# การศึกษาการเลี้ยวเบนของคลื่นสสารสำหรับอนุภาคในพิสัยใกล้ภายใต้อิทธิพลของสนามไฟฟ้าคงที่

# A STUDY OF MATTER-WAVE DIFFRACTION FOR PARTICLE IN THE NEAR FIELD REGIME UNDER THE INFLUENCE OF A UNIFORM ELECTRIC FIELD

ชัยมงคล อาจโยธา

มหาวิทยาลัยบูรพา

2561

# การศึกษาการเลี้ยวเบนของคลื่นสสารสำหรับอนุภาคในพิสัยใกล้ภายใต้อิทธิพลของสนามไฟฟ้าคงที่



ชัยมงคล อาจโยธา

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาฟิสิกส์ศึกษา
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
2561

A STUDY OF MATTER-WAVE DIFFRACTION FOR PARTICLE IN THE NEAR FIELD REGIME UNDER THE INFLUENCE OF A UNIFORM ELECTRIC FIELD



CHAIMONGKOL ARTYOTHA

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENTS FOR MASTER OF SCIENCE
IN PHYSICS EDUCATION
FACULTY OF SCIENCE
BURAPHA UNIVERSITY
2018

คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์และคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ได้พิจารณาวิทยานิพนธ์ของ ชัยมงคล อาจโยธา ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์ศึกษา ของมหาวิทยาลัยบูรพาได้

คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์

........................................................ อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สรไกร ศรีศุภผล)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

ดริศ สามารถ ........................................................ ประธาน

(ดร. ดริศ สามารถ)

บุญฤทธิ์ ครุนวการ ........................................................ กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. บุญฤทธิ์ ครุนวการ)

........................................................ กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. สรายุธ เดชะปัญญา)

คณะวิทยาศาสตร์อนุมัติให้รับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์ศึกษา ของมหาวิทยาลัยบูรพา

........................................................ คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เอกรัฐ ศรีสุข)

วันที่ 29 เดือน เมษายน พ.ศ. 2562

59910279: สาขาวิชา: ฟิสิกส์ศึกษา; วท.ม. (ฟิสิกส์ศึกษา)
คำสำคัญ: ปริพันธ์ตามเส้นทาง, การเลี้ยวเบนในสนามใกล้, โมเลกุล C60

ชัยมงคล อาจโยธา : การศึกษาการเลี้ยวเบนของคลื่นสสารสำหรับอนุภาคในพิสัยใกล้ภายใต้อิทธิพลของสนามไฟฟ้าคงที่. (A STUDY OF MATTER-WAVE DIFFRACTION FOR PARTICLE IN THE NEAR FIELD REGIME UNDER THE INFLUENCE OF A UNIFORM ELECTRIC FIELD) คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์: สรไกร ศรีศุภผล, ปร.ด. ปี พ.ศ. 2561.

ในบรรดาการทดลองต่างๆ เพื่อที่จะตรวจสอบปรากฏการณ์ทางควอนตัม การเลี้ยวเบนของคลื่นสสารเป็นตัวอย่างหนึ่งที่ชัดเจนของการเลี้ยวเบนของอนุภาคซึ่งสามารถถูกวัดได้แม้โมเลกุลที่มีขนาดใหญ่ อาทิเช่น โมเลกุล $C_{60}$ เพื่อที่จะบรรยายการเลี้ยวเบนของคลื่นสสารของลำโมเลกุล $C_{60}$ ผู้วิจัยได้สมมติฟังก์ชันคลื่นเริ่มต้นในรูปของอนุกรมฟูเรียร์ที่มีการกระจายตัวแบบเกาส์เซียน โดยประยุกต์ใช้ปริพันธ์ตามเส้นทางของไฟยน์แมน ทำให้ได้ฟังก์ชันคลื่นแบบแม่นตรงของการเลี้ยวเบนโมเลกุลในสนามใกล้และการกระจายตัวความหนาแน่นของโอกาสที่ได้จะสอดคล้องกับริ้วรอยการแทรกสอดเช่นเดียวกับในการเลี้ยวเบนของเฟรสเนล รวมถึงโอกาสที่จะพบโมเลกุล $C_{60}$ หลังเกรตติงที่ระยะทาร์บอทซึ่งสอดคล้องกับผลการทดลองของการเลี้ยวเบนของโมเลกุล $C_{60}$

59910279: MAJOR: PHYSICS EDUCATION; M.Sc. (PHYSICS EDUCATION)
KEYWORDS: path integral, the near-field diffraction, C60 molecule

CHAIMONGKOL ARTYOTHA : A STUDY OF MATTER-WAVE DIFFRACTION FOR PARTICLE IN THE NEAR FIELD REGIME UNDER THE INFLUENCE OF A UNIFORM ELECTRIC FIELD. ADVISORY COMMITTEE: SORNKRAI SRISUPHAPHON, Ph.D. 2018.

For various experiments to investigate quantum effects, matter-wave diffraction is an apparent example. Particle diffractions have been measured even at the large molecular level, such as the $C_{60}$ molecules. In order to describe the matter-wave diffraction of $C_{60}$ beam, we assume the initial wave functions behind a grating in form of the Fourier series with a Gaussian distribution function. By applying the Feynman path integral, the exact wave functions of the molecule diffraction in the near-field regime can be derived analytically. The obtained probability density distributions are corresponding to interference fringes as found in the Fresnel diffraction. Additionally, the probability of finding $C_{60}$ molecules, behind the grating at the Talbot length, gives the consistency with the mentioned experimental data of $C_{60}$ diffractions.

# กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากโครงการส่งเสริมการผลิตครูที่มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ (สควค.) สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) กระทรวงศึกษาธิการ

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สรไกร ศรีศุภผล อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ที่ได้กรุณาให้คำปรึกษา ให้คำแนะนำ รวมถึงข้อเสนอที่มีประโยชน์อย่างสูง ตลอดจนการสนับสนุนและให้กำลังใจมาโดยตลอด ทำให้การจัดทำวิทยานิพนธ์บรรลุผลสำเร็จ

ขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์ ดร. ดริศ สามารถ ที่กรุณาสละเวลาเป็นประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และให้ความอนุเคราะห์พิจารณาตรวจทานแก้ไขวิทยานิพนธ์

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.สรายุธ เดชะปัญญา และ รองศาสตราจารย์ ดร.บุญฤทธิ์ ครุนวการ ที่กรุณาสละเวลาเป็นกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ต่อการปรับปรุงแก้ไขวิทยานิพนธ์ให้สมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ญาติพี่น้อง กัลยาณมิตรทางธรรม และเพื่อนๆ ทุกคนที่ให้กำลังใจในการศึกษาและให้ความช่วยเหลือในการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จนสำเร็จด้วยดี

คุณค่าและประโยชน์ของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอมอบเป็นกตัญญูกตเวทิตา แด่บุพการี อุปัชฌาย์ บูรพาจารย์ และผู้มีพระคุณทุกท่านทั้งในอดีตและปัจจุบัน ที่ทำให้ข้าพเจ้าเป็นผู้มีการศึกษาและประสบความสำเร็จมาจนตราบเท่าทุกวัน

ชัยมงคล อาจโยธา

# สารบัญ

หน้า

# สารบัญภาพ

**ภาพที่** **หน้า**

# บทที่ 1

# บทนำ

## 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ทวิภาวะของสสารในรูปของคลื่นและอนุภาคเป็นแนวคิดสำคัญ ที่นักเรียนควรจะต้องเข้าใจสำหรับการเรียนวิชาฟิสิกส์ ในหัวข้อกลศาสตร์ควอนตัม ซึ่งแนวคิดนี้ได้มีการโต้เถียงมานานหลายศตวรรษว่าธรรมชาติของแสงเป็นคลื่นหรืออนุภาค โดยนิวตันเชื่อว่าแสงประกอบด้วยอนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูง แต่ฮอยเกนส์โต้แย้งว่าแสงเป็นคลื่น จนในเวลาต่อมาได้มีการทดลองพบว่าธรรมชาติของแสงสามารถประพฤติตัวเป็นคลื่นได้ โดยยืนยันได้จากสมบัติการแทรกสอดและการเลี้ยวเบนของแสง (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2551) ปรากฏการณ์เลี้ยวเบนของแสงสามารถที่จะจำแนกออกเป็น 2 ประเภท คือปรากฏการณ์เลี้ยวเบนในสนามใกล้ซึ่งสามารถอธิบายด้วยการเลี้ยวเบนของเฟรสเนล (Fresnel diffraction) และปรากฏการณ์เลี้ยวเบนในสนามไกล ซึ่งสามารถอธิบายด้วยการเลี้ยวเบนของฟรอนโฮเฟอร์ (Fraunhofer diffraction) หนึ่งในปรากฏการณ์ที่สำคัญในสนามใกล้ คือปรากฏการณ์ทาร์บอท (Talbot effect) ซึ่งสังเกตเห็นได้เมื่อมีแหล่งกำเนิดแสงอาพันธ์เลี้ยวเบนผ่านเกรตติงแล้วไปสร้างริ้วรอยการแทรกสอดหลังเกรตติง (Temnuch, Deachapunya, Panthong, Chiangga, & Srisuphaphon, 2018) ที่ริ้วรอยการแทรกสอดที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับคาบของเกรตติง ซึ่งระยะห่างระหว่างเกรตติงและตำแหน่งฉากรับเรียกว่าระยะทาร์บอท (Talbot, 1836)

ไอน์สไตน์ได้อธิบายปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริกยืนยันว่า แสงสามารถประพฤติตัวเป็นอนุภาคได้ ซึ่งอนุภาคนั้นเรียกว่าโฟตอน และเดอบรอยล์ได้เสนอแนวคิดในทางกลับกัน คืออนุภาคสามารถประพฤติตัวเป็นคลื่นได้ (สสวท., 2551) สำหรับแนวคิดนี้ยากที่จะสังเกตได้ในชีวิตประจำวันของคนทั่วไป (Hackermüller et al., 2003) แต่การทดลองสามารถแสดงให้เห็นว่าทวิภาวะของคลื่นและอนุภาคนั้นเป็นจริง ด้วยวิธีอินเตอร์เฟอโรเมทรี (Interferometry) ของโฟตอน อิเล็กตรอน นิวตรอนและอะตอม (Nairz, Arndt, & Zeilinger, 2003) จนกระทั่งถึงปัจจุบันนี้ได้มีการยืนยันแนวคิดดังกล่าวโดยขยายจากอนุภาคไปสู่โมเลกุลที่มีขนาดใหญ่ และซับซ้อนมากยิ่งขึ้น เช่น โมเลกุลที่ประกอบด้วย คาร์บอน 60 อะตอม และ 70 อะตอม เป็นต้น (Brezger et al., 2002) วิธีอินเตอร์เฟอโรเมทรีของคลื่นสสาร (Matter wave) สามารถอธิบายปริมาณทางควอนตัมและสามารถประยุกต์ใช้กับการวัดที่มีความแม่นยำได้ (Bach, Gronniger, & Batelaan, 2013) เช่น การวัดค่าคงที่นิวตันของความโน้มถ่วง (Newtonian constant of gravity) จากอะตอมซีเซียม (Cs) (Fixler, Foster, McGuirk, & Kasevich, 2007) การวัดความมีขั้วของโมเลกุล ที่ประกอบด้วยโมเลกุลคาร์บอน-60 และโมเลกุลคาร์บอน-70 ในสนามใกล้ (Berninger, Stefanov, Deachapunya, & Arndt, 2007) เป็นต้น

การค้นพบสมบัติความเป็นทวิภาวะของสสารในรูปของคลื่นและอนุภาคของโมเลกุลใหญ่ถือเป็นความท้าทายของการทดลอง จนได้มีการทดลองกับฟูลเลอรีน (Fullerenes) ซึ่งเป็นโมเลกุลขนาดใหญ่ประกอบด้วย คาร์บอน 60 อะตอม รูปทรงเป็นทรงกลมกลวง ซึ่งบางครั้งเรียกว่า บักกีบอล (Buckyball) เพราะมักจะถูกเปรียบเทียบกับลูกฟุตบอล (Arndt et al., 1999) ซึ่งเมื่อพิจารณาความยาวคลื่นของเดอบรอยล์ (De Broglie wavelength) ฟูลเลอรีนเป็นทางเลือกที่เหมาะสม เพราะว่ามีพฤติกรรมคลื่นสสารไม่ประจำที่ (Delocalized matter wave) และสามารถที่จะแสดงลักษณะการเปลี่ยนผ่านระหว่างพฤติกรรมทางควอนตัมและคลาสสิกได้ (Greenberger, Hentschel, & Weinert, 2009)

จากที่กล่าวมา ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะต้องการศึกษาธรรมชาติของโมเลกุลคาร์บอน-60 ที่ประกอบด้วย คาร์บอน 60 อะตอม โดยใช้กลศาสตร์ควอนตัมแบบไฟยน์แมนคำนวณสำหรับการเลี้ยวเบนในสนามใกล้ แล้วจำลองความหนาแน่นของความโอกาสที่จะพบอนุภาค ด้วยคอมพิวเตอร์ เพื่อที่จะเปรียบเทียบกับผลการทดลองที่ตรวจวัดได้จากริ้วรอยการแทรกสอดของโมเลกุลคาร์บอน-60 จากห้องปฏิบัติการ เพื่อจะนำไปสู่ การบรรยายความเป็นทวิภาวะของสสารในรูปของคลื่นและอนุภาคของโมเลกุลขนาดใหญ่ รวมถึงการศึกษาผลของตัวแปรต่างๆ ทางกลศาสตร์ที่จะมีผลต่อการกระจายตัวของริ้วรอยการแทรกสอด

## 1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.2.1 เพื่อศึกษากลศาสตร์ควอนตัมแบบไฟยน์แมนที่เลี้ยวเบนในสนามใกล้โดยใช้ปริพันธ์ตามเส้นทาง

1.2.2 ประยุกต์ใช้กลศาสตร์ควอนตัมแบบไฟยน์แมนเข้ากับการเลี้ยวเบนของโมเลกุลคาร์บอน-60 ภายใต้อิทธิพลสนามไฟฟ้าคงที่

## 1.3 กรอบแนวคิดในการวิจัย

ผู้วิจัยมีแนวคิดที่จะคำนวณหาตัวแผ่กระจาย ฟังก์ชันคลื่น และความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาค ซึ่งปรากฏบนริ้วรอยบนฉากรับ

## 1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

1.4.1 ทำให้ทราบถึงการบรรยายความเป็นทวิภาวะของสสารในรูปของคลื่นและอนุภาคของโมเลกุลขนาดใหญ่

1.4.2 ทำให้เข้าใจถึงการประยุกต์ใช้ตัวแผ่กระจายและฟังก์ชันคลื่นในกลศาสตร์ควอนตัมเพื่ออธิบายการเลี้ยวเบนของโมเลกุลคาร์บอน-60 ผ่านเกรตติง

1.4.3 สามารถเปรียบเทียบผลการจำลองความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคของโมเลกุลคาร์บอน-60 ที่ปรากฏบนริ้วรอยบนฉากรับในการทดลองจริง เพื่อศึกษาผลของตัวแปรต่างๆ ทางกลศาสตร์ที่จะมีผลต่อการกระจายตัวของริ้วรอยการแทรกสอด

## 1.5 ขอบเขตของการวิจัย

ศึกษาตัวแปรต่างๆที่สอดคล้องกับการทดลอง เพื่อที่จะบรรยายความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคของโมเลกุลคาร์บอน-60 โดยมีตัวแปรดังต่อไปนี้

1.5.1 ระยะระหว่างเกรตติงถึงฉากรับโมเลกุลที่ตำแหน่ง $z = L_T/4,\ L_T/2,\ L_T$ และ $2L_T$

1.5.2 ความเร็วเฉลี่ยของโมเลกุล 100 เมตรต่อวินาที ที่เลี้ยวเบนผ่านเกรตติง

1.5.3 ความคลาดเคลื่อนของความเร็วเฉลี่ย ของโมเลกุลในช่วงระหว่าง $\pm 10$ เมตรต่อวินาที ถึง $\pm 50$ เมตรต่อวินาที

1.5.4 ริ้วรอยการแทรกสอดหลังหน้ากากตรวจรับที่มีการเลื่อนตามแนวขวาง เป็นระยะ 2 คาบ ของเกรตติง

# บทที่ 2
# เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยมีความประสงค์ เพื่อที่จะศึกษาทวิภาวะของสสารในรูปของคลื่นอนุภาค และตัวแปรต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง ผู้วิจัยเริ่มต้นศึกษาอนุภาคอิสระโดยใช้วิธีของชเรอดิงเงอร์ เพื่อที่จะบรรยายผลเฉลย จากนั้นศึกษาปรากฏการณ์ทาร์บอท ซึ่งเป็นปรากฏการณ์ของคลื่นที่สามารถสังเกตได้ในสนามใกล้ เพื่อที่จะบรรยายการเลี้ยวเบนของเกรตติงและริ้วรอยการแทรกสอดที่ฉากรับ จะทำให้ทราบถึงความเข้มแสงของริ้วรอยการแทรกสอดในพิสัยใกล้ แล้วนำไปเปรียบเทียบกับความเป็นทวิภาวะของสสารในรูปของคลื่นและอนุภาค โดยอาศัยปริพันธ์ตามเส้นทางของไฟยน์แมน จากที่กล่าวมาผู้วิจัยดำเนินการศึกษา ตามหัวข้อที่เกี่ยวข้องต่อไปนี้

2.1 อนุภาคอิสระ

2.2 ปรากฏการณ์ทาร์บอท

2.2.1 ฟังก์ชันคลื่นของการเลี้ยวเบนในสนามใกล้

2.2.2 พรมแสงของการเลี้ยวเบนในสนามใกล้

2.3 ปริพันธ์ตามเส้นทางของไฟยน์แมน

2.3.1 ตัวแผ่กระจายสำหรับอนุภาคอิสระ

2.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

## 2.1 อนุภาคอิสระ

ในกลศาสตร์นิวตันนั้น อนุภาคอิสระหมายถึง อนุภาคที่ไม่มีแรงกระทำหรือแรงลัพธ์ที่กระทำต่ออนุภาคมีค่าเท่ากับศูนย์และอนุภาคจะมีสภาพสมดุล ส่วนในกลศาสตร์ควอนตัมนั้น อนุภาคอิสระหมายถึง อนุภาคที่อยู่ในสนามที่พลังงานศักย์มีค่าเท่ากันทุกแห่ง (นรา จิรภัทรพิมล, 2553) ซึ่งปรับค่าให้บริเวณทุกๆ ที่พลังงานศักย์ $V(x) = 0$ สถานะของอนุภาคสามารถบรรยายได้ด้วยฟังก์ชันคลื่น จะได้สมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi}{dx^2} = E\varphi \tag{2-1}$$

