รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

การประมาณค่าของค่าเฉลี่ยเลขคณิตของรากที่ r ของจำนวนนับ n พจน์แรก

Approximation of the Arithmetic Mean of the r–Roots
of the First n Positive Integers

โดย
นายสมคิด อินเทพ
นายบุญยงค์ ศรีพลแผ้ว
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

โครงการวิจัยประเภทงบประมาณเงินรายได้ส่วนงาน
ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. ๒๕๖๒
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

รหัสโครงการ...............................

สัญญาเลขที่ sc04/2562

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

การประมาณค่าของค่าเฉลี่ยเลขคณิตของรากที่ r ของจำนวนนับ n พจน์แรก

Approximation of the Arithmetic Mean of the r–Roots
of the First n Positive Integers

โดย

นายสมคิด อินเทพ

นายบุญยงค์ ศรีพลแผ้ว

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากงบประมาณเงินรายได้ส่วนงาน ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2562 คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา เลขที่สัญญา sc04/2562

นายสมคิด อินเทพ

นายบุญยงค์ ศรีพลแผ้ว

ผู้วิจัย

บทคัดย่อ

ชื่อโครงการ การประมาณค่าของค่าเฉลี่ยเลขคณิตของรากที่ r ของจำนวนนับ n พจน์แรก

ชื่อผู้วิจัย นายสมคิด อินเทพ และนายบุญยงค์ ศรีพลแผ้ว

เราทำการเปรียบเทียบค่าพื้นของค่าเฉลี่ยของรากที่ r ของจำนวนเต็มกับลำดับที่ถูกประมาณค่าในช่วงที่กำหนด

Abstract

Project Title Approximation of the Arithmetic Mean of the r–Roots of the First n Positive Integers

Investigators: Somkid Intep and Boonyong Sriponpeaw

We compare the floor of mean of r-root of integers with approximated sequence in the defined intervals.

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและสรุปความเป็นมาของโครงการฯ

มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านได้ทำการศึกษาการเขียนผลบวกของเลขจำนวนเต็มบวกในรูปแบบอนุกรมต่าง ๆ ซึ่งหนึ่งในนั้น คือ การเขียนผลบวกกำลัง p ของจำนวนนับ n พจน์แรก เมื่อ p เป็นจำนวนเต็มบวก ในรูปอนุกรมจำกัดของพหุนามดีกรี $p+1$ ของ n ดังนี้

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k \binom{p+1}{k} B_k n^{p+1-k}$$

โดยที่ B_k เป็นจำนวนเบอร์นูลลี (Bernoulli number) [1]

นอกจากนี้ยังมีผู้ที่ได้คิดค้นการเขียนผลบวกดังกล่าวในรูปแบบของจำนวนออยเลอร์ (Eulerian number) [2]

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \sum_{k=1}^{p} A(p,k)\binom{n+k}{p+1}$$

โดยที่ $A(p,k)$ เป็นจำนวนออยเลอร์

เราสามารถประยุกต์ใช้การเขียนผลบวก $\sum_{k=1}^{n} k^p$ ในรูปอนุกรมจำกัดเพื่อหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^p$ ได้โดยง่าย ปัญหาที่น่าสนใจ คือ เมื่อ p เป็นจำนวนตรรกยะ ยังไม่มีผู้คิดค้นสูตรการเขียนผลบวกดังกล่าวในรูปอนุกรมจำกัด แต่สามารถเขียนอยู่ในรูปอนุกรมอนันต์ ซึ่งไม่สามารถหาค่า $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^p$ ได้โดยตรงจากตัวอนุกรม ซึ่งในงานวิจัยนี้เราจะทำการหาขอบเขตล่างและขอบเขตบนของผลบวกดังกล่าว เมื่อ $p=\frac{1}{r}$ และคำนวณค่าพื้น (floor value) ของค่าเฉลี่ยของรากที่ r ของจำนวนนับ n พจน์แรก

