.18) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$-cU' - U''' - 3b(U^2)' + \frac{1}{2}a^2(U^3)' - 3V' + 3aU'V = 0 \quad (2.19)$$

$$U' = V'$$

โดยการอินทิเกรตทั้งสมการที่สองใน (2.19) และให้ค่าคงที่เป็นศูนย์จะได้

$$U = V \quad (2.20)$$

แทนค่า (2.20) ใน (2.19) แล้วอินทิเกรตสมการแรกจะได้

$$(c+3)U + 3(b - \frac{a}{2})U^2 - \frac{1}{2}a^2U^3 + U'' = 0 \quad (2.21)$$

กำหนด

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^M a_k Y^k \quad (2.22)$$

เมื่อ

$$Y = \operatorname{sech}(\mu\xi)$$

จะหาอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{dU(\xi)}{d\xi} = -\mu Y \sqrt{1-Y^2} \frac{dS}{dY} \quad (2.23)$$

$$\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2} = -\mu^2 Y \sqrt{1-Y^2} \left(-\sqrt{1-Y^2} \frac{dS}{dY} + \frac{Y^2 \frac{dS}{dY}}{\sqrt{1-Y^2}} - Y \sqrt{1-Y^2} \frac{d^2S}{dY^2} \right)$$

และ

$$S(Y) = \sum_{k=0}^M a_k Y^k = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 + \dots + a_M Y^M$$

$$S'(Y) = \sum_{k=0}^M k a_k Y^{k-1} = a_1 + 2a_2 Y + 3a_3 Y^2 + \dots + M a_M Y^{M-1}$$

$$S''(Y) = \sum_{k=0}^M k(k-1) a_k Y^{k-2} = 2a_2 + 6a_3 Y + \dots + M(M-1) a_M Y^{M-2} \quad (2.24)$$

แทน (2.23) และ (2.24) โดยเงื่อนไข (2.22) ในสมการ (2.21) เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ M ซึ่งได้จากการนำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นอันดับสูงสุดในสมการของผลลัพธ์ มาเปรียบเทียบกับอันดับสูงสุดในพจน์ไม่เชิงเส้น แล้วทำการหา M โดยการเทียบสัมประสิทธิ์กำลังของ Y นั่นคือ เทียบเลขชี้กำลังของพจน์ Y^{M+2} ที่ปรากฏขึ้นในพจน์ U'' ซึ่งเป็นอนุพันธ์อันดับสูงสุดของพจน์เชิงเส้นกับ Y^{3M} ในพจน์ U^3 ซึ่งเป็นพจน์ไม่เชิงเส้นอันดับสูงสุด ของสมการ (2.10) จะได้

$$M + 2 = 3M$$

นั่นคือ

$$M = 1$$

แทนค่า $M = 1$ ในสมการ (2.22) จะได้

$$S(Y) = a_0 + a_1 Y \quad (2.25)$$

และหาอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$S'(Y) = a_1$$

แทนค่า (2.25) ลงในสมการ (2.21) แล้วพิจารณาสัมประสิทธิ์แต่ละกำลังของ Y จะได้ระบบสมการที่ประกอบด้วย a_0 , a_1 , μ และ c ดังนี้

$$Y^0 : a_1(a^2 a_1^2 + 4\mu^2) = 0,$$

$$Y^1 : a_1^2(-6b + 3a + 3a^2 a_0) = 0,$$

$$Y^2 : a_1(-2c - 12ba_0 - 6 + 6aa_0 - 2\mu^2 + 3a^2 a_0) = 0,$$

$$Y^3 : -2ca_0 - 6ba_0^2 + 3aa_0^2 + a^2a_0^3 - 6a_0 = 0 \quad (2.26)$$

แก้ระบบสมการ (2.26) จะได้

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{(2b-a)}{a^2}, \\ a_1 &= \pm \frac{\sqrt{2}(a-2b)}{a^2}, \\ \mu &= i \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a-2b}{a}, \quad i^2 = -1 \\ c &= \frac{4(ab - a^2 - a^2)}{a^2}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

แทนค่า (2.27) โดยเงื่อนไข (2.22) ลงในสมการ (2.25) ทำให้เราได้สมการทำนายเป็น

$$u(x, y, t) = \frac{(2b-a)}{a^2} \left(1 \pm \sqrt{2} \sec \left[\frac{a-2b}{\sqrt{2}a} \left(x + y + \frac{4(ab - a^2 - b^2)}{a^2} t \right) \right] \right)$$

และ

$$u(x, y, t) = \frac{(2b-a)}{a^2} \left(1 \pm \sqrt{2} \csc \left[\frac{a-2b}{\sqrt{2}a} \left(x + y + \frac{4(ab - a^2 - b^2)}{a^2} t \right) \right] \right)$$

Wazwaz (2007) ได้ใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์-ไฮเพอร์โบลิกโคแทนเจนต์ และวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ สำหรับสมการจูเลนต์-มิโอดก (Jaulent-Miodek equation) ที่มีรูปแบบ

$$u_t + u_{xxx} + \frac{3}{2}vv_{xxx} + \frac{9}{2}v_xv_{xx} - 6uu_x - 6uvv_x - \frac{3}{2}u_xv^2 = 0 \quad (2.28)$$

$$v_t + v_{xxx} - 6u_xv - 6uv_x - \frac{15}{2}v_xv^2 = 0$$

ในการทำนองเดียวกันกับการหาผลเฉลยระบบสมการ (2.18) งานวิจัยนี้ทำให้ได้ผลเฉลย
แน่นอนตรงของคลื่นโซลิตอนรี $u(x,t)$ และ $v(x,t)$ ที่อยู่ในรูปฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์
($\sec h$) ไม่ใช่เป็นเพียงสมการทำนาย ดังนี้

$$u_1(x,t) = \frac{1}{8}\gamma^2 \left(1 - 4 \sec^2 h \left[\frac{1}{2} \gamma \left(x + \frac{1}{2} \gamma^2 t \right) \right] \right)$$

$$v_1(x,t) = \gamma \sec h \left[\frac{1}{2} \gamma \left(x + \frac{1}{2} \gamma^2 t \right) \right]$$

และ

$$u_2(x,t) = \frac{1}{4}(\gamma^2 - \beta^2) - \frac{1}{2}\beta\gamma \sec h \left[\gamma \left(x + \frac{1}{2}(6\beta^2 + \gamma^2)t \right) \right] \\ - \frac{3}{4}\gamma^2 \sec^2 h \left[\gamma \left(x + \frac{1}{2}(6\beta^2 + \gamma^2)t \right) \right]$$

$$v_2(x,t) = \beta + \gamma \sec h \left[\gamma \left(x + \frac{1}{2}(6\beta^2 + \gamma^2)t \right) \right]$$

จากการค้นคว้าในส่วนนี้ทำให้ทราบว่าวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ เป็นวิธีหนึ่งที่สามารถ
ใช้หาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น ซึ่งเป็นสมการเคดีวีอันดับสูง และระบบ
สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้อย่างมีประสิทธิภาพ สามารถนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาอื่น ๆ ทำให้
เกิดแนวทางในการที่จะนำไปสู่การศึกษา ปัญหาสมการเคดีวีปรับปรุง และสมการเคดีวีประกอบ
ในครั้งนี้อด้วย