เมื่อ $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ และผลเฉลยทั่วไปในรูปของเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential form)

$$\varphi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \tag{2-2}$$

โดยที่ $A$ และ $B$ เป็นค่าคงที่ จะเห็นได้ว่ามีลักษณะเช่นเดียวกับอนุภาคในบ่อศักย์แต่จะไม่มีเงื่อนไขขอบเขตที่จะถูกใช้ เมื่อรวมพจน์ผลเฉลยที่ขึ้นกับเวลา $\exp(-iEt/\hbar)$ จะได้ฟังก์ชันคลื่นทั่วไปสำหรับอนุภาคอิสระเป็น

$$\psi(x,t) = Ae^{ik\left(x-\frac{\hbar k}{2m}t\right)} + Be^{-ik\left(x+\frac{\hbar k}{2m}t\right)} \tag{2-3}$$

เฟสของฟังก์ชันอยู่ในรูปของ $x \pm vt$ เมื่อ $v$ คือความเร็วเฟสของคลื่น โดยเครื่องหมาย $\pm$ ก็จะสอดคล้องกับทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่นในทิศ $+x$ และ $-x$ ตามลำดับ เนื่องจากว่าทุกๆ จุดที่อยู่บนคลื่นเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็วเท่ากัน ดังนั้นรูปร่างของคลื่นจึงไม่มีการเปลี่ยนแปลงขณะที่คลื่นแผ่กระจายออกไป เพราะฉะนั้นแล้ว พจน์แรกของสมการที่ (2-3) จะบอกถึงคลื่นเดินทางไปทางขวาและพจน์ที่สองคลื่นจะเดินทางไปทางซ้าย ซึ่งจะเห็นว่าทั้งสองพจน์ต่างกันเพียงแค่เครื่องหมายด้านหน้าของ $k$ ฟังก์ชันคลื่นตามสมการที่ (2-3) จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปใหม่ได้เป็น

$$\psi_k(x,t) = Ae^{i\left(kx-\frac{\hbar k^2}{2m}t\right)} \tag{2-4}$$

เมื่อ $k = \pm\sqrt{2mE}/h$ โดยที่ $k > 0$ คลื่นจะเดินทางไปทางขวา และ $k < 0$ คลื่นจะเดินทางไปซ้าย แต่อย่างไรก็ตาม ฟังก์ชันคลื่นที่ได้มานี้มีความไม่สมบูรณ์อยู่สองประการ ได้แก่ ประการที่หนึ่งค่าความเร็วเฟส (Phase velocity) ของคลื่นที่ได้คือ $v_{quantum} = \hbar k/2m$ หรือ $v_{quantum} = \sqrt{E/2m}$ แต่ค่าอัตราเร็วนี้ไม่ตรงกับอัตราเร็วของอนุภาคอิสระในกลศาสตร์ยุคเก่า ซึ่งเท่ากับ $v_{classic} = \sqrt{2E/m} = 2v_{quantum}$ ซึ่งชัดเจนว่าไม่สอดคล้องกัน และประการที่สอง ฟังก์ชันคลื่นที่ได้ไม่สามารถทำให้เป็นปกติ (Normalization) $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_k^* \psi_k dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx = |A|^2 (\infty)$ ดังนั้นการที่จะบรรยายสถานะของอนุภาคนั้น จะต้องใช้ผลรวมเชิงเส้น (Linear combination) จากผลเฉลยที่เป็นไปได้ทั้งหมด ในที่นี่คือผลรวมเชิงเส้นฟังก์ชันคลื่นจากแต่ละค่าของ $k$ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

ถ้าสมมติให้ $\phi(k)$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับ $k$ และเป็นตัวกำหนดสัดส่วนจากแต่ละ $k$ ในผลรวมเชิงเส้นของ $\psi_k(x,t)$ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด แต่เนื่องจาก $k$ มีค่าได้อย่างต่อเนื่องจะได้ฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคอยู่ในรูป

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \phi(k)\, e^{-i\left(kx-\frac{\hbar k^2}{2m}t\right)} \tag{2-5}$$

ขณะที่ฟังก์ชัน $\phi(k)$ สามารถหาได้จากฟังก์ชันคลื่นที่เวลา $t = 0$ หรือเงื่อนไขเริ่มต้น

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \phi(k)\, e^{\frac{\hbar k^2}{2m}t} \tag{2-6}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าสมการที่ (2-6) อยู่ในรูปของการแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform) เมื่อ $\omega = \hbar k^2 / 2m$ ดังนั้น ฟังก์ชัน $\phi(k)$ สามารถที่จะคำนวณได้จาก (Griffiths, 2005)

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi(x,0) e^{-ikx} \tag{2-7}$$

**ตัวอย่าง** การคำนวณหาผลเฉลยฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคอิสระใน 1 มิติ โดยใช้วิธีของ ชเรอดิงเงอร์ โดยสมมติอนุภาคมีฟังก์ชันคลื่นที่เวลา $t = 0$

$$\psi(x,0) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{a^2}} e^{ik_0 x} \tag{2-8}$$

จากสมการที่ (2-8) จะพบว่าฟังก์ชันคลื่นจะมีรูปแบบเป็นเกาส์เซียน โดยที่ $a$ คือรัศมีของการกระจายเกาส์เซียน (Gaussian radius) และ $k_0$ คือเลขคลื่น เพื่อที่จะหาผลเฉลยของอนุภาคอิสระ หาฟังก์ชันที่ปริภูมิ $k$ ใดๆ โดยแทนสมการที่ (2-8) ลงสมการที่ (2-7)

$$\begin{aligned} \phi(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{a^2}} e^{ik_0 x}\, e^{-ikx} dx \\ &= \left(\frac{1}{2\pi^3 a^2}\right)^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} e^{i(k_0-k)x} dx \end{aligned} \tag{2-9}$$

โดยให้ $\alpha = (k_0 - k)$ จะได้

$$\phi(k) = \left(\frac{1}{2\pi^3 a^2}\right)^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{a^2}\left(\left(x-\frac{a^2 i\alpha}{2}\right)^2 + \frac{a^4\alpha^2}{4}\right)} dx \tag{2-10}$$

เพื่อสมการที่ (2-10) จะสามารถทำปริพันธ์ได้ ต้องจัดรูปให้เข้ากับการหาปริพันธ์แบบเกาส์เซียน

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{2-11}$$

ดังนั้นสมการที่ (2-11) กำหนดให้ $s = x - a^2 i\alpha / 2$ จะได้

$$\phi(k) = \left(\frac{1}{2\pi^3 a^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{a^2\alpha^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{a^2}} ds \tag{2-12}$$

และให้ $\xi = s / a$ จะสามารถทำปริพันธ์ได้เป็น

$$\begin{aligned} \phi(k) &= \left(\frac{1}{2\pi^3 a^2}\right)^{\frac{1}{4}} a e^{-\frac{a^2\alpha^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \\ &= \left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{a^2(k-k_0)^2}{4}\right) \end{aligned} \tag{2-13}$$

สมการที่ (2-13) คือ ฟังก์ชันคลื่นในปริภูมิ $k$ ใดๆ และสามารถหาฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคอิสระ โดยแทนสมการที่ (2-13) ลงสมการที่ (2-5) จะได้

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{a^2(k-k_0)^2}{4}\right)\exp\left(i\left(kx-\frac{\hbar k^2}{2m}t\right)\right)dk \qquad (2\text{-}14)$$

กำหนดให้ $s=k-k_0$ จะสามารถจัดรูปสมการที่ (2-14) ใหม่ได้เป็น

$$\psi(x,t)=\left(\frac{a^2}{8\pi^3}\right)^{\frac{1}{4}}e^{\left(ixk_0-\frac{i\hbar tk_0^2}{2m}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\left(\frac{a^2}{4}+\frac{i\hbar t}{2m}\right)s^2+\left(ix-\frac{ik_0\hbar t}{m}\right)s\right)ds \qquad (2\text{-}15)$$

สมการที่ (2-15) อยู่ในรูปแบบของปริพันธ์เกาส์เซียน

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\left(ax^2+bx\right)\right)dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) \qquad (2\text{-}16)$$

จึงได้ฟังก์ชันคลื่น

$$\psi(x,t)=\left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{\frac{1}{4}}e^{ik_0\left(x-\frac{\hbar tk_0}{2m}\right)}\frac{1}{\left(1+\frac{2i\hbar t}{ma^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\left(x-\frac{k_0\hbar t}{m}\right)^2/\left(a^2+\frac{2i\hbar t}{m}\right)\right) \qquad (2\text{-}17)$$

จากสมการที่ (2-17) สามารถที่จะจัดพจน์

$$\left(1+\frac{2i\hbar t}{ma^2}\right)^{1/2}=\left(\sqrt{1+\frac{4\hbar^2t^2}{m^2a^4}}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{i}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\hbar t}{ma^2}\right)\right) \qquad (2\text{-}18)$$

ดังนั้น เมื่อแทนสมการที่ (2-18) ลงสมการที่ (2-17) จะได้

$$\begin{aligned}\psi(x,t)=&\left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{4\hbar^2t^2}{m^2a^4}\right)^{-\frac{1}{4}}\exp\left(ik_0\left(x-\frac{\hbar k_0t}{2m}\right)\right)\exp\left(-\frac{i\theta}{2}\right)\\&\exp\left(-\left(x-\frac{\hbar k_0t}{m}\right)^2/\left(a^2+\frac{2i\hbar t}{m}\right)\right)\end{aligned} \qquad (2\text{-}19)$$

เมื่อ $\theta=\tan^{-1}\left(2\hbar t/ma^2\right)$ และสมการที่ (2-19) คือ ฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคอิสระ ที่เคลื่อนที่ไปตามแนวแกน $x$ ด้วยความเร็ว $v$ โดยสามารถสังเกตได้จากพจน์ $x-k_0\hbar t/m$ ซึ่ง $v=k_0\hbar/m$ สอดคล้องกับความสัมพันธ์ของความยาวคลื่นเดอบรอยล์ $mv=h/\lambda$

## 2.2 ปรากฏการณ์ทาร์บอท (Talbot effect)

สำหรับการเลี้ยวเบนของคลื่น ปรากฏการณ์เลี้ยวเบนสามารถที่จะจำแนกออกเป็น 2 ประเภท คือ ปรากฏการณ์เลี้ยวเบนในสนามใกล้ ซึ่งสามารถอธิบายด้วยการเลี้ยวเบนของเฟรสเนล (Fresnel diffraction) และปรากฏการณ์เลี้ยวเบนในสนามไกล ซึ่งสามารถอธิบายด้วยการเลี้ยวเบนของฟรอนโฮเฟอร์ (Fraunhofer diffraction) หนึ่งในปรากฏการณ์ที่สำคัญในสนามใกล้ คือ ปรากฏการณ์ทาร์บอท (Talbot effect) ซึ่งได้ถูกค้นพบโดย Henry Fox Talbot ในปี ค.ศ. 1836 ปรากฏการณ์นี้เกิดขึ้นเมื่อมีแหล่งกำเนิดแสงอาพันธ์เลี้ยวเบนผ่านเกรตติง แล้วไปสร้างภาพริ้วรอยการแทรกสอดหลังเกรตติง โดยที่ริ้วรอยการแทรกสอดที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับคาบของเกรตติง ซึ่งระยะห่างระหว่างเกรตติงและตำแหน่งฉากรับถูกเรียกว่า ระยะทาร์บอท$\left(L_T\right)$ (Talbot, 1836)

### 2.2.1 ฟังก์ชันคลื่นของการเลี้ยวเบนในสนามใกล้

สมมติให้ คลื่นระนาบ (Plane wave) แผ่ไปในทิศทางตามแนวแกน $z$ ที่เวลา $t$ ใดๆ จะสามารถเขียนฟังก์ชันคลื่นได้เป็น

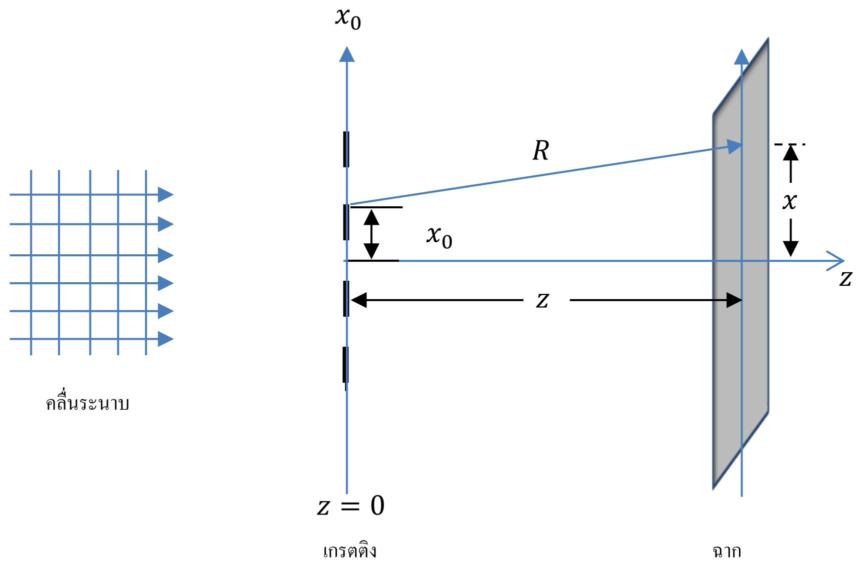
$$\psi = A\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \tag{2-20}$$

เมื่อ $A$ คือ แอมพลิจูดคลื่น และ $k$ คือ เลขคลื่น (Wave number) ซึ่งเท่ากับ $k = 2\pi / \lambda$ โดยที่ $\omega$ คือ ความถี่เชิงมุม

จากสมการที่ (2-20) เมื่อฉายแสงอาพันธ์ที่มีความยาวคลื่น $\lambda$ แผ่ไปตามแนวแกน $z$ เลี้ยวเบนผ่านเกรตติงที่ตำแหน่ง $z = 0$ จะสามารถเขียนฟังก์ชันคลื่นใหม่ได้

$$\psi\left(x_0, z=0\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{ink_d x_0} \tag{2-21}$$

เมื่อ $k_d = 2\pi / d$ โดยที่ $d$ คือคาบของเกรตติง และ $A_n = \sin\left(n\pi f\right)/ n\pi$ เป็นองค์ประกอบฟูเรียร์ สำหรับเกรตติงที่มีค่าอัตราส่วนของช่องเปิดต่อหนึ่งคาบของเกรตติงเท่ากับ $f$ ตัวอย่างเช่น $f = 0.1$ คือช่องเปิดมีขนาด 1 ใน 10 ของช่องปิด แต่สำหรับเกรตติงทั่วไป $f = 0.5$ ช่องเปิดและปิดจะมีขนาดเท่ากัน เป็นต้น




ภาพที่ 2-1 แสดงคลื่นระนาบแผ่ไปในทิศทางตามแนวแกน $z$ แล้วเลี้ยวเบนผ่านเกรตติง ที่ตำแหน่ง $z = 0$ โดยระยะ $z$ เป็นระยะระหว่างเกรตติงถึงฉาก $x_0$ เป็นระนาบของเกรตติง และ $R$ เป็นระยะจากแหล่งกำเนิดคลื่นถึงจุดสังเกตบนฉาก

สมมติให้ลำแสงแผ่ไปในทิศทางตามแนวแกน $z$ แล้วเลี้ยวเบนผ่านเกรตติงที่ตำแหน่ง $z = 0$ โดยระยะ $z$ จะเป็นระยะห่างระหว่างเกรตติงถึงฉาก จึงสามารถหาฟังก์ชันคลื่นในส่วนของตำแหน่งหลังเกรตติง ได้ด้วยปริพันธ์ของฮอยเกนส์-เฟรสเนล (Huygens-Fresnel integral)

$$\psi(x,z) = \sqrt{\frac{i}{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x_0, z=0)e^{(-ikR)}}{\sqrt{R}} dx_0 \qquad (2\text{-}22)$$

จากภาพที่ 2-1 ระยะ $R = \sqrt{(x-x_0)^2 + z^2}$ เมื่อ $R$ คือ ระยะจากแหล่งกำเนิดคลื่นถึงจุดสังเกตบนฉาก โดยที่ $x$ และ $x_0$ คือใช้การประมาณ $(1+x)^n \simeq 1+nx$ เมื่อ $x \ll 1$ จะได้

$$R = z\sqrt{1+\frac{(x-x_0)^2}{z^2}} \simeq z + \frac{(x-x_0)^2}{2z} \qquad (2\text{-}23)$$

และที่ระยะ $1/\sqrt{R} = 1/\left(\sqrt{(x-x_0)^2+z^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ สามารถประมาณได้เช่นกันเป็น

$$\frac{1}{\sqrt{R}} \simeq \frac{1}{\sqrt{z}}\left(1+\frac{(x-x_0)^2}{2z^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq \left(z+\frac{(x-x_0)^2}{2z}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (2\text{-}24)$$

แทนค่าสมการที่ (2-23) และ (2-24) ลงใน (2-22) จะได้

$$\psi(x,z)=\sqrt{\frac{i}{\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\exp\left(ink_d x_0\right)\exp\left(-ik\left(z+\frac{\left(x-x_0\right)^2}{2z}\right)\right)}{\sqrt{z+\left(\left(x-x_0\right)^2/2z\right)}}dx_0 \tag{2-25}$$

โดยอาศัยประมาณค่าเฟรสเนล (Fresnel approximation) $z$ มีค่าค่อนข้างมากเมื่อเปรียบเทียบกับ $x-x_0$ ดังนั้นสมการที่ (2-25) เป็น

$$\psi(x,z)=\sqrt{\frac{i}{\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\exp\left(ink_d x_0\right)\exp\left(-ik\left(z+\frac{\left(x-x_0\right)^2}{2z}\right)\right)}{\sqrt{z}}dx_0 \tag{2-26}$$

สามารถกระจายพจน์ที่อยู่ในเอกซ์โพเนนเชียลได้เป็น

$$\psi(x,z)=\sqrt{\frac{i}{\lambda}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n z^{-\frac{1}{2}}e^{-ikz}e^{-\frac{ikx^2}{2z}}\int_{-\infty}^{\infty}dx_0\exp\left(\left(-\frac{ik}{2z}\right)x_0^2-2\left(\frac{-ikx}{2z}-\frac{ink_d}{2}\right)x_0\right) \tag{2-27}$$

อาศัยการแปลงกำลังสองสัมบูรณ์ $ax^2-2bx=a\left(x-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b^2}{a}$ จะสามารถจัดสมการที่ (2-27) ได้เป็น

$$\begin{aligned}\psi(x,z)=&\sqrt{\frac{i}{\lambda}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n z^{-\frac{1}{2}}e^{-ikz}e^{-\frac{ikx^2}{2z}}\exp\left(\left(\frac{zi}{2k}\right)\left(\frac{kx}{z}+nk_d\right)^2\right)\\&\int_{-\infty}^{\infty}dx_0\exp\left(\left(-\frac{ik}{2z}\right)\left(x_0-\left(\left(\frac{-ikx}{2z}-\frac{ink_d}{2}\right)/\left(-\frac{ik}{2z}\right)\right)\right)^2\right)\end{aligned} \tag{2-28}$$

