

บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

เนื่องจากสมการไม่เชิงเส้นนั้นนับเป็นสมการที่ใช้กันอย่างแพร่หลาย ในการใช้จำลองและอธิบายความซับซ้อนของปรากฏการณ์ต่าง ๆ ทางวิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์ เช่น กลศาสตร์ของไหล จลศาสตร์เคมี และแบบจำลองประชากร เป็นต้น ดังนั้นการหาคำตอบของสมการไม่เชิงเส้นนั้น นับว่าเป็นสิ่งสำคัญอย่างยิ่ง เพื่อให้เราบรรลุถึงเป้าหมายของการศึกษาในเรื่องดังกล่าว

สำหรับปรากฏการณ์ข้างต้น มักเป็นปัญหาที่อยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ซึ่งไม่มีรูปแบบในการหาผลเฉลยที่แน่นอน แต่ได้มีผู้คิดค้นวิธีการหาคำตอบของปัญหาเหล่านั้นในช่วงไม่กี่ปีมานี้ไว้มากมายหลายวิธีแตกต่างกันไป เช่น วิธีการแปลงเชิงเส้นคู่ (bilinear transformation) (Hirota, 1980) วิธีไซน์-โคไซน์ (sine-cosine method) (Wazwaz, 2004) วิธีเอ็กซ์โพเนนเชียลฟังก์ชัน (exponential function method) (He & Wu, 2006) วิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (homotopy perturbation method) (Ganji & Rafei, 2006) เป็นต้น

อีกวิธีหนึ่งที่น่าสนใจและมีประสิทธิภาพในการหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ย่อย คือวิธีไฮเพอร์โบลิคแทนเจนต์ ($\tanh$ method) และวิธีไฮเพอร์โบลิคเซแคนต์ ($\sec h$ method) (Malfliet, 1992) ซึ่งถือว่าเป็นเทคนิคที่ถูกอ้างอิงและใช้กันอย่างแพร่หลายในงานวิจัยต่าง ๆ ทั่วโลก ทั้งยังได้ถูกพัฒนาอย่างต่อเนื่อง รวบรวมให้เป็นระบบเพื่อง่ายต่อการนำไปใช้

จากการศึกษางานวิจัยต่าง ๆ นั้น พบว่ารูปแบบของปัญหาเป็นจำนวนมากได้ถูกพัฒนา มาจาก สมการเคอทิเวจ ดี วิส (Korteweg-de Vries) หรือ เคดีวี (KdV)

สมการเคดีวีที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ถูกค้นพบครั้งแรกในปีค.ศ. 1877 โดย Boussinesq มีรูปแบบดังนี้

$$u_t + 6u_{xx} + u_{xxx} = 0 \quad (1.1)$$

โดยที่ $u(x, t)$ เป็นฟังก์ชันของเวลา (t) และระยะพิกัดที่มีความสัมพันธ์กับทิศทาง (x) สมการเคดีวี จะถูกกำหนดลักษณะเฉพาะที่ได้มาจากชุดคำตอบของคลื่นโซลิตอรี (Solitary)

$$u = a \operatorname{sech}^2(\gamma(x - Vt)) \quad \text{โดยที่ } V = 2a = 4\gamma^2 \quad (1.2)$$

สมการ (1.2) ถูกกำหนดลักษณะเฉพาะโดยเลขคลื่น (wavenumber) คือ γ และความเร็ว V ที่เป็นสัดส่วนโดยตรงกับแอมพลิจูด (amplitude) ของคลื่น (a) และเป็นสัดส่วนโดยตรงกับเลขคลื่นยกกำลังสอง (γ^2) (ปียชิตา, 2549)

สมการ (1.1) เป็นผลงานของ Korteweg และ De Vries ตีพิมพ์ในปีค.ศ. 1895 โดยแสดงคลื่นยาว (long waves) ที่มีแอมพลิจูดน้อย ๆ บนพื้นผิวอิสระของน้ำ โดยใช้สมการ

$$\zeta_t + c\zeta_x + \frac{3c}{2h}\zeta\zeta_x + \frac{ch^2}{6}\delta\zeta_{xxx} = 0 \quad (1.3)$$

ซึ่งนับว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นที่มีความสำคัญมาก แต่ภายหลังจาก เคอทิเวจ และ ดี วิส ได้ค้นพบคลื่นน้ำโซลิตอนและสมการเคดีวี ความสนใจเกี่ยวกับสมการเคดีวี เริ่มลดน้อยลง จนกระทั่งในปีค.ศ. 1965 Zabusky และ Kruskal ได้ค้นพบคลื่นโซลิตอนที่มีรูปแบบใหม่และเงื่อนไขเริ่มต้นทั่วไป โดยการหาปฏิยานุพันธ์เชิงตัวเลขของสมการเคดีวี ซึ่งนำไปสู่การสร้าง โซลิตอน (Soliton) การค้นพบครั้งนี้ทำให้คลื่นโซลิตอนและสมการเคดีวี กลับมาเป็นที่สนใจอีกครั้ง ทั้งยังได้มีการประยุกต์ใช้สมการเคดีวี นี้อย่างมาก ทั้งในทางวิทยาศาสตร์ และทาง วิศวกรรมศาสตร์ ดังจะเห็นได้จากงานวิจัยที่สำคัญ ๆ เป็นจำนวนมาก

สำหรับงานวิจัยนี้เราจะศึกษาสมการที่ถูกปรับปรุงมาจากสมการเคดีวี นั่นคือ

1. สมการเคดีวีปรับปรุง (MKdV) ที่มีรูปแบบ

$$u_t + qu^2u_x + ru_{xxx} = 0 \quad (1.4)$$

ซึ่งอธิบายการเคลื่อนที่ของคลื่นทัศนศาสตร์ไม่เชิงเส้น (optics nonlinear) พลาสมา (plasma) และ ของไหล (fluid) (Wang, Wu¹, & Wu, 2004)

2. สมการเคดีวีประกอบ (the compound KdV) ที่มีรูปแบบ

$$u_t + puu_x + qu^2u_x + ru_{xxx} = 0 \quad (1.5)$$

ซึ่งเป็นสมการที่นำสมการเคตีวี และเคตีวีปรับปรุงมารวมกัน สำหรับอธิบายการแผ่ขยายของอนุภาค (propagation of the bound particle) คลื่นเสียง (sound wave) และการเต้นของชีพจร (thermal pulse) (Bekir, 2009)

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. ศึกษาวิธีการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยโดยใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์
2. ใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์หาผลเฉลยของสมการเคตีวีปรับปรุง
3. ใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์หาผลเฉลยของสมการเคตีวีประกอบ

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ได้ผลเฉลยจากวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ที่เป็นองค์ความรู้ใหม่จากสมการต่อไปนี้

1. ผลเฉลยของสมการเคตีวีปรับปรุง
2. ผลเฉลยของสมการเคตีวีประกอบ

ขอบเขตของงานวิจัย

งานวิจัยนี้ศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเคตีวีปรับปรุง และสมการเคตีวีประกอบ โดยใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์เท่านั้น