จากผลปริพันธ์เกาส์เซียน $\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-a\left(x_0-b\right)^2\right)dx_0=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ จะได้ฟังก์ชันคลื่น

$$\psi(x,z)=\exp\left(-ik\left(z+\frac{x^2}{2z}\right)\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\exp\left(\left(\frac{iz}{2k}\right)\left(\frac{kx}{z}+nk_d\right)^2\right) \tag{2-29}$$

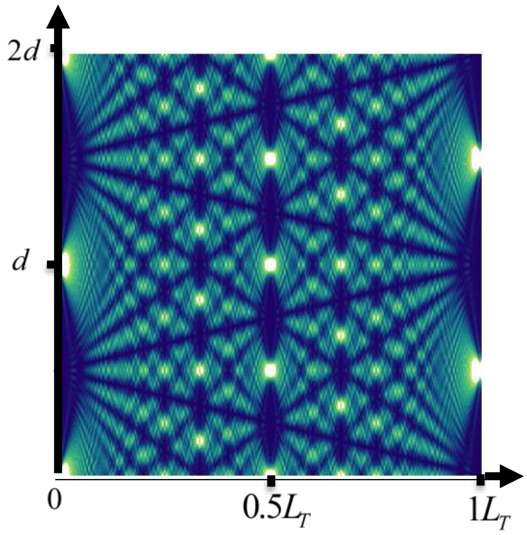
และความเข้มเข้มแสงของริ้วรอยการแทรกสอดสามารถหาได้จาก $I=\psi_n(x,z)\,\psi_m^*(x,z)$

$$I=\left(\frac{2\pi}{k}\right)\sum_{n,m}A_nA_m\exp\left(i\left(\frac{2\pi}{d}\right)(n-m)x+\frac{iz\pi}{L_T}\left(n^2-m^2\right)\right) \tag{2-30}$$

เมื่อ $L_T=d^2/\lambda$ คือระยะทาร์บอท

### 2.2.2 พรมแสงของการเลี้ยวเบนในสนามใกล้

จากสมการที่ (2-30) เมื่อนำมาจำลองในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ จะได้ริ้วรอยการแทรกสอดบนระนาบ $xz$ ซึ่งเรียกว่า พรมของแสงในปรากฏการณ์ทาร์บอท ดังภาพที่ 2-2




ภาพที่ 2-2 แสดงพรมของแสง ที่เกิดจาก $f = 0.1$ ที่ระยะ $1L_T = 7.52\ cm$ เมื่อ $d = 200\ \ \mu m$ และ $\lambda = 532\ nm$ ตามสมการที่ (2-30) โดยใช้ $n = \pm 25$

## 2.3 ปริพันธ์ตามเส้นทางของไฟยน์แมน (Feynman path integrals)

วิธีอินเตอร์เฟอโรเมทรี (Interferometry method) สำหรับคลื่นสสาร เป็นวิธีการวัดที่ใช้หลักการรวมคลื่น ซึ่งสามารถที่จะวัดค่าคงตัวความโน้มถ่วงสากล วัดความเป็นขั้วของโมเลกุลขนาดใหญ่ เช่น โมเลกุลที่ประกอบด้วย คาร์บอน 60 อะตอม และ 70 อะตอม เป็นต้น นอกจากนี้เป็นวิธีที่สามารถจะบรรยายความเป็นทวิภาวะของสสารในรูปของคลื่นและอนุภาค โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการจัดการกับอะตอม เช่น อิเล็กตรอน นิวตรอน เป็นต้น การอธิบายปรากฏการณ์นี้ไม่สามารถที่จะนำกลศาสตร์ดั้งเดิมมาพิจารณาได้ ดังนั้นจำเป็นต้องใช้กลศาสตร์ควอนตัมมาพิจารณา ซึ่งปริพันธ์ตามเส้นทางของไฟยน์แมนเป็นหนึ่งในวิธีการของการหาผลเฉลยซึ่งจะทำให้ทราบตัวแผ่กระจาย แล้วนำไปสู่ฟังก์ชันคลื่นซึ่งพบว่าเป็นวิธีที่สอดคล้องกับทฤษฎีของไฮเซนเบิร์กและชเรอดิงเงอร์ นอกจากนี้ เมื่อลากรานเจียนอยู่ในรูปแบบของสมการกำลังสอง ปริพันธ์ตามเส้นทางของไฟยน์แมนสามารถให้ผลเฉลยแม่นตรงได้

ในปี ค.ศ.1948 ไฟยน์แมน ได้ค้นพบวิธีการคำนวณหาแอมพลิจูดของความน่าจะเป็นซึ่งพบว่า แอมพลิจูดย่อยๆ รวมกันคือ แอมพลิจูดของความน่าจะเป็นทั้งหมดของคลื่นที่สอดคล้องอยู่

กับอนุภาคโดยที่แต่ละแอมพลิจูดย่อยนั้นต้องสอดคล้องกับทางเดินหนึ่งทางเดินใดของอนุภาค และสำหรับการคำนวณ จะพิจารณาเฉพาะในกรณีที่เป็นหนึ่งมิติเท่านั้น

วิธีการคำนวณของไฟยน์แมน เริ่มต้นจะแสดงตำแหน่งของอนุภาคด้วย $x$ ซึ่งเป็นฟังก์ชัน ณ เวลา $t$ หรือสามารถเขียนอีกรูปแบบหนึ่งได้ $x(t)$ ถ้าอนุภาคเริ่มต้นจากตำแหน่ง $x_a$ เมื่อเวลา $t_a$ ไปยังตำแหน่งสุดท้ายที่ $x_b$ ณ เวลา $t_b$ หรืออาจจะกล่าวได้ว่าอนุภาคเคลื่อนที่จาก $a$ ไปยัง $b$ ดังนั้น $x(t_a) = x_a$ และ $x(t_b) = x_b$ เมื่อสมมติว่าแอมพลิจูดรวมทั้งหมดที่อนุภาคเคลื่อนที่จาก $a$ มายัง $b$ คือ $K(a,b)$ และเรียกแอมพลิจูดนี้ว่า ตัวแผ่กระจาย (Propagator) ความหมายของตัวแผ่กระจายคือเป็นการแสดงถึงทางเดินที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่อนุภาคเคลื่อนที่จาก $a$ มายัง $b$ การที่อนุภาคจาก $a$ มายัง $b$ มีได้หลายเส้นทางนั้นเป็นลักษณะเฉพาะของระบบควอนตัม ซึ่งแตกต่างกับระบบแบบฉบับที่อนุภาคเคลื่อนที่จาก $a$ มายัง $b$ มีได้เพียงบางเส้นทางซึ่งเรียกว่า ทางเดินแบบฉบับ (Classical path)

การคำนวณหาค่าแอมพลิจูด $K(a,b)$ สามารถดำเนินการได้ด้วยการรวมแอมพลิจูดย่อยๆ ที่สอดคล้องกับทางเดินที่เป็นไปได้ทั้งหมด ซึ่งไฟยน์แมนพบว่า ขนาดของแอมพลิจูดที่สอดคล้องกับแต่ละทางเดินของอนุภาคนั้นจะมีค่าเท่ากันเสมอ แตกต่างกันเพียงแค่เฟสเท่านั้นและพบว่าเฟสมีขนาดเท่ากับกิริยา (Action) $S$ หารด้วย $\hbar$ ซึ่งให้ความหมายแก่แอมพลิจูดของความน่าจะเป็นดังนี้คือ ถ้าทราบความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาคที่เคลื่อนที่จากจุด $x_a$ ที่เวลา $t_a$ มายังจุด $x_b$ ที่เวลา $t_b$ ความน่าจะเป็นนี้จะมีค่าเท่ากับแอมพลิจูดกำลังสองสัมบูรณ์หรือ

$$P(b,a) = |K(b,a)|^2 \tag{2-31}$$

แอมพลิจูดทั้งหมดตามแนวคิดของไฟยน์แมนสามารถเขียนได้ดังสมการต่อไปนี้

$$K(b,a) = \sum_{\text{รวมทุกเส้นทางจาก } x_a \text{ มายัง } x_b} \Psi\left[x(t)\right] \tag{2-32}$$

เมื่อ $\Psi\left[x(t)\right]$ คือ ขนาดของแอมพลิจูดในแต่ละเส้นทางซึ่งมีค่าเท่ากัน ยกเว้นเฟสของคลื่นเท่านั้นที่ต่างกันหรือได้

$$\Psi\left[x(t)\right] = (\text{constant})\exp\left\{\frac{i}{\hbar} S\left[x(t)\right]\right\} \tag{2-33}$$

เมื่อ $S\left[x(t)\right]$ คือ กิริยา

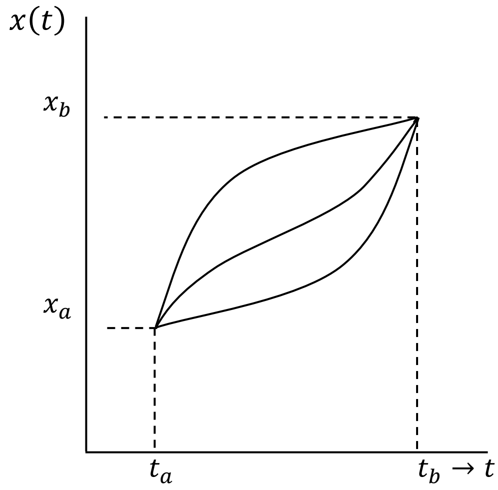
$$S\left[x(t)\right] = \int_{t_a}^{t_b} L\left(\dot{x}(t), x(t), t\right) dt \tag{2-34}$$

โดยที่

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - V(x,t) \tag{2-35}$$

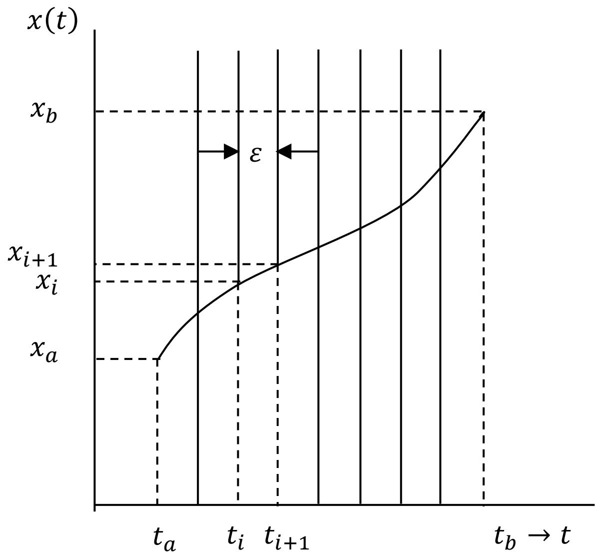
เป็นลากรานเจียน (Lagrangian) ของระบบ เมื่ออนุภาคมีมวล $m$ และเคลื่อนที่อยู่ภายใต้ศักย์ $V(x,t)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับพิกัดและเวลา

จากสมการที่ (2-32) เมื่อพิจารณาจะพบว่าการที่จะรวมทางเดินที่เป็นไปได้ทั้งหมด แทบจะเป็นไปไม่ได้เลย เพราะจำนวนเส้นทางเดินทั้งหมดมีจำนวนมากมายหรือแทบจะเป็นอนันต์ แต่อย่างไรก็ตามไฟยน์แมนได้พบเทคนิคคณิตศาสตร์ ที่จะสามารถคำนวณหาเส้นทางทั้งหมดได้ โดยสมมติว่าเส้นทางเดินของอนุภาคมีจำนวนมากกว่าหนึ่งเส้นทาง ดังแสดงในภาพที่ 2-3 (มีเส้นทางอื่นอีกแต่ไม่ได้แสดงไว้ในภาพ)




ภาพที่ 2-3 แสดงเส้นทางของอนุภาคเพียงแค่สามเส้นทางที่เป็นไปได้จากตำแหน่ง $x_a$ ไป $x_b$

แบ่งช่วงเวลาจาก $t_a$ ถึง $t_b$ ออกเป็นช่วงๆ ที่มีความกว้างเท่ากับ $\varepsilon$ การแบ่งเช่นนี้ทำให้ได้เวลาเป็นชุด $t_i$ ที่มีระยะห่างเท่ากับ $\varepsilon$ โดยที่ค่าของ $t_i$ ต้องอยู่ระหว่าง $t_a$ กับ $t_b$ ในแต่ละชุดของ $t_i$ อาจเลือกชุดของ $x_i$ ที่สอดคล้องกับชุดของ $t_i$ ได้หนึ่งชุด ดังภาพที่ 2-4




ภาพที่ 2-4 แสดงการแบ่งเส้นทางของอนุภาคโดยแบ่งออกเป็นเส้นทางย่อยๆ

โดยการเชื่อมโยงจุดเหล่านี้เข้าด้วยกันด้วยเส้นตรง จะได้ทางเดินของอนุภาคหนึ่งเส้น ส่วนทางเดินที่เป็นไปได้ทั้งหมดก็จะได้จากการปริพันธ์ตัวแปร $x_i$ ตั้งแต่ $i=1$ ถึง $N-1$ โดยแบ่งได้ดังนี้

$$N\varepsilon = t_b - t_a,\ \ \varepsilon = t_{i+1} - t_i,\ \ t_0 = t_a,\ \ t_N = t_b,\ \ x_0 = x_a \text{ และ } x_N = x_b$$

เส้นทางของอนุภาคในลักษณะนี้ทำให้สามารถเขียนเป็นสมการ ได้ดังนี้

$$K(b,a) \approx \iint \ldots \int \Psi\left(x(t)\right) dx_1 dx_2 \ldots dx_{N-1} \tag{2-37}$$

พบว่าสมการที่ (2-37) ยังถือว่าไม่เท่ากับสมการที่ (2-32) เพราะว่ายังไม่ได้ให้ค่า $\varepsilon \to 0$ และจะบังคับให้ $\varepsilon \to 0$ โดยตรงยังไม่ได้ เพราะจะทำให้สมการนี้ไม่มีขีดจำกัด ดังนั้น ต้องหาแฟกเตอร์ที่ทำให้เป็นปกติ (Normalizing factor) $A$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ $\varepsilon$ ที่จะทำให้มีค่าเป็นที่ยอมรับได้เมื่อ $\varepsilon \to 0$ ซึ่งพบว่า $A = \left(2\pi i\hbar\varepsilon / m\right)^{1/2}$ โดยแบ่งทางเดินออกเป็นเส้นทางย่อยๆ การรวมทางเดินทั้งหมดจึงเท่ากับการปริพันธ์พิกัดเหล่านี้ เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่ได้ตรงกับเส้นทางเดินที่แท้จริง หลังจากการปริพันธ์แล้วจะต้องบังคับให้ $\varepsilon \to 0$ จึงได้

$$K(b,a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{A} \iint \ldots \int e^{\frac{i}{\hbar} S[b,a]} \frac{dx_1}{A} \frac{dx_2}{A} \ldots \frac{dx_{N-1}}{A} \tag{2-38}$$

เมื่อ

$$A = \sqrt{2\pi i\hbar\varepsilon / m} \tag{2-39}$$

ในที่นี้

$$S[b,a]=\int_{t_a}^{t_b} L\left(\dot{x}(t),x(t),t\right)dt \tag{2-40}$$

การปริพันธ์ จะต้องดำเนินการในลักษณะที่ได้แสดงไว้ในภาพที่ 2-3 และ 2-4 และสามารถเขียนเป็นสมการอีกแบบหนึ่งได้ดังนี้

$$K(b,a)=\int_a^b e^{\frac{i}{\hbar}S[b,a]}D\left(x(t)\right) \tag{2-41}$$



สมการที่ (2-41) คือตัวแผ่กระจายซึ่ง เรียกว่า ปริพันธ์ตามเส้นทาง (วิรุฬห์ สายคณิต, 2525)

### 2.3.1 ตัวแผ่กระจายสำหรับอนุภาคอิสระ

อนุภาคอิสระคืออนุภาคที่เคลื่อนที่โดยไม่มีอิทธิพลจากแรงใดๆ ดังนั้นพลังงานของระบบจึงประกอบด้วยเฉพาะพลังงานจลน์เพียงเท่านั้น ดังนั้นสามารถเขียนลากรานเจียนได้

$$L\left(\dot{x}(t),x(t),t\right)=\frac{m\dot{x}^2}{2} \tag{2-42}$$

อาศัยสมการที่ (2-40) จะได้กิริยา

$$S[b,a]=\frac{m}{2\varepsilon}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x_{i-1}\right)^2 \tag{2-43}$$

แทนสมการที่ (2-43) ลงในสมการที่ (2-38) จะได้

$$K(b,a)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}\right)^{-\frac{N}{2}}\int\int...\int e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2\varepsilon}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x_{i-1}\right)^2}dx_1dx_2...dx_{N-1} \tag{2-44}$$

จากสมการที่ (2-44) จะเห็นว่าปริพันธ์จะอยู่ในรูปแบบของปริพันธ์เกาส์เซียน

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{a\left(x''-x\right)^2+b\left(x-x'\right)^2\right\}dx=\sqrt{\frac{-\pi}{(a+b)}}\exp\left\{\left(\frac{ab}{a+b}\right)\left(x''-x'\right)^2\right\} \tag{2-45}$$

ที่ $N=2$ จะได้ปริพันธ์ในสมการที่ (2-45)

$$\left(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}\right)^{-\frac{2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2\varepsilon}\sum_{i=1}^{2}\left(x_i-x_{i-1}\right)^2}dx_1=\left(\frac{2\pi i\hbar(2\varepsilon)}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}e^{\left[\left(\frac{mi}{2\hbar(2\varepsilon)}\right)\left((x_2)-x_0\right)^2\right]} \tag{2-46}$$

และเช่นเดียวที่ $N=3$ จะได้

$$\left(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}\right)^{-\frac{3}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2\varepsilon}\sum_{i=1}^{3}\left(x_i-x_{i-1}\right)^2}dx_1dx_2=\left(\frac{2\pi i\hbar(3\varepsilon)}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}e^{\left[\left(\frac{im}{2\hbar(3\varepsilon)}\right)\left((x_3)-x_0\right)^2\right]} \tag{2-47}$$

ดังนั้นปริพันธ์ที่ $N$

$$\left(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}\right)^{-\frac{N}{2}}\int\int...\int e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2\varepsilon}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x_{i-1})^2}dx_1dx_2...dx_{N-1}=\left(\frac{2\pi i\hbar(N\varepsilon)}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}e^{\left[\left(\frac{im}{2\hbar(N\varepsilon)}\right)(x_N-x_0)^2\right]} \quad (2\text{-}48)$$

แทนสมการที่ (2-48) ลงในสมการที่ (2-44) ดำเนินการลิมิตและเปลี่ยนตัวแปรที่กำหนด จะได้

$$K(b,a)=\left(\frac{2\pi i\hbar(t_b-t_a)}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\left(\frac{im}{2\hbar(t_b-t_a)}\right)(x_b-x_a)^2\right) \quad (2\text{-}49)$$

ซึ่งก็คือ ตัวแผ่กระจาย ที่จะให้ข้อมูลเกี่ยวกับฟังก์ชันคลื่นและพลังงานของระบบได้ (วิรุฬห์ สายคณิต, 2525)

นอกจากนี้ตัวแผ่กระจายสมการที่ (2-49) สามารถที่จะคำนวณได้อีกวิธีหนึ่ง ซึ่งอยู่ในสูตรของเพาลี (Pauli's formula) (Christian Grosche, 1998)

$$K(b,a)=\frac{1}{(2\pi i\hbar)^{D/2}}\sqrt{\det\left\{\frac{-\partial^2 S_{cl}[x_b,x_a]}{\partial x_b{}^c\partial x_a{}^d}\right\}}\ \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_{cl}[x_b,x_a]\right\} \quad (2\text{-}50)$$

เมื่อ $\partial^2 S_{cl}[x_b,x_a]/\partial x_b{}^c\partial x_a{}^d$ คือเมทริกซ์ $D\times D(c,d=1,...,D)$ และ $S_{cl}$ คือทางเดินแบบฉบับ แต่สำหรับสมการที่ (2-50) สามารถใช้ได้กับเฉพาะลากรานเจียนที่อยู่ในรูปแบบสมการกำลังสองเท่านั้น เช่น ฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ เป็นต้น

และนอกจากนี้ฟังก์ชันคลื่นในหนึ่ง 1 มิติที่ได้จากตัวแผ่กระจายสามารถที่จะคำนวณได้จากสมการ (Schulten, 2000)

$$\psi(x_b,t_b)=\int_{-\infty}^{\infty}dx_a\,K\left(x_b,t_b\,|\,x_a,t_a\right)\psi(x_a,t_a) \qquad \text{เมื่อ } t_b>t_a \quad (2\text{-}51)$$

จะพบว่าสมการที่ (2-51) คือฟังก์ชันคลื่นของชเรอดิงเงอร์ ดังนั้นถ้าทราบตัวแผ่กระจายที่ได้จากการปริพันธ์ตามเส้นทาง สามารถที่จะนำไปสู่ฟังก์ชันคลื่นของชเรอดิงเงอร์ได้

## งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Deachapunya and Srisuphaphon (2014) ศึกษาการตอบสนองจากการเลื่อนแบบตามแนวขวางของเกรตติงคู่ในปรากฏการณ์ทาร์บอท โดยฉายแสงเลเซอร์ที่มีความยาวคลื่น 532 นาโนเมตร ไปตกกระทบกับเกรตติงอันแรก จะทำให้เกิดการเลี้ยวเบน จากนั้นเพิ่มเกรตติงอีกหนึ่งอัน วางไว้หลังเกรตติงอันแรก ซึ่งจะทำหน้าที่เป็นหน้ากาก แล้วเลื่อนเกรตติงนี้ไปตามแนวขวาง จากผลการทดลองพบว่า เมื่อคาบของเกรตติงน้อยๆ ริ้วรอยของพรมแสงจะมีการตอบสนองมากขึ้น แต่การเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนของช่องเปิดของเกรตติงไม่มีมีผลทำให้ริ้วรอยการแทรกสอดของแสง

เปลี่ยนไป สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการตรวจวัดต่างๆ เช่น การตรวจวัดระยะทาง สเปกโตรมิเตอร์ และการตรวจวัดการสั่นสะเทือนในระดับความละเอียดสูง เป็นต้น

Temnuch, Deachapunya, Panthong, Chiangga, and Srisuphaphon (2018) เสนอคำอธิบายอีกรูปแบบหนึ่งของการบรรยายการเลี้ยวเบนของสนามใกล้และสนามไกล ซึ่งอยู่ภายใต้เงื่อนไขเดียวกัน เช่น ปรากฏการณ์ทาร์บอท และการทดลองของ สลิตเดียวและสลิตคู่ เป็นต้น โดยการดำเนินการวิจัยจะอยู่บนพื้นฐานของหลักการของฮอยเกน ซึ่งสามารถที่จะระบุขอบเขตระหว่างการเลี้ยวเบนจากสนามใกล้และสนามไกลได้

Berninger, Stefanov, Deachapunya, and Arndt (2007) ประยุกต์ใช้วิธีอินเฟอโรเมทรีของคลื่นสสาร เพื่อวัดความเป็นขั้วของโมเลกุลคาร์บอน-60 และคาร์บอน-70 โดยใช้ลำโมเลกุลดังกล่าวไปตกกระทบกับเกรตติงในระดับขนาดต่ำกว่าไมโครเมตร ซึ่งทำให้เกิดการเลี้ยวเบน จากนั้นสามารถสังเกตเห็นการเปลี่ยนแปลงริ้วรอยการแทรกสอดที่ได้รับอิทธิพลของสนามไฟฟ้า และสามารถวัดความเป็นขั้วของโมเลกุลคาร์บอน-60 ได้ $\alpha$=88.9±0.9±5.1 Å และโมเลกุลคาร์บอน-70 ได้ $\alpha = 108.5 \pm 2.0 \pm 6.2$ Å โดยความเป็นขั้วเป็นผลมาจากสนามไฟฟ้าซึ่งทำให้โมเลกุลเกิดการยืดตัวออกจากกัน ประจุบวกและประจุลบในโมเลกุลจะแยกออกจากกันในด้านตรงกันข้าม ดังนั้นอิทธิพลของสนามไฟฟ้าสามารถทำให้โมเลกุลไม่มีขั้วทำให้มีขั้วได้ ซึ่งเรียกว่า การเกิดไดโพลโมเมนต์เหนี่ยวนำ และสภาพของขั้วโมเลกุลที่เกิดขึ้นอยู่ระหว่างสนามไฟฟ้า

Fixler, Foster, McGuirk, and Kasevich (2007) วัดค่าคงตัวความโน้มถ่วงสากล โดยใช้เครื่องวัดความเอียงลาด (Gradiometer) ด้วยวิธีอินเตอร์เฟอโรเมทรีของอะตอม เครื่องวัดความเอียงลาด จะวัดความเร่งที่แตกต่างกันของเลเซอร์อะตอมเย็น Cs และวัดการเปลี่ยนแปลงของสนามโน้มถ่วงใน 1 มิติได้ เมื่ออะตอมของ Pb เข้ามาแทนที่อะตอมเย็น Cs ผลการทดลองพบว่าค่าคงตัว ความโน้มถ่วงสากล $G=6.693\times10^{-11}\ m^3/kg\ s^2$ พบความคลาดเคลื่อนมาตรฐานเท่ากับ $\pm0.027\times10^{-11}\ m^3/kg\ s^2$ และความคลาดเคลื่อนระบบ $\pm0.021\times10^{-11}\ m^3/kg\cdot s^2$

Storey and Cohen-Tannoudji (1994) ศึกษาวิธีปริพันธ์ตามเส้นทางและอธิบายการประยุกต์ใช้กับวิธีอินเตอร์โฟโรเมทรีสำหรับอะตอม จากนั้นนำเสนอแนวทางปฏิบัติเพื่อประยุกต์ใช้กับระบบ เช่น อนุภาคอิสระ อนุภาคอิสระที่อยู่ในสนามโน้มถ่วง เป็นต้น

# บทที่ 3
# วิธีดำเนินการวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษากลศาสตร์ควอนตัมแบบไฟยน์แมน ซึ่งจะประยุกต์ใช้ตัวแผ่กระจายและฟังก์ชันคลื่นในกลศาสตร์ควอนตัม เพื่ออธิบายการเลี้ยวเบนของโมเลกุล ที่ประกอบด้วยโมเลกุลคาร์บอน-60 ผ่านเกรตติง แล้วเปรียบเทียบผลการจำลองความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคของโมเลกุล ที่ปรากฏบนริ้วรอยบนฉากรับในการทดลอง และศึกษาผลของตัวแปรต่างๆ ที่อาจจะส่งผลต่อการกระจายตัวของริ้วรอยการแทรกสอดโดยมีรายละเอียดและขั้นตอนในการดำเนินการวิจัยดังนี้

## 3.1 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องคอมพิวเตอร์และซอฟแวร์ Mathematica

## 3.2 วิธีการและขั้นตอนศึกษาวิจัย

ในการศึกษาวิจัยนี้มีวิธีการศึกษา ดังนี้

1. คำนวณหาผลเฉลยฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคอิสระใน 1 มิติ โดยใช้วิธีของไฟยน์แมน
2. คำนวณหาผลเฉลยของฟังก์ชันคลื่นหลังเลี้ยวเบนผ่านเกรตติง
3. ตรวจวัดความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคหรือริ้วรอยการแทรกสอดโดยเลื่อนเกรตติงหน้ากากตามแนวขวาง
4. การจำลองความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคของโมเลกุลคาร์บอน- 60

## 3.3 ผลเฉลยฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคอิสระใน 1 มิติ โดยใช้วิธีของไฟยน์แมน

จากสมการที่ (2-49) สามารถเขียนตัวแผ่กระจายของอนุภาคอิสระเมื่อเริ่มต้นตำแหน่ง $x_0$ ที่เวลา $t=0$ ใหม่ได้เป็น

$$K\left(x,t;x_0,0\right) = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar t}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{im}{2\hbar}\frac{\left(x-x_0\right)^2}{t}\right) \quad (3\text{-}1)$$

ด้วยฟังก์ชันคลื่นเริ่มต้น $\psi(x_0,0)$ ตามสมการที่ (2-8) จะสามารถหาฟังก์ชันคลื่นได้จาก

$$
\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \left(\frac{m}{2\pi i\hbar t}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{im}{2\hbar}\frac{\left(x-x_0\right)^2}{t}\right)\left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{x_0^2}{a^2}} e^{ik_0x_0} \\
&= \left(\frac{m}{2\pi i\hbar t}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \exp\left(\frac{im}{2\hbar}\frac{\left(x-x_0\right)^2}{t} - \frac{x_0^2}{a^2} + ik_0x_0\right)
\end{aligned}
\tag{3-2}
$$

พจน์ที่อยู่รูปของเอกซ์โพเนนเชียลสามารถกระจายได้เป็น

$$
\left(\frac{im}{2\hbar}\frac{\left(x-x_0\right)^2}{t} - \frac{x_0^2}{a^2} + ik_0x_0\right) = \frac{im}{2\hbar t}\left(\left(1+\frac{2i\hbar t}{ma^2}\right)x_0^2 - 2\left(x-\frac{k_0\hbar t}{m}\right)x_0 + x^2\right) \tag{3-3}
$$

และอาศัยการแปลงกำลังสองสัมบูรณ์ $ax^2 - 2bx = a\left(x-\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2}{a}$ เช่นกัน จะได้

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{im}{2\hbar}\frac{\left(x-x_0\right)^2}{t} - \frac{x_0^2}{a^2} + ik_0x_0\right) &= -\frac{-im}{2\hbar t}\left(1+\frac{2i\hbar t}{ma^2}\right)\left(x_0 - \left(x-\frac{k_0\hbar t}{m}\right)/\left(1+\frac{2i\hbar t}{ma^2}\right)\right)^2 \\
&\quad + \frac{im}{2\hbar t}\left\{x^2 - \left(\left(x-\frac{k_0\hbar t}{m}\right)/\sqrt{\left(1+\frac{2i\hbar t}{ma^2}\right)}\right)^2\right\}
\end{aligned}
\tag{3-4}
$$

แทนสมการที่ (3-4) ลงในสมการที่ (3-2)

$$
\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \left(\frac{m^2}{4\pi^3 i^2\hbar^2 t^2 a^2}\right)^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \exp\left(-\frac{-im}{2\hbar t}\left(1+\frac{2i\hbar t}{ma^2}\right)\left(x_0 - \left(x-\frac{k_0\hbar t}{m}\right)/\left(1+\frac{2i\hbar t}{ma^2}\right)\right)^2\right. \\
&\quad \left. + \frac{im}{2\hbar t}\left\{x^2 - \left(\left(x-\frac{k_0\hbar t}{m}\right)/\sqrt{\left(1+\frac{2i\hbar t}{ma^2}\right)}\right)^2\right\}\right)
\end{aligned}
\tag{3-5}
$$

สามารถทำปริพันธ์สมการที่ (3-5) ได้เป็น

$$
\psi(x,t) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\left(1+\frac{2i\hbar t}{ma^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(\frac{im}{2\hbar t}\left\{x^2 - \left(\left(x-\frac{k_0\hbar t}{m}\right)/\sqrt{\left(1+\frac{2i\hbar t}{ma^2}\right)}\right)^2\right\}\right) \tag{3-6}
$$

พบว่าสมการที่ (3-6) คือ ฟังก์ชันคลื่นที่คำนวณได้จากตัวแผ่กระจายของอนุภาคอิสระ ดังนั้น ฟังก์ชันคลื่นที่ได้จากสมการของไฟยน์แมน สามารถถูกแสดงให้เห็นว่าเท่ากับฟังก์ชันคลื่นที่ได้จากชเรอดิงเงอร์ในสมการที่ (2-17) ได้โดยจัดรูปของเอกซ์โพเนนเชียลในสมการที่ (3-6) ได้เป็น

$$\frac{im}{2\hbar t}\left\{x^2-\left(\left(x-\frac{k_0\hbar t}{m}\right)/\sqrt{\left(1+\frac{2i\hbar t}{ma^2}\right)}\right)^2\right\}=\frac{\left(-x^2/a^2+ik_0x-ik_0^2\hbar t/2m\right)}{1+\frac{2i\hbar t}{ma^2}}$$

$$=\left(ik_0x-\frac{ik_0^2\hbar t}{2m}\right)-\frac{1}{a^2\left(1+\frac{2i\hbar t}{ma^2}\right)}\left(x-\frac{k_0\hbar t}{m}\right)^2$$

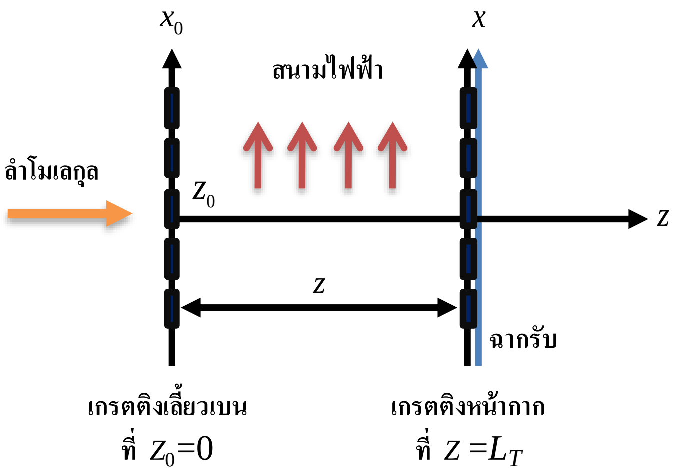
จึงได้สมการที่ (3-6)

$$\psi(x,t)\ =\left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\left(1+\frac{2i\hbar t}{ma^2}\right)^{\frac{1}{2}}}e^{ik_0\left(x-\frac{k_0\hbar t}{2m}\right)}\exp\left(-\left(x-\frac{k_0\hbar t}{m}\right)^2/\left(a^2+\frac{2i\hbar t}{m}\right)\right) \quad (3\text{-}7)$$

หรือ พบว่าฟังก์ชันคลื่นที่ได้จากการคำนวณตัวแผ่กระจายของอนุภาคอิสระที่ได้จากวิธีการของไฟยน์แมนเท่ากับวิธีการที่ได้จากการคำนวณของชเรอดิงเงอร์

## 3.4 ผลเฉลยของฟังก์ชันคลื่นหลังเลี้ยวเบนผ่านเกรตติง

เมื่อสมมติลำโมเลกุล ผ่านเข้าไปยังเกรตติงหรือสลิตเดี่ยวแล้ว จะทำให้โมเลกุลมีลักษณะเป็นลำโมเลกุลอาพันธ์ (Coherent molecular beam) ที่มีเวกเตอร์คลื่น (Wave vector) คือ $k$ และมีรูปร่างการกระจายตัวเป็นแบบเกาส์เซียน แผ่กระจายไปในระนาบ ตามแนวแกน $x_0$ และ $z_0$ เกิดการเลี้ยวเบนกับเกรตติงที่วางอยู่ ตำแหน่ง $z_0 = 0$ และทำการพิจารณาริ้วรอยการแทรกสอดได้โดยวางเกรตติงหน้ากากที่ระยะห่าง z หลังเกรตติงที่ระยะทาร์บอท $L_T = d^2/\lambda_{\mathrm{dB}}$ เมื่อ $\lambda_{\mathrm{dB}}$ คือความยาวคลื่นเดอบรอยล์ที่สอดคล้องกับโมเมนตัมของโมเลกุลที่เคลื่อนที่ในแนวแกน z ต่อจากนั้นเลื่อนเกรตติงหน้ากากตามแนวขวาง โดยมีอิทธิพลของสนามไฟฟ้าคงที่ระหว่างเกรตติงทั้งสอง จะนำไปสู่การเลื่อนตามขวาง (Transverse shift) ของการเลี้ยวเบน ดังภาพที่ 3-1




ภาพที่ 3-1 แสดงการเลี้ยวเบนของอนุภาคผ่านเกรตติงภายใต้อิทธิพลของสนามไฟฟ้าคงที่

สมมติให้ฟังก์ชันคลื่นเริ่มต้นของลำโมเลกุลที่บริเวณหลังเกรตติงเลี้ยวเบนอยู่ในรูป

$$\psi_0\left(x_0,z_0,t=0\right)=C\sum_n A_n e^{ink_d x_0}\, e^{-\frac{x_0^2}{\beta_x^2}}\, e^{ikz_0-\frac{z_0^2}{\beta_z^2}} \tag{3-8}$$

โดยที่ $C$ คือค่าปกติของฟังก์ชันคลื่น $A_n=\sin\left(n\pi f\right)/n\pi$ เป็นองค์ประกอบฟูเรียร์สำหรับเกรตติงที่มีค่าอัตราส่วนของช่องเปิดของเกรตติงเท่ากับ $f$ เมื่อ $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ และ $\beta_x,\beta_z$ สอดคล้องกับค่าความกว้างที่กึ่งความสูง (Full width at half maximum หรือ FWHM) ของการกระจายตัวของเกาส์เซียน ตามแนวแกน $x$ และ $z$ ดังนั้นเมื่อ $t>0$ จะสามารถคำนวณหาฟังก์ชันคลื่นหลังเกรตติงได้จาก

$$\psi\left(x,z,t\right)=\int_{-\infty}^{\infty}dx_0\int_{-\infty}^{\infty}dz_0 K\left(x,z,t;x_0,z_0,0\right)\psi_0\left(x_0,z_0,0\right) \tag{3-9}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}K\left(x,z,t;x_0,z_0,0\right)=&\frac{M}{2\pi i\hbar t}\exp\left(\frac{iM}{2\hbar t}\left(z-z_0\right)^2\right)\\ &\exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(\frac{M}{2}\frac{\left(x-x_0\right)^2}{t}+\frac{F_x\left(x+x_0\right)t}{2}-\frac{F_x^2t^3}{24M}\right)\right)\end{aligned} \tag{3-10}$$

คือ ตัวแผ่กระจายของอนุภาคมวล $M$ ที่เดินทางผ่านเข้าไปในระนาบ $xz$ ตามแนวแกน $z$ ซึ่งอยู่ภายใต้อิทธิพลของสนามไฟฟ้าคงที่ โดยมีแรงไฟฟ้า $F_x$ กระทำตามแนวแกน $x$ และเพื่อที่จะคำนวณหาฟังก์ชันคลื่นหลังเลี้ยวเบนผ่านเกรตติง แทนสมการที่ (3-8) และ (3-10) ลงในสมการที่ (3-9) จะได้

$$
\begin{aligned}
\psi(x,z,t) &= \frac{M}{2\pi i\hbar t}\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 \exp\left(\frac{iM}{2\hbar t}(z-z_0)^2\right) \\
&\quad \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(\frac{M}{2}\frac{(x-x_0)^2}{t}+\frac{F_x(x+x_0)t}{2}-\frac{F_x^2t^3}{24M}\right)\right)\left(C\sum_n A_n e^{ink_d x_0}\, e^{-\frac{x_0^2}{\beta_x^2}} e^{ikz_0-\frac{z_0^2}{\beta_z^2}}\right) \\
&= C\left(\frac{M}{2\pi i\hbar t}\right)\exp\left(\frac{iF_x xt}{2\hbar}+\frac{iM}{2\hbar}\frac{x^2}{t}\right)\exp\left(\frac{iMz^2}{2\hbar t}-\frac{iF_x^2t^3}{24\hbar M}\right)\sum_n A_n \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\left(-\frac{1}{\beta_x^2}+\frac{iM}{2\hbar t}\right)x_0^2+i\left(nk_d-\frac{Mx}{\hbar t}+\frac{F_x t}{2\hbar}\right)x_0\right)dx_0 \qquad (3\text{-}11) \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\left(-\frac{1}{\beta_z^2}+\frac{iM}{2\hbar t}\right)z_0^2+i\left(k-\frac{Mz}{\hbar t}\right)z_0\right)dz_0
\end{aligned}
$$

จากสมการที่ (3-11) จะเห็นว่าปริพันธ์จะอยู่ในรูปแบบของปริพันธ์เกาส์เซียนดังสมการที่ (3-12)

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-ax^2+bx\right)dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right) \qquad (3\text{-}12)
$$

สามารถปริพันธ์สมการที่ (3-11) ได้เป็น

$$
\begin{aligned}
\psi(x,z,t) &= C\left(\frac{M}{2\pi i\hbar t}\right)\exp\left(\frac{iF_x xt}{2\hbar}+\frac{iM}{2\hbar}\frac{x^2}{t}\right)\exp\left(\frac{iMz^2}{2\hbar t}-\frac{iF_x^2t^3}{24\hbar M}\right)\sum_n A_n\sqrt{-\frac{\pi}{\left(-\frac{1}{\beta_x^2}+\frac{iM}{2\hbar t}\right)}} \\
&\quad \exp\left(\frac{\left(i\left(nk_d-\frac{Mx}{\hbar t}+\frac{F_x t}{2\hbar}\right)\right)^2}{4\left(\left(-\frac{1}{\beta_x^2}+\frac{iM}{2\hbar t}\right)\right)}\right)\sqrt{-\frac{\pi}{\left(-\frac{1}{\beta_z^2}+\frac{iM}{2\hbar t}\right)}}\exp\left(-\frac{\left(i\left(k-\frac{Mz}{\hbar t}\right)\right)^2}{4\left(\left(-\frac{1}{\beta_z^2}+\frac{iM}{2\hbar t}\right)\right)}\right) \\
&= C\sqrt{\frac{1}{\left(1+\frac{2\hbar ti}{M\beta_x^2}\right)\left(1+\frac{2\hbar ti}{M\beta_z^2}\right)}}\exp\left(\frac{iF_x xt}{2\hbar}\right)\exp\left(-\frac{iF_x^2t^3}{24\hbar M}\right)\sum_n A_n \\
&\quad \exp\left(\left(\frac{Mi}{2\hbar t}\right)\left\{x^2-\frac{\left(x-\frac{nk_d\hbar t}{M}-\frac{F_x t^2}{2M}\right)^2}{\left(\left(1+\frac{2\hbar ti}{M\beta_x^2}\right)\right)}\right\}\right)\exp\left(\left(\frac{Mi}{2\hbar t}\right)\left\{z^2-\frac{\left(z-\frac{k\hbar t}{M}\right)^2}{\left(1+\frac{2\hbar ti}{M\beta_z^2}\right)}\right\}\right) \qquad (3\text{-}13)
\end{aligned}
$$

หรือสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\psi(x,z,t)=C_t^2\exp\left[R(z,t)\right]\sum_n A_n\exp\left\{P_n(x,t)+iQ_n(F_x,z,x,t)\right\} \tag{3-14}$$

เมื่อ

$$R(z,t)=-\frac{1}{\beta_z^2\gamma_z}\left(z-\frac{k\hbar t}{M}\right)^2 \tag{3-15}$$

$$P_n(x,t)=-\frac{1}{\beta_x^2\gamma_x}\left(x-\frac{nk_d\hbar t}{M}-\frac{F_xt^2}{2M}\right)^2 \tag{3-16}$$

$$Q_n(F_x,x,z,t)=\left(nk_dx-\frac{n^2k_d^2\hbar t}{2M}+\frac{F_xtx}{\hbar}-\frac{F_xk_dnt^2}{2M}-\frac{F_x^2t^3}{6M\hbar}\right)+\left(kz-\frac{k^2\hbar t}{2M}\right) \tag{3-17}$$

โดยให้ $C_t=\sqrt{C^2/\gamma_x\gamma_z}$ และ $\gamma_x=1+2i\hbar t/M\beta_x^2$ และ $\gamma_z=1+2i\hbar t/M\beta_z^2$

## 3.5 ความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคของฟังก์ชันคลื่นหลังเลี้ยวเบนผ่านเกรตติง

เมื่อลำโมเลกุลผ่านเกรตติงเลี้ยวเบนแล้ว จะหาความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาค ที่เปรียบเทียบกับผลการทดลอง โดยวางเกรตติงหน้ากากไว้ที่ระยะทาร์บอท ต่อจากนั้นเลื่อนเกรตติงตามแนวขวาง ดังภาพที่ 3-1 ซึ่งจะสามารถหาความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาค ที่ฉากรับได้ด้วยสมการ

$$I=G(x-\delta)|\psi|^2 \tag{3-18}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}|\psi|^2 = {} & c_t^4\sum_{n,m}A_nA_m\exp\left(-\frac{2}{\beta_z^2|\gamma_z|^2}\left(z-\frac{k\hbar t}{M}\right)^2\right)\\ & \exp\left(-\frac{1}{\beta_x^2\gamma_x}\left(x-\frac{F_xt^2}{2M}-\frac{nk_d\hbar t}{M}\right)^2-\frac{1}{\beta_x^2\gamma_x^*}\left(x-\frac{F_xt^2}{2M}-\frac{mk_d\hbar t}{M}\right)^2\right)\\ & \exp\left(i\left((n-m)k_dx-\frac{(n-m)F_xk_dt^2}{2M}-\frac{(n^2-m^2)k_d^2\hbar t}{2M}\right)\right)\end{aligned} \tag{3-19}$$

และฟังก์ชัน $G(x)$ คือฟังก์ชันขั้นบันได (Step function) ซึ่งสอดคล้องกับเกรตติงหน้ากาก

$$G(x)=\begin{cases}1 & ;\ jd-\dfrac{fd}{2}<x<jd+\dfrac{fd}{2}\\ 0 & ;\ \text{otherwise}\end{cases} \tag{3-20}$$

เมื่อ $j=0,\pm1,\pm2,\ldots$ และ $\delta$ คือระยะเลื่อนหน้ากากที่สอดคล้องกับการเลื่อนตามขวางในแนวแกน $x$ (Deachapunya & Srisuphaphon, 2014)

นอกจากนี้เพื่อที่จะศึกษาการกระจายตัวของความเร็วที่มีผลต่อริ้วรอยการแทรกสอดของโมเลกุล ความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคในสมการที่ (3-18) เมื่อสมมติให้การกระจายตัวของความเร็วอยู่ในรูปของเกาส์เซียน รอบค่าความเร็ว $v_0=\hbar k_0/M$ มีฟังก์ชันเกาส์เซียน $\rho_k$ จะสามารถหาความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคที่ฉากรับหลังบริเวณเกรตติงหน้ากาก (ภาพที่ 3-1) ได้จาก

$$I = G\left(x-\delta\right)\int_{-\infty}^{\infty} dk\left|\psi\right|^2 \rho_k \tag{3-21}$$

โดยที่

$$\rho_k = \frac{1}{\Delta k\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\left(k-k_0\right)^2}{2\Delta k^2}\right) \tag{3-22}$$

เป็นฟังก์ชันการกระจายตัวของความเร็วแบบเกาส์เซียน โดยมี $\Delta k = M\Delta v/\hbar$ เมื่อ $\Delta v$ เป็นความคลาดเคลื่อนของความเร็วไปจากค่ากลาง $v_0=\hbar k_0/M$

## 3.6 การจำลองความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคของโมเลกุลคาร์บอน-60 ที่ประกอบด้วยคาร์บอน 60 อะตอม

ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย ผู้วิจัยได้ออกแบบการการจำลองเป็น 3 ขั้นตอน โดยมีรายละเอียดดังนี้

**ตอนที่ 1 ศึกษาผลความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคเทียบกับผลการทดลอง**

จำลองความหนาแน่นของความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคบนฉากรับ ด้วยสมการที่ (3-18) เมื่อลำโมเลกุลคาร์บอน-60 ที่มีมวล 720 amu เคลื่อนที่ด้วยความเร็วเฉลี่ย 117 เมตรต่อวินาทีผ่านเกรตติงทั้งสอง ดังภาพที่ 3-1 มีคาบเกรตติง $d$ = 991 $nm$ มีอัตราส่วนช่องเปิด $f$ = 0.45 และเกรตติงทั้งสองวางห่างกันที่ตำแหน่ง $z = 2L_T$ เช่นเดียวกับในการทดลองของ (Berninger, Stefanov, Deachapunya, & Arndt, 2007) และเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้กับผลการทดลองที่ตรวจรับอัตราการเข้าชนของโมเลกุลที่ตำแหน่งต่างๆ บนฉากรับ

**ตอนที่ 2 ศึกษาผลความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาค เมื่อลำอนุภาคมีการกระจายตัวของความเร็ว**

1. จำลองความหนาแน่นของความหนาแน่นของโอกาสจะพบอนุภาค ด้วยสมการที่ (3-21) เมื่อโมเลกุลคาร์บอน-60 ที่มีมวล 720 amu เคลื่อนที่ด้วยความเร็วเฉลี่ย 100 เมตรต่อวินาทีและมีความคลาดเคลื่อนของความเร็ว $\Delta v$ จาก $\pm 10$ เมตรต่อวินาที ถึง $\pm 50$ เมตรต่อวินาที ผ่านเกรตติงทั้งสอง ดังภาพที่ 3-1 มีคาบเกรตติง $d$ = 991 $nm$ มีอัตราส่วนช่องเปิด $f$ = 0.45 และเกรต

ติงทั้งสองวางห่างกันที่ระยะต่างๆ คือ $z = L_T/4, L_T/2,\ L_T$ และ $2L_T$ เมื่อ $L_T = d^2/\lambda = 17.85$ เซนติเมตร

2. พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างกราฟของผลการจำลอง ที่มีความคลาดเคลื่อนของความเร็ว $\Delta v \pm 10$ เมตรต่อวินาที ที่ระยะต่างๆ คือ $z = L_T/4,\ L_T/2,\ L_T$ และ $2L_T$ เมื่อไม่มีอิทธิพลจากสนามไฟฟ้า และพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างกราฟของผลการจำลองที่มีความคลาดเคลื่อนของความเร็ว $\Delta v$ ได้แก่ $\pm 20$, $\pm 30$, $\pm 40$ และ $\pm 50$ เมตรต่อวินาที ตามลำดับ

3. เปรียบเทียบผลการจำลองที่ได้รับจากสมการที่ 3-18 และสมการที่ 3-21 ที่ระยะทาร์บอท $L_T$ และ $2L_T$ และพิจารณาค่าสภาพการมองเห็นของริ้วรอยการแทรกสอด (Interference visibility)

$$\text{interference visibility} = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \qquad (3\text{-}23)$$

โดย $I_{max}$ และ $I_{min}$ คือความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคบนฉากรับสูงสุดและต่ำสุดตามลำดับ

4. สรุปผลและอภิปรายผล

**ตอนที่ 3 ศึกษาผลความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาค เมื่อลำอนุภาคมีการกระจายตัวของความเร็วเทียบกับผลการทดลอง**

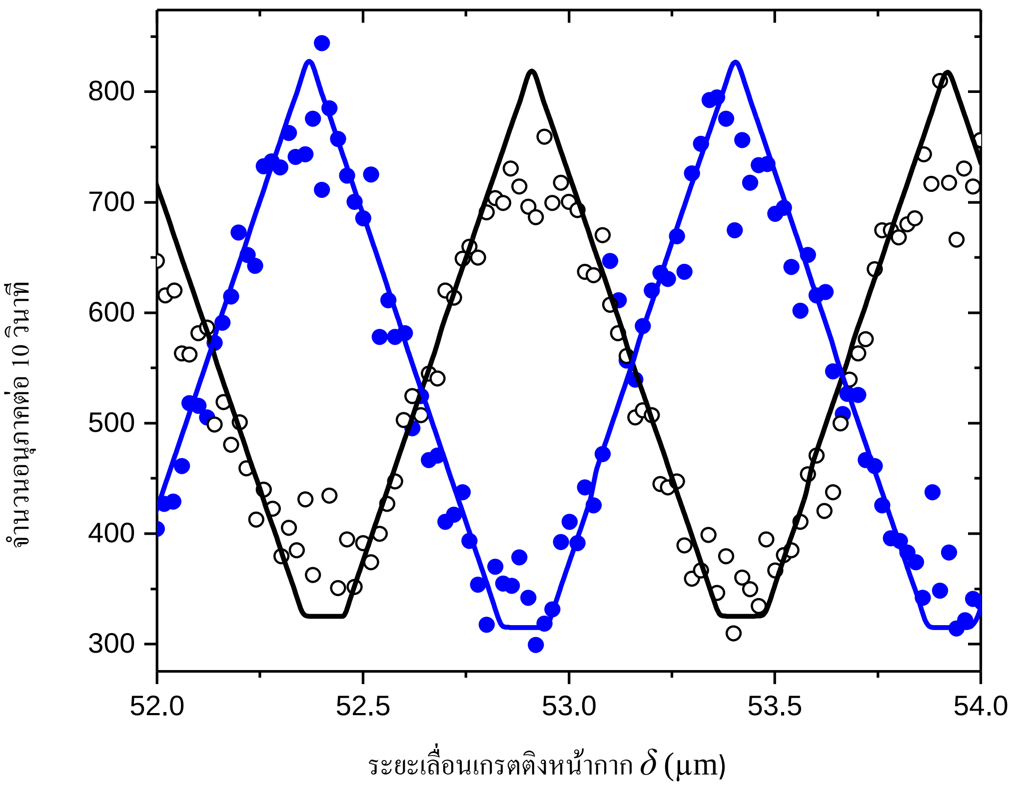
จำลองความหนาแน่นของความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคบนฉากรับ ด้วยสมการที่ (3-21) เมื่อลำโมเลกุลคาร์บอน-60 ที่มีมวล 720 amu เคลื่อนที่ด้วยความเร็วเฉลี่ย 117 m/s และมีการกระจายตัวของความเร็ว 8% หรือ $\Delta v$=9.36 m/s ผ่านเกรตติงทั้งสอง ดังภาพที่ 3-1 มีคาบเกรตติง $d$ = 991 *nm* มีอัตราส่วนช่องเปิด $f$ = 0.45 และเกรตติงทั้งสองวางห่างกันที่ตำแหน่ง $z = 2L_T$ เช่นเดียวกับในการทดลองของ (Berninger, Stefanov, Deachapunya, & Arndt, 2007) และเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้กับผลการทดลองที่ตรวจรับอัตราการเข้าชนของโมเลกุลที่ตำแหน่งต่างๆ บนฉากรับ

# บทที่ 4
# ผลการดำเนินการวิจัย

ในงานวิจัยเรื่องการศึกษาการเลี้ยวเบนของคลื่นสสารสำหรับอนุภาคในพิสัยใกล้ภายใต้อิทธิพลของสนามไฟฟ้าคงที่ ผู้วิจัยได้แบ่งผลการดำเนินงานวิจัยเป็น 3 ตอน คือ ตอนที่ 1 ผลความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคเทียบกับผลการทดลอง ตอนที่ 2 ผลความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาค เมื่อลำอนุภาคมีการกระจายตัวของความเร็ว และตอนที่ 3 ผลความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาค เมื่อลำอนุภาคมีการกระจายตัวของความเร็วเทียบกับผลการทดลอง ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

## 4.1 ผลความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคเทียบกับผลการทดลอง

เมื่อลำโมเลกุลที่ประกอบด้วยคาร์บอน 60 อะตอม เคลื่อนผ่านเกรตติงเป็นลำโมเลกุลอาพันธ์ แล้วเลี้ยวเบนผ่านเกรตติง ด้วยอัตราเร็วเฉลี่ย 117 เมตรต่อวินาที ในทิศทางตามแนวแกน $z$ แล้วเดินทางผ่านเข้าไปยังเกรตติงหน้ากากซึ่งถูกวางที่ระยะห่างจากเกรตติงเลี้ยวเบนที่ระยะ $2L_T$ โดยเกรตติงหน้ากากสามารถเลื่อนตามแนวขวางในแนวแกน $x$ ด้วยค่า $\delta$ ครั้งละ 20 นาโนเมตร เกรตติงทั้งสอง มีคาบ $d$ = 991 นาโนเมตร มีอัตราส่วนของช่องเปิด $f$ = 0.45 เช่นเดียวกับที่ใช้ในการทดลอง (Berninger, Stefanov, Deachapunya, & Arndt, 2007) มีรัศมีการกระจายของลำโมเลกุลที่มีรูปร่างแบบเกาส์เซียน $\beta_x$ ค่อนข้างมากจนลำโมเลกุลครอบคลุมรูของเกรตติงหลายช่องเพื่อให้ได้ริ้วรอยการแทรกสอดที่ชัดเจนและ $\beta_z$ มากกว่าความยาวคลื่นเดอบรอยล์ ($\lambda_{dB}$) ทำให้ได้คลื่นอิสระ (Free wave) ตามแนวแกน $z$ นอกจากนี้ริ้วรอยการแทรกสอดหลังหน้ากากสามารถตรวจรับได้ เมื่อเลื่อนเกรตติงหน้ากากตามแนวขวางเป็นระยะ 2 คาบ ดังนั้นความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคหลังเกรตติงหน้ากากสามารถจำลองได้จากสมการที่ (3-18) ได้ผลการจำลองดังนี้



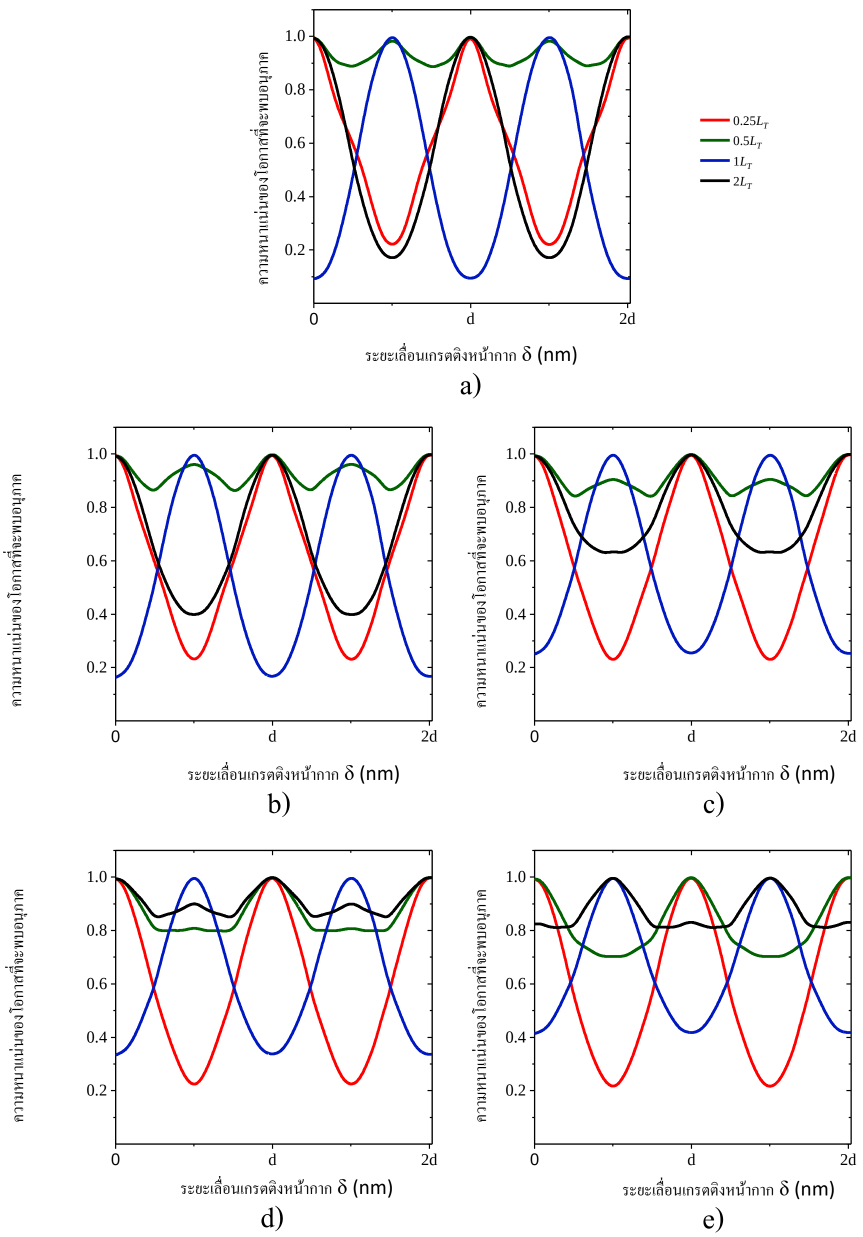

ภาพที่ 4-1 ผลการจำลองสมการที่ (3-18) เปรียบเทียบกับผลการทดลอง

จากภาพที่ 4-1 วงกลมปิดและเปิด จะแสดงถึงข้อมูลในการทดลอง (Berninger, Stefanov, Deachapunya, & Arndt, 2007) ที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของสนามไฟฟ้าและไม่ได้รับอิทธิพลจากสนามไฟฟ้า ตามลำดับ และเส้นทึบสีน้ำเงินและสีดำ จะแสดงถึงผลการจำลองที่ได้จากสมการที่ (3-18) และพบว่าผลการจำลองทางทฤษฎีจะมีความสอดคล้องกับผลการทดลองในห้องปฏิบัติการ โดยสามารถหาขนาดของแรง $F_x$ จากสนามไฟฟ้าคงที่ในสมการที่ (3-10) จะทำให้ริ้วรอยการแทรกสอดบนฉากรับเลื่อนไปตามแนวขวางเป็นระยะประมาณ 1 คาบของเกรตติง

## 4.2 ผลความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาค เมื่อลำอนุภาคมีการกระจายตัวของความเร็ว

เมื่อลำโมเลกุลที่ประกอบด้วยคาร์บอน 60 อะตอม เคลื่อนผ่านเกรตติง (ไม่ได้แสดงในภาพที่ 3-1) ดังนั้นจึงสมมติได้ว่าโมเลกุลเป็นลำโมเลกุลอาพันธ์ ต่อจากนั้นลำโมเลกุลจะผ่านเกรตติงเลี้ยวเบน ด้วยความเร็วเฉลี่ย 100 เมตรต่อวินาที ในทิศทางตามแนวแกน $z$ แล้วเดินทางผ่านเข้าไปยังเกรตติงหน้ากาก โดยที่เกรตติงหน้ากากสามารถเลื่อนตามแนวขวางในแนวแกน $x$ ด้วยค่า $\delta$ ครั้งละ

20 นาโนเมตร ซึ่งเกรตติงทั้งสอง มีคาบ $d = 991$ นาโนเมตร และมีอัตราส่วนของช่องเปิด $f = 0.45$ โดยวางที่ระยะห่างออกจากกัน $z = L_T/4,\ L_T/2,\ L_T$ และ $2L_T$ ดังนั้น ความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคหลังเกรตติงหน้ากากหรือบนฉากรับ สามารถจำลองได้จากสมการที่ (3-21) เมื่อโมเลกุลมีความคลาดเคลื่อนของความเร็ว $\Delta v = \pm 10,\ \pm 20,\ \pm 30,\ \pm 40$ และ $\pm 50$ เมตรต่อวินาที เมื่อเลื่อนเกรตติงหน้ากากตามแนวขวางเป็นระยะ 2 คาบ ได้ผลการจำลอง ดังนี้

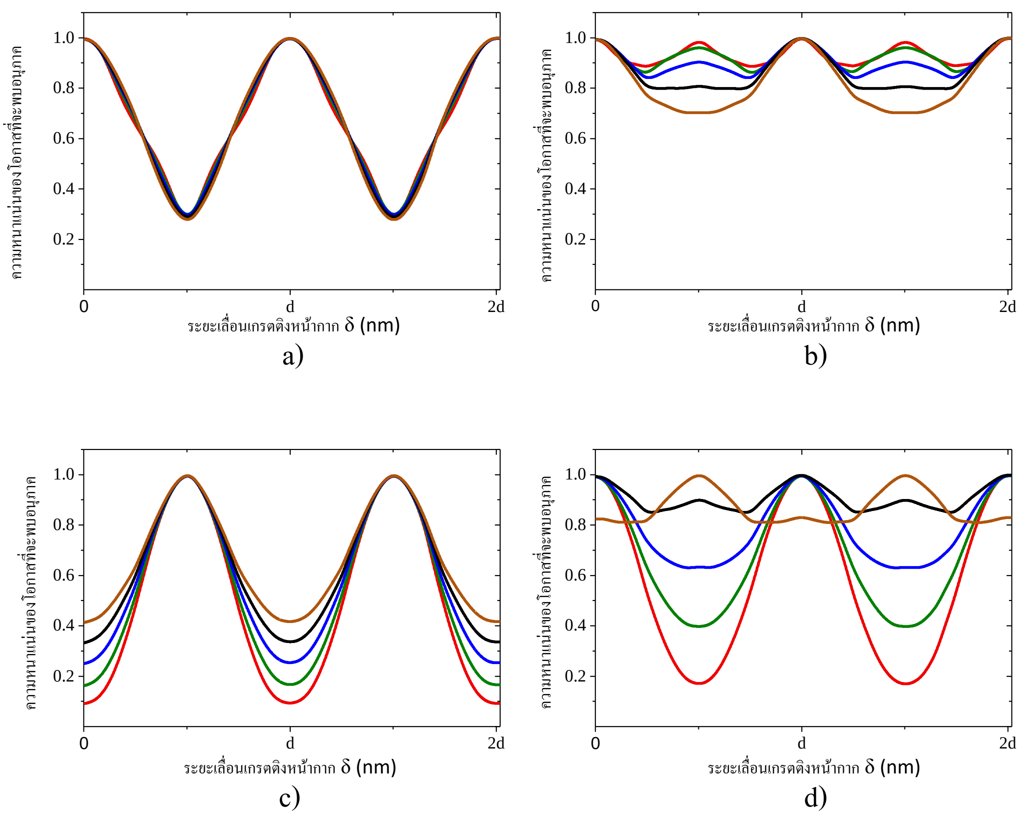



ภาพที่ 4-2 ผลการจำลองสมการที่ (3-21) อนุภาคมีการกระจายตัวของความเร็ว a) $\pm 10$, b) $\pm 20$, c) $\pm 30$, d) $\pm 40$ และ e) $\pm 50$ เมตรต่อวินาที ที่ระยะทาร์บอทต่างกัน

จากภาพที่ 4-2 แกนแนวตั้งแสดงถึง ความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบโมเลกุลคาร์บอน-60 บนฉากรับและแกนแนวนอนแสดงถึงตำแหน่งของเกรตติงหน้ากากที่เลื่อนในแนวขวาง เป็นระยะ 2d เมื่อเกรตติงมีคาบ $d$ = 991 นาโนเมตร โดยเกรตติงหน้ากากถูกวางที่ระยะทาร์บอท คือ $z = L_T / 4,\ L_T / 2,\ L_T$ และ $2L_T$ ซึ่งถูกแสดงได้โดยเส้นทึบสีแดง เขียว น้ำเงิน และดำ ตามลำดับ จะสามารถจำลองความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบโมเลกุลบนฉากรับ โดยใช้สมการที่ (3-21) พบว่า แรงไฟฟ้า $F_x$ ซึ่งพบในตัวแผ่กระจายของสมการที่ (3.10) จะมีอิทธิพลต่อริ้วรอยการแทรกสอดที่พบบนฉากรับหลังเกรตติงหน้ากาก โดยจะเลื่อนไปในแนวตามขวาง 1 คาบ

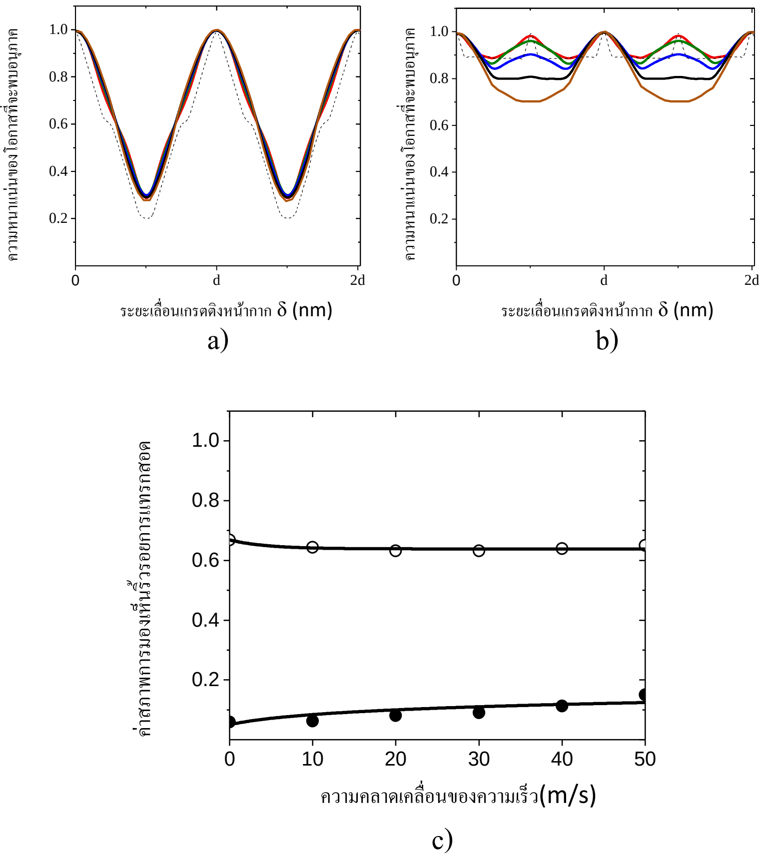
นอกจากนี้เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ความคลาดเคลื่อนของความเร็ว ณ ที่ระยะทาร์บอทเดียวกัน จะได้ความสัมพันธ์





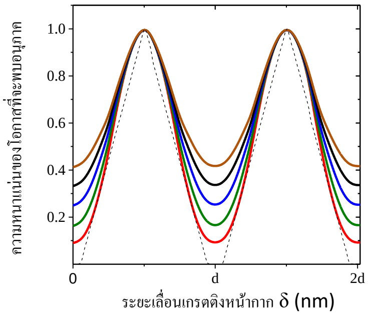

ภาพที่ 4-3 ผลการจำลองสมการที่ (3-21) เมื่ออนุภาคมีฟังก์ชันเกาส์เซียนที่กระจายตัวด้วยความคลาดเคลื่อนของความเร็ว $\Delta v = \pm 10, \pm 20, \pm 30, \pm 40$ และ $\pm 50$ เมตรต่อวินาที แสดงด้วยเส้นทึบสีแดง เขียว น้ำเงิน ดำ และน้ำตาล ตามลำดับ และเกรตติงหน้ากากถูกวาง ณ ตำแหน่ง z ได้แก่ a) $L_T / 4$, b) $L_T / 2$, c) $L_T$ และ d) $2L_T$

เพื่อที่จะอธิบายผล ผู้วิจัยจึงใช้ ค่าสภาพการมองเห็นริ้วรอยการแทรกสอด (Interference visibility) ในสมการที่ (3-23) โดยจำลองทั้งกรณีที่ไม่มีการกระจายตัวของความเร็วที่พบในสมการที่ (3.18) และมีการกระจายตัวของความเร็วที่พบได้ในสมการที่ (3.21) ที่ระยะ $0.25L_T$ , $0.5L_T$ , $1L_T$ และ $2L_T$ จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

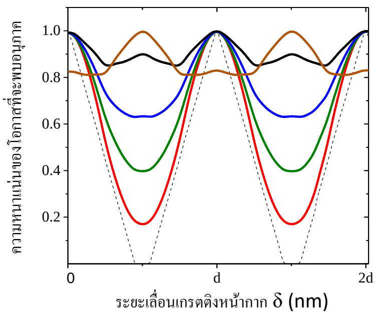



ภาพที่ 4-4 สภาพการมองเห็นริ้วรอยการแทรกสอดที่ระยะ a) $0.25L_T$ และ b) $0.5L_T$ โดยจำลองความหนาแน่นของสมการที่ (3-18) และ (3-21) ที่แสดงโดยจุดและเส้นทึบ ตามลำดับ ในภาพ c) แสดงแนวโน้มสภาพการมองเห็นริ้วรอยการแทรกสอดกับความคลาดเคลื่อนของความเร็ว $\Delta v$ จาก $\pm 10$ เมตรต่อวินาที ถึง $\pm 50$ เมตรต่อวินาที ที่ระยะ $0.25L_T$ และ $0.5L_T$ แสดงด้วยวงกลมเปิดและปิด ตามลำดับ

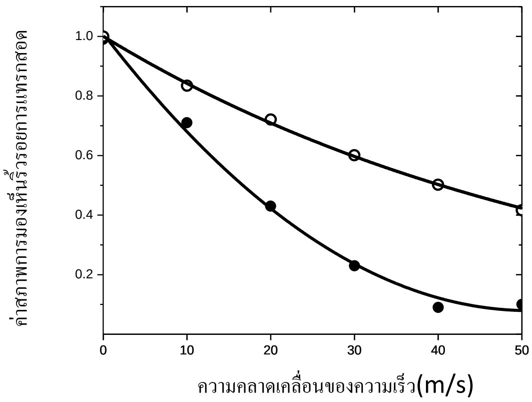
จากภาพที่ 4-4 พบว่า แนวโน้มสภาพการมองเห็นริ้วรอยการแทรกสอดมีความแตกต่างกันเล็กน้อย เมื่อความคลาดเคลื่อนของความเร็ว $\Delta v$ เพิ่มมากขึ้นโดยที่ตำแหน่ง $z$=$0.5L_T$ มีค่าสภาพการมองเห็นริ้วรอยน้อยกว่าที่ $z$=$0.25L_T$




a)




b)



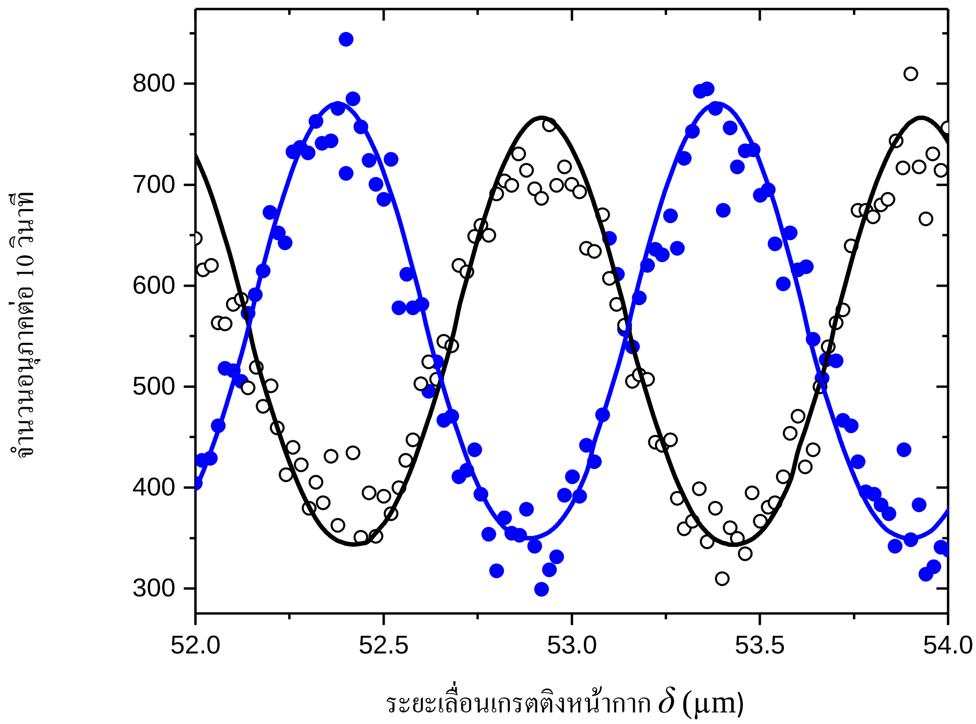

c)

ภาพที่ 4-5 สภาพการมองเห็นริ้วรอยการแทรกสอดที่ระยะ a) $L_T$ และ b) $2L_T$ โดยจำลองความหนาแน่นของสมการที่ (3-18) และ (3-21) ที่แสดงโดยจุดและเส้นทึบ ตามลำดับ ในภาพ c) แสดงการลดลงของสภาพการมองเห็นริ้วรอยการแทรกสอดกับความคลาดเคลื่อนของความเร็ว$\Delta v$ จาก $\pm 10$ เมตรต่อวินาที ถึง $\pm 50$ เมตรต่อวินาที ที่ระยะ $L_T$ และ $2L_T$ แสดงด้วยวงกลมเปิดและปิด ตามลำดับ ซึ่งมีแนวโน้มลดลงอย่างชัดเจนแสดงด้วยเส้นแนวโน้ม

จากภาพที่ 4-5 พบว่า แนวโน้มสภาพการมองเห็นริ้วรอยการแทรกสอดลดลง เมื่อความคลาดเคลื่อนของความเร็ว $\Delta v$ เพิ่มมากขึ้นโดยที่ $z=1L_T$ มีการลดลงของค่าสภาพการมองเห็นริ้วรอยน้อยกว่าที่ $z=2L_T$

### 4.3 ผลความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาค เมื่อลำอนุภาคมีการกระจายตัวของความเร็วเทียบกับผลการทดลอง

เมื่อลำโมเลกุลที่ประกอบด้วยคาร์บอน 60 อะตอม เคลื่อนผ่านเกรตติงเป็นลำโมเลกุลอาพันธ์ แล้วเลี้ยวเบนผ่านเกรตติง ด้วยอัตราเร็วเฉลี่ย 117 เมตรต่อวินาทีและมีการกระจายตัวของความเร็ว 8% หรือ $\Delta v$=9.36 m/s ในทิศทางตามแนวแกน $z$ แล้วเดินทางผ่านเข้าไปยังเกรตติงหน้ากากซึ่งถูกวางที่ระยะห่างจากเกรตติงเลี้ยวเบนที่ระยะ $2L_T$ โดยเกรตติงหน้ากากสามารถเลื่อนตามแนวขวางในแนวแกน $x$ ด้วยค่า $\delta$ ครั้งละ 20 นาโนเมตร เกรตติงทั้งสอง มีคาบ $d$ = 991 นาโนเมตร มีอัตราส่วนของช่องเปิด $f$ = 0.45 เช่นเดียวกับที่ใช้ในการทดลอง (Berninger, Stefanov, Deachapunya, & Arndt, 2007) มีรัศมีการกระจายของลำโมเลกุลที่มีรูปร่างแบบเกาส์เซียน $\beta_x$ ค่อนข้างมากจนลำโมเลกุลครอบคลุมรูของเกรตติงหลายช่องเพื่อให้ได้ริ้วรอยการแทรกสอดที่ชัดเจนและ $\beta_z$ มากกว่าความยาวคลื่นเดอบรอยล์ ($\lambda_{dB}$) ทำให้ได้คลื่นอิสระ (Free wave) ตามแนวแกน z นอกจากนี้ริ้วรอยการแทรกสอดหลังหน้ากากสามารถตรวจรับได้ เมื่อเลื่อนเกรตติงหน้ากากตามแนวขวางเป็นระยะ 2 คาบ ดังนั้นความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคหลังเกรตติงหน้ากากสามารถจำลองได้จากสมการที่ (3-21) ได้ผลการจำลองดังนี้




ภาพที่ 4-6 ผลการจำลองสมการที่ (3-21) เปรียบเทียบกับผลการทดลอง

จากภาพที่ 4-6 วงกลมปิดและเปิด จะแสดงถึงข้อมูลในการทดลอง (Berninger, Stefanov, Deachapunya, & Arndt, 2007) ที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของสนามไฟฟ้าและไม่ได้รับอิทธิพลจากสนามไฟฟ้า ตามลำดับ และเส้นทึบสีน้ำเงินและสีดำ จะแสดงถึงผลการจำลองที่ได้จากสมการที่ (3-21) และพบว่าผลการจำลองทางทฤษฎีจะมีความสอดคล้องกับผลการทดลองในห้องปฏิบัติการ นอกจากนี้ยังพบว่าเส้นทฤษฎีที่ได้รับจะเป็นเส้นโค้งซึ่งเป็นผลมาจากการกระจายตัวของความเร็วอนุภาค และมีความแตกต่างจากสมการที่ (3-18) อย่างชัดเจน สำหรับแรง $F_x$ จากสนามไฟฟ้าคงที่ที่พบในตัวแผ่กระจายของสมการที่ (3-10) จะทำให้ริ้วรอยการแทรกสอดบนฉากรับเลื่อนไปตามแนวขวางเป็นระยะประมาณ 1 คาบของเกรตติง

# บทที่ 5
# สรุปผล อภิปรายผล

การศึกษากลศาสตร์ควอนตัมแบบไฟยน์แมนที่เลี้ยวเบนในสนามใกล้โดยใช้ปริพันธ์ตามเส้นทาง ผู้วิจัยได้ดำเนินการคำนวณหาตัวแผ่กระจาย ฟังก์ชันคลื่น และความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาค แล้วจากนั้นได้ประยุกต์ใช้กลศาสตร์ควอนตัมแบบไฟยน์แมนเข้ากับการเลี้ยวเบนของโมเลกุล ที่ประกอบด้วย คาร์บอน 60 อะตอม ภายใต้อิทธิพลสนามไฟฟ้าคงที่ แบ่งการศึกษาเป็น 3 ขั้นตอนคือ ตอนที่ 1 ศึกษาความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคเทียบกับผลการทดลอง ตอนที่ 2 ศึกษาความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาค เมื่อลำอนุภาคมีการกระจายตัวของความเร็ว และตอนที่ 3 ศึกษาความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาค เมื่อลำอนุภาคมีการกระจายตัวของความเร็วเทียบกับผลการทดลอง สามารถสรุปผลและอภิปรายผล ได้ดังนี้



## 5.1 สรุปผล และอภิปรายผล

จากการศึกษากลศาสตร์ควอนตัมแบบไฟยน์แมนที่เลี้ยวเบนในสนามใกล้ ผู้วิจัยได้สมมติฟังก์ชันคลื่นเริ่มต้นในรูปของอนุกรมฟูเรียร์ที่มีการกระจายตัวแบบเกาส์เซียน โดยประยุกต์ใช้ปริพันธ์ตามเส้นทางของไฟยน์แมนทำให้ได้ฟังก์ชันคลื่นแม่นตรงของการเลี้ยวเบนในสนามใกล้ พบว่าผลความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคสอดคล้องกับผลการทดลองอย่างชัดเจน สามารถสรุปผลและอภิปรายผล ได้ดังนี้

**ตอนที่ 1 ศึกษาความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคเทียบกับผลการทดลอง**

จากการศึกษาความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคเทียบกับผลการทดลอง พบว่าผลการจำลองทางทฤษฎีที่อยู่บนพื้นฐานกลศาสตร์ควอนตัมแบบไฟยน์แมนจะมีความสอดคล้องกับผลการทดลอง ดังภาพที่ 4-1 นอกจากนี้ยังพบว่าแรงไฟฟ้าตามขวางจะมีอิทธิพลและเลื่อนริ้วรอยการแทรกสอดบนฉากรับไปในระยะเกรตติง 1 คาบของเกรตติง โดยพบว่ามีขนาดประมาณ $9.4\times10^{-26}$ นิวตัน ซึ่งแรงนี้เกิดจากสนามไฟฟ้าที่มีต่อความเป็นขั้วของโมเลกุลคาร์บอน-60

**ตอนที่ 2 ศึกษาความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาค เมื่อลำอนุภาคมีการกระจายตัวของความเร็ว**

เมื่อลำอนุภาคมีการกระจายตัวของความเร็วมากขึ้น พบว่า แนวโน้มสภาพการมองเห็นริ้วรอยการแทรกสอดมีความแตกต่างกันเล็กน้อยที่ตำแหน่ง $z=0.25L_T$ และ $0.5L_T$ รวมถึงค่าสภาพการมองเห็นริ้วรอยแทรกสอด $z=0.5L_T$ น้อยกว่าที่ $z=0.25L_T$ และสภาพการมองเห็นริ้วรอยการ

แทรกสอดที่เห็นได้ชัดเจนเมื่อเปรียบเทียบระหว่าง $L_T$ และ $2L_T$ คือตำแหน่ง $L_T$ นอกจากนี้เมื่อเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนของความเร็ว $\Delta v$ จาก ±10 ถึง ±50 เมตรต่อวินาที สภาพการมองเห็นริ้วรอยการแทรกสอดที่เห็นชัดน้อยที่สุดคือความคลาดเคลื่อนของความเร็ว ±50 เมตรต่อวินาที และสภาพการมองเห็นริ้วรอยการแทรกสอดที่เห็นชัดมากที่สุดคือไม่มีความคลาดเคลื่อนของความเร็ว

**ตอนที่ 3 ศึกษาความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาค เมื่อลำอนุภาคมีการกระจายตัวของความเร็ว**

เมื่อมีการกระจายตัวของความเร็วเปรียบเทียบกับผลการทดลอง พบว่าผลการจำลองทางทฤษฎีของริ้วรอยการแทรกสอดของลำโมกุลด้วยกลศาสตร์ควอนตัมแบบไฟยน์แมน พบว่ามีความสอดคล้องกับผลการทดลอง ดังภาพที่ 4-6 นอกจากนี้ยังพบว่าเส้นกราฟจากทฤษฎีที่ได้รับเป็นเส้นโค้งซึ่งเป็นผลมาจากการกระจายตัวของความเร็วอนุภาค และมีความแตกต่างจากสมการที่ (3-18) อย่างชัดเจน สำหรับแรงไฟฟ้าตามขวางจะมีอิทธิพลทำให้เลื่อนริ้วรอยการแทรกสอดบนฉากรับไปในระยะเกรตติง 1 คาบของเกรตติง ซึ่งแรงนี้เกิดจากอิทธิพลของสนามไฟฟ้าที่มีต่อความเป็นขั้วของโมเลกุลคาร์บอน-60

# บรรณานุกรม


นรา จิรภัทรพิมล. (2553). *กลศาสตร์ควอนตัม*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

วิรุฬห์ สายคณิต. (2525). *ทฤษฎีควอนตัม* (1 ed.). กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2551). *หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม ฟิสิกส์ เล่ม 5* (1 ed.). กรุงเทพฯ: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ.

Arndt, M., Nairz, O., Vos-Andreae, J., Keller, C., van der Zouw, G., & Zeilinger, A. (1999). Wave–particle duality of C60 molecules. *Nature,* 401, 680. doi:10.1038/44348

Bach, R., Gronniger, G., & Batelaan, H. (2013). An electron Talbot-Lau interferometer and magnetic field sensing. *Applied Physics Letters,* 103(25). doi:10.1063/1.4852677

Berninger, M., Stefanov, A., Deachapunya, S., & Arndt, M. (2007). Polarizability measurements of a molecule via a near-field matter-wave interferometer. *Physical Review A,* 76(1), 013607.

Brezger, B., Hackermuller, L., Uttenthaler, S., Petschinka, J., Arndt, M., & Zeilinger, A. (2002). Matter-wave interferometer for large molecules. *Phys Rev Lett,* 88(10), 100404. doi:10.1103/PhysRevLett.88.100404

Christian Grosche, F. S. (1998). *Handbook of Feynman Path Integrals* (Vol. 145). Germany: Springer.

Deachapunya, S., & Srisuphaphon, S. (2014). Sensitivity of transverse shift inside a double-grating Talbot interferometer. *Measurement,* 58, 1-5.

Fixler, J. B., Foster, G., McGuirk, J., & Kasevich, M. (2007). Atom interferometer measurement of the Newtonian constant of gravity. *Science,* 315(5808), 74-77.

Greenberger, D., Hentschel, K., & Weinert, F. (2009). *Compendium of quantum physics: concepts, experiments, history and philosophy*: Springer Science & Business Media.

Griffiths, D. J. (2005). *Introduction to Quantum Mechanics,* (2 ed.). United States of America: Pearson Education International.

Hackermüller, L., Uttenthaler, S., Hornberger, K., Reiger, E., Brezger, B., Zeilinger, A., & Arndt, M. (2003). Wave Nature of Biomolecules and Fluorofullerenes. *Physical Review Letters,* 91(9), 090408.

Nairz, O., Arndt, M., & Zeilinger, A. (2003). Quantum interference experiments with large molecules. *American Journal of Physics,* 71(4), 319-325. doi:10.1119/1.1531580

Schulten, K. (2000). *Notes on Quantum Mechanics*. USA: University of Illinois.

Storey, P., & Cohen-Tannoudji, C. (1994). The Feynman path integral approach to atomic interferometry. A tutorial. *Journal de Physique II,* 4(11), 1999-2027.

Talbot, H. F. (1836). LXXVI. Facts relating to optical science. No. IV. *The London and Edinburgh Philosophical Magazine and Journal of Science,* 9(56), 401-407.

Temnuch, W., Deachapunya, S., Panthong, P., Chiangga, S., & Srisuphaphon, S. (2018). A simple description of near-field and far-field diffraction. *Wave Motion,* 78, 60-67. doi:https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2018.01.002

# ภาคผนวก ก

ตัวแผ่กระจายสำหรับอนุภาคเมื่อแรงคงที่

## ตัวแผ่กระจายสำหรับอนุภาคเมื่อแรงคงที่

อนุภาคมวล $M$ เคลื่อนที่ในแนวระนาบ $xz$ จากนั้นจะได้รับอิทธิพลจากแรง $F_x$ ที่กระทำในทิศทางในแนวแกน $x$ ดังนั้นจึงสมมติเส้นทางเดินแบบฉบับของอนุภาคในแนวแกน $x$ ที่เวลา $t$ ใดๆ เป็น

$$x_{cl} = A + Bt + \frac{F_x}{2M}t^2 \qquad (\text{ก-1})$$

เมื่อ $A$ และ $B$ เป็นค่าคงที่ โดยอนุภาคเริ่มต้นอยู่ที่ตำแหน่ง ($x_a$ , $t$=0) และตำแหน่งสุดท้าย ($x_b$ , $t$=$T$) สามารถที่จะคำนวณหาค่าคงที่ $A$ และ $B$ จะได้เส้นทางเดินแบบฉบับของอนุภาคเป็น

$$x_{cl} = x_a + \left( \frac{x_b - x_a - \frac{F_x}{2M}T^2}{T} \right) t + \frac{F_x}{2M}t^2 \qquad (\text{ก-2})$$

และเช่นเดียวในแนวแกน $z$ สามารถคำนวณหาเส้นทางเดินแบบฉบับของอนุภาคที่ไม่มีแรงมากระทำได้เป็น

$$z_{cl} = z_a + \left( \frac{z_b - z_a}{T} \right) t \qquad (\text{ก-3})$$

โดยคำนวณหาลากรานเจียนของอนุภาคเมื่อแรงคงที่กระทำในทิศทางในแนวแกน $x$ ของระบบ ได้จาก

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_{cl}^2 + F_x x_{cl} + \frac{1}{2}m\dot{z}_{cl}^2 \qquad (\text{ก-4})$$

จากนั้นดำเนินการอนุพันธ์สมการที่ (ก-2) และ (ก-3) แล้วแทนในสมการที่ (ก-4) จะได้ลากรานเจียนของระบบเป็น

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{M}{2}\left( \frac{x_b - x_a - \frac{1}{2}\frac{F_x T^2}{M}}{T} + \frac{F_x t}{M} \right)^2 \\ & + F\left( x_a + \frac{\left( x_b - x_a - \frac{1}{2}\frac{F_x T^2}{M} \right) t}{T} + \frac{1}{2}\frac{F_x t^2}{M} \right) + \frac{M}{2}\left( \frac{z_b - z_a}{T} \right)^2 \end{aligned} \qquad (\text{ก-5})$$

คำนวณหากิริยาแบบฉบับ โดยการปริพันธ์ ในช่วงเวลา $t$ จาก 0 ถึง $T$ จะได้

$$S_{cl} = -\frac{1}{24}\frac{F_x^2 T^3}{M} + \left( \frac{1}{2}\frac{M}{T}\left( x_b - x_a \right)^2 + \frac{1}{2}F_x T\left( x_a + x_b \right) \right) + \frac{1}{2}\frac{M\left( z_b - z_a \right)^2}{T} \qquad (\text{ก-6})$$

เพื่อที่จะคำนวณหาตัวแผ่กระจายสำหรับอนุภาคเมื่อแรงคงที่ ดังนั้นจึงแทนสมการที่ (ก-6) ในสมการที่ (2-50) จะได้

$$K(b,a)=\frac{M}{\left(2\pi T\hbar\right)} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{1}{24}\frac{F_x^2T^3}{M}+\left(\frac{1}{2}\frac{M}{T}\left(x_b-x_a\right)^2+\frac{1}{2}F_x T\left(x_a+x_b\right)\right)+\frac{1}{2}\frac{M\left(z_b-z_a\right)^2}{T}\right)\right\} \tag{ก-7}$$

จัดพจน์สมการที่ (ก-7) และเปลี่ยนเวลา $T$ ให้อยู่ในรูปของ $t$ จะได้ตัวแผ่กระจายเป็น

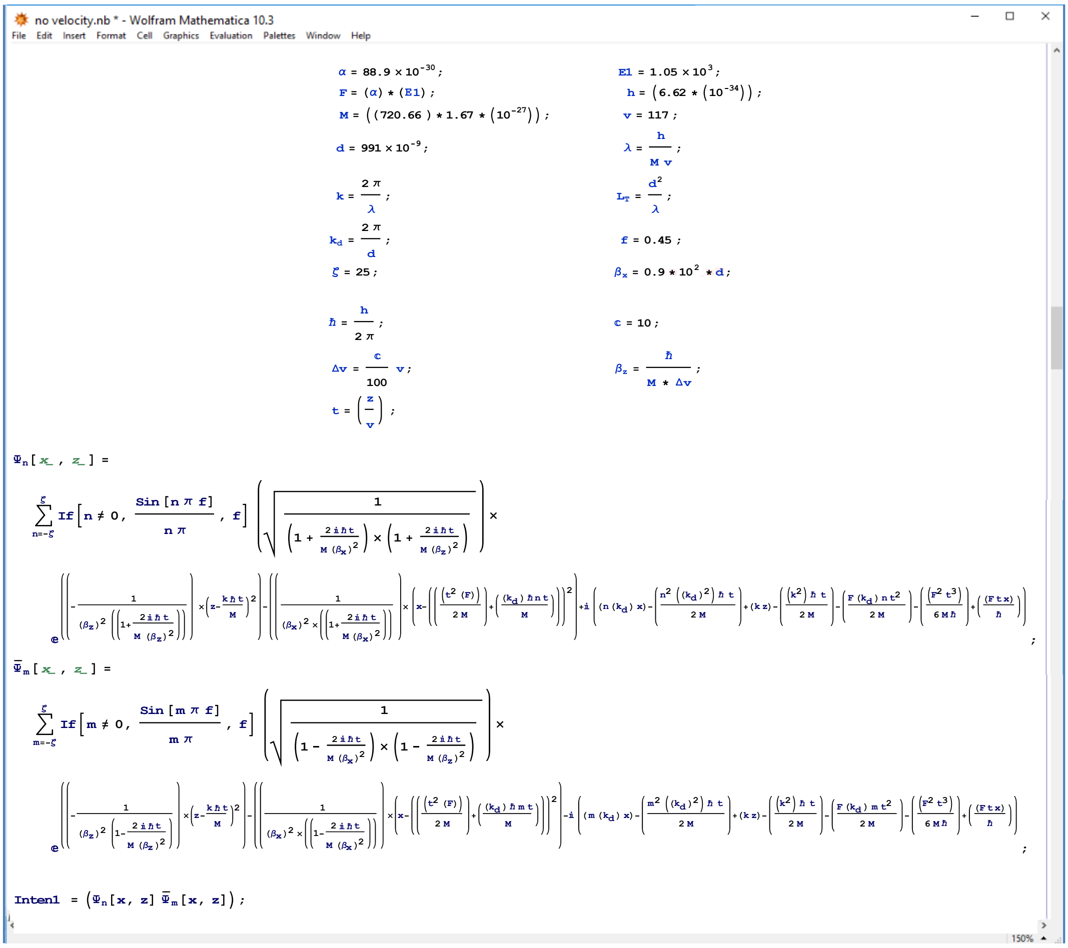
$$K\left(x,z,t;x_0,z_0,0\right)=\frac{M}{2\pi i\hbar t}\exp\left(\frac{iM}{2\hbar t}\left(z-z_0\right)^2\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(\frac{M}{2}\frac{\left(x-x_0\right)^2}{t}+\frac{F_x\left(x+x_0\right)t}{2}-\frac{F_x^2t^3}{24M}\right)\right) \tag{ก-8}$$

สมการที่ (ก-8) คือตัวแผ่กระจายสำหรับอนุภาคเมื่อแรงคงที่ที่กระทำในแนวแกน $x$ ซึ่งจะสอดคล้องที่พบในสมการที่ (3-10)

## ภาคผนวก ข

การจำลองความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคของฟังก์ชันคลื่นหลังเลี้ยวเบนผ่าน
เกรตติงด้วยโปรแกรม Mathematica

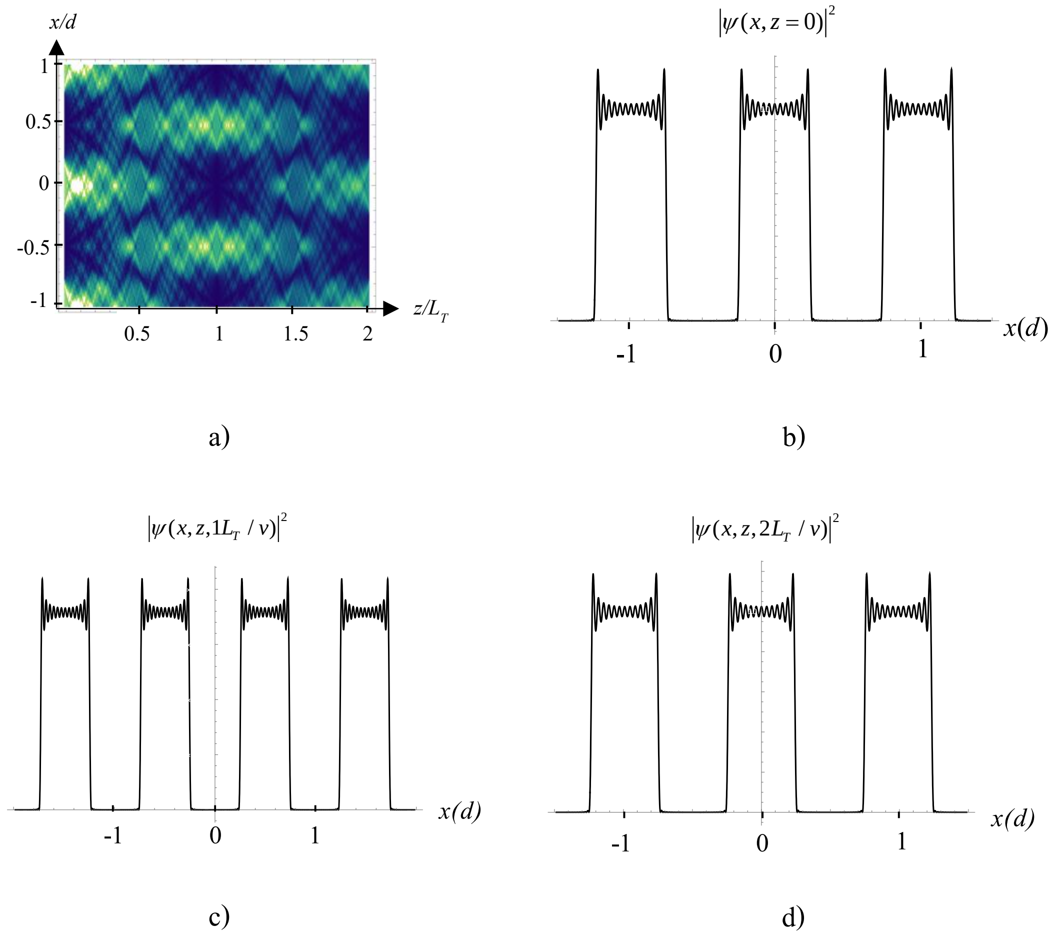
**วิธีการจำลองความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคของฟังก์ชันคลื่นหลังเลี้ยวเบนผ่านเกรตติงด้วยโปรแกรม Mathematica เมื่อไม่มีการกระจายตัวของความเร็ว**




ภาพภาคผนวก ข-1 กำหนดตัวแปรเบื้องต้นของโมเลกุลคาร์บอน-60

จากภาพภาคผนวก ข-1 กำหนดให้ลำโมเลกุลคาร์บอน-60 ที่เป็นเคลื่อนที่ในแนวแกน z ด้วยอัตราเร็ว v มีความยาวคลื่นเดอบรอยล์ $\lambda = h/M v$ เมื่อ h คือค่าคงที่ของพลังค์ M คือมวลของโมเลกุลคาร์บอน-60 หรือได้เลขคลื่น $k = 2\pi/\lambda$ และมีรัศมีการกระจายของลำโมเลกุลที่มีรูปร่างแบบเกาส์เซียน $\beta_x$ มากกว่าคาบของเกรตติงให้เป็น 90d และ $\beta_z$ มากกว่าความยาวคลื่นเดอบรอยล์ให้เป็น $2\lambda$ เคลื่อนที่ผ่านเกรตติงเลี้ยวเบนที่มีคาบเกรตติง d มีองค์ประกอบของเลขคลื่นในแนวระนาบของเกรตติง $k_d$ มีอัตราส่วนช่องเปิด f โดยอยู่ภายใต้อิทธิพลของสนามไฟฟ้า ที่มีแรงไฟฟ้า $F = \alpha E1$ เมื่อ $\alpha$ คือค่าความมีขั้วของโมเลกุล และ E1 คือสนามไฟฟ้า โดยความหนาแน่นของ

โอกาสที่จะพบอนุภาค Inten1 หลังเกรตติงเลี้ยวเบน คำนวณได้จากการคูณฟังก์ชันคลื่น $\Psi_n$ และคอนจูเกตฟังก์ชันคลื่น $\bar{\Psi}_m$ ที่พบในสมการที่ (3-14) ตรวจพบได้ที่ฉากรับ ที่ระยะทาร์บอท $L_T$ ดังภาพภาคผนวก ข-2




ภาพภาคผนวก ข-2 แสดงพรมทาร์บอท ในภาพ a) และความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาค Inten1 หลังเกรตติงเลี้ยวเบนที่ระยะ b) 0 , c) $1L_T$ , และ d) $2L_T$

เพื่อที่จะจำลองความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาค ดังสมการที่ (3-18) จึงกำหนดฟังก์ชันขั้นบันได G1[x_, w_] ซึ่งสอดคล้องกับเกรตติงหน้ากาก แล้วคูณด้วย Inten1 โดยมี $\Delta$ คือ ระยะเลื่อนเกรตติงหน้ากากตามแนวขวางในแนวแกน x แสดงขั้นตอนดังภาพผนวก ข-3

no velocity.nb * - Wolfram Mathematica 10.3

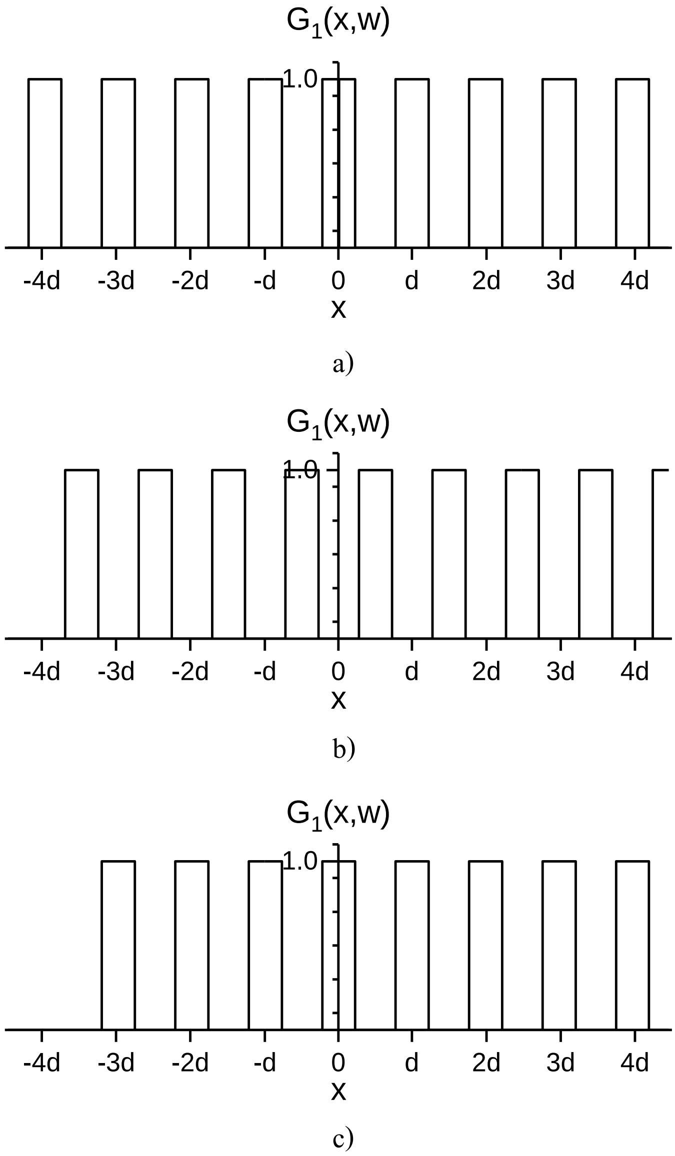
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

```
j1 = 4;
w = (f) * 10;
G1[x_ , w_ ] := Sum[If[Abs[j] * d - (w * d)/20 < x * Sign[2 j + 1] < Abs[j] * d + (w * d)/20, 1, 0], {j, -j1, -1, 1}] +
   If[0 - (w d)/20 < x < 0, 1, 0] + If[0 < x < 0 + (w d)/20, 1, 0] +
   Sum[If[Abs[j] * d - (w * d)/20 < x * Sign[2 j + 1] < Abs[j] * d + (w * d)/20, 1, 0], {j, 1, j1, 1}]

Nm = 20 × 10^-9;

Export["1LT_grating _no_velocity .xlsx",
   Table[{Δ, Sum[Abs[(Intenl /. z → 1 LT)] * G1[x - Δ, w], {x, 0.0, j1 d, 0.01 d}]}, {Δ, 0, 2 d, (Nm)}]
    // TableForm ] // Timing

Quit[]
```

100%

ภาพภาคผนวก ข-3 จำลองความหนาแน่นที่จะพบอนุภาคบนฉากรับ

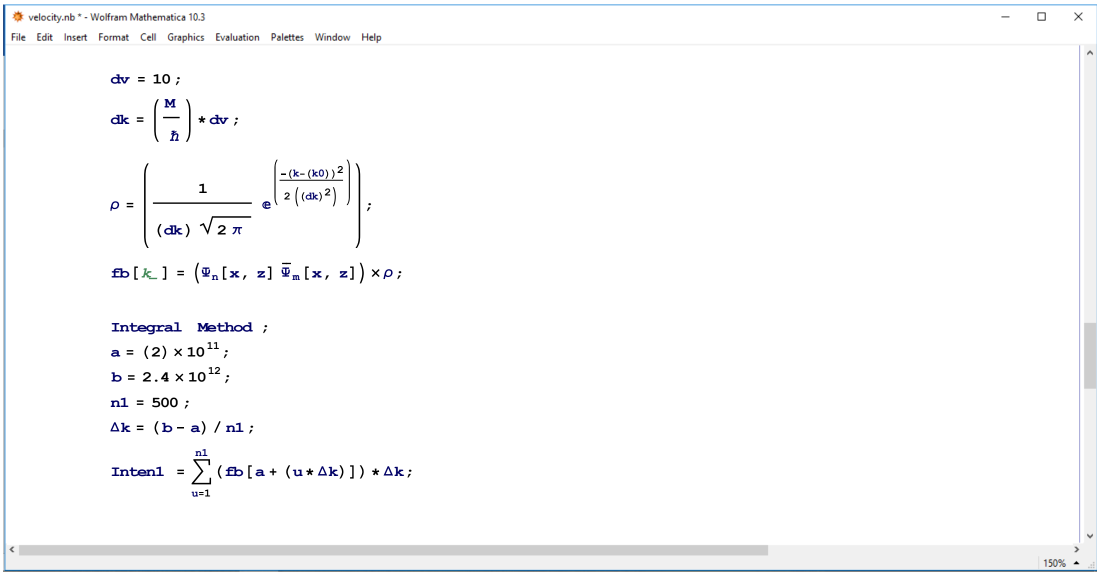
จากภาพภาคผนวก ข-3 $j1 = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ ซึ่งแสดงถึงความสอดคล้องกับจำนวนช่องสลิตของเกรตติง เช่น j1 = 4 จะมีจำนวนช่องสลิตของเกรตติง 9 ช่อง เป็นต้น โดยเกรตติงหน้ากากจะถูกวางไว้หลังเกรตติงเลี้ยวเบนที่ $Z \rightarrow 1L_T$ จากนั้นเลื่อนเกรตติงในแนวขวาง จาก 0 ถึง 2d ในแนวแกน x ด้วยค่า $\Delta$ ครั้งละ 20 nm จากนั้นใช้คำสั่ง Table เพื่อสร้างข้อมูลความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคหลังผ่านเกรตติงกากที่ฉากรับ แล้วใช้คำสั่ง TableForm เพื่อสร้างข้อมูลให้เป็นคอลัมน์ จะได้ข้อมูล ระยะเลื่อนตามแนวขวางจากตำแหน่ง 0 ถึง 2d และความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคบนฉากรับ หลังจากนั้นใช้คำสั่ง Export เพื่อนำข้อมูลไปใช้ในการดำเนินงานวิจัย




ภาพภาคผนวก ข-4 แสดงเกรตติงหน้ากาก $G_1$[x_, w_] ที่มีระยะเลื่อน $\Delta$ ตามแนวขวางใน แนวแกน x ที่ a) 0, b) 0.5d และ c) d

## วิธีการจำลองความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคของฟังก์ชันคลื่นหลังเลี้ยวเบนผ่านเกรตติงด้วยโปรแกรม Mathematica เมื่อมีการกระจายตัวของความเร็ว

การกำหนดตัวแปรเบื้องต้นของข้อมูลคาร์บอน-60 สามารถทำได้เช่นเดียวกันกับเมื่อไม่มีความคลาดเคลื่อนของความเร็วเฉลี่ย แสดงได้ดังภาพภาคผนวก ข-1 ด้านบน จากนั้นเพื่อที่จะหาความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคหลังเกรตติงเลี้ยวเบน Inten1 จึงกำหนดตัวแปรฟังก์ชันเกาส์เซียนที่มีการกระจายตัวของความเร็ว $\rho$ ดังสมการที่ (3-22) เมื่อมีความคลาดเคลื่อนความเร็ว dv จากนั้นคูณด้วยฟังก์ชันคลื่น $\Psi_n$ และคอนจูเกตฟังก์ชันคลื่น $\bar{\Psi}_m$ ที่พบในสมการที่ (3-14) จะได้ตัวแปร fb[k_] แสดงดังภาพภาคผนวก ข-5




ภาพภาคผนวก ข-5 กำหนดตัวแปรความคลาดเคลื่อนของความเร็ว

จากภาพภาคผนวก ข-5 ความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาค Inten1 หลังเกรตติงเลี้ยวเบน คำนวณได้ด้วยตัวแปร fb[k_] โดยใช้ปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical integration) แบบผลรวมรีมันน์ (Riemann sum) โดยมีช่วงขอบเขตของการปริพันธ์ตั้งแต่ a ถึง b และใช้จำนวนจุด n1 จากนั้นเพื่อที่จะจำลองความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคที่ฉากรับ ดังสมการที่ (3-21) สามารถทำได้เช่นเดียวกันกับเมื่อไม่มีการกระจายตัวของความเร็ว แสดงได้ดังภาพภาคผนวก ข-3 ด้านบน