1.2 **วัตถุประสงค์ของการวิจัย**

1. เพื่อหาขอบเขตล่างและขอบเขตบนของค่าเฉลี่ยเลขคณิตของรากที่ r ของจำนวนนับ n พจน์แรก
2. เพื่อหาค่าพื้น (floor value) ของค่าเฉลี่ยเลขคณิตของรากที่ r ของจำนวนนับ n พจน์แรก

1.3 **ขอบเขตของการวิจัย**

ในการทำวิจัยนี้เราทำการศึกษาการหาขอบเขตล่างและขอบเขตบนของค่าเฉลี่ยเลขคณิตของรากที่ r ของจำนวนนับ n พจน์แรก นั่นคือ $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[r]{k}$ เมื่อ $r \geq 3$ เป็นจำนวนเต็ม โดยใช้หลาย ๆ วิธี เช่น ผลบวกรีมานน์ กฎสี่เหลี่ยมคางหมู กฎของซิมป์สัน เป็นต้น ในการหาค่าขอบเขตล่างและขอบเขตบน แล้วทำการ

เปรียบเทียบเพื่อหาค่าขอบเขตที่ดีที่สุด นอกจากนี้เราจะศึกษาค่าพื้นของค่าเฉลี่ยดังกล่าว นั่นคือ เราจะหาค่าของ $\left\lfloor \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[r]{k} \right\rfloor$ เมื่อ $\lfloor x \rfloor$ แทนจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x

บทที่ 2
วิธีการดำเนินการวิจัย

ศึกษารูปแบบการหาขอบเขตของค่าเฉลี่ยเลขคณิต ฯ ด้วยวิธีการใหม่ สำหรับกรณี r > 2 ค้นพบว่า วิธีการเปรียบเทียบขอบเขตค่าเฉลี่ย ฯ เมื่อ r = 2 ไม่สามารถนำมาสรุปในกรณี r > 2 ได้ และค้นพบว่า ในแต่ละ r จะมีวิธีการคิดที่แตกต่างกัน ซึ่งในขณะนี้ผู้วิจัยค้นพบวิธีคิดเฉพาะกรณี r = 3 ในรูปแบบการพิสูจน์ใหม่เท่านั้น และยังไม่สามารถหาข้อสรุปได้ในกรณี r > 3

สำหรับจำนวนนับ n จะได้ว่า ค่าพื้นของค่าเฉลี่ยเลขคณิตของรากที่ 3 ของจำนวนนับ n ตัวแรก มีค่าเท่ากับ

$$\left\lfloor \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{k} \right\rfloor = \left\lfloor \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4n}\right)\sqrt[3]{n+1}-\frac{1}{4n} \right\rfloor$$

โดยค่าเฉลี่ยเลขคณิต ฯ $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{k}$ มีขอบเขตล่างและขอบเขตบน คือ $L(n)$ และ $A(n)$ ตามลำดับ

เมื่อ $L(n) = \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4n}\right)\sqrt[3]{n+1}-\frac{11}{36n}$

และ $A(n) = \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4n}\right)\sqrt[3]{n+1}-\frac{1}{4n}$

บทที่ 3

ผลการวิจัย

1. Main Theorem

In this paper, we present a similar theorem in case of cube roots as follows:

Theorem 1.1. *For any positive integer n,*

$$\left\lfloor \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{k} \right\rfloor = \left\lfloor \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4n}\right)\sqrt[3]{n+1}-\frac{1}{4n} \right\rfloor.$$

The idea of our proof is to divide n into 9 cases of numbers modulo 9 and to prove that in each case, both $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{k}$ and $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4n}\right)\sqrt[3]{n+1}-\frac{1}{4n}$ have the same floor.

For our convenience, for $x \geq 1$, we define

$$A(x) = \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4x}\right)\sqrt[3]{x+1}-\frac{1}{4x}$$

and

$$L(x) = \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4x}\right)\sqrt[3]{x+1}-\frac{11}{36x}.$$

From Wihler's equation, we obtain that

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{k} = \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4n}\right)\sqrt[3]{n+1}-\frac{1}{4n}-\frac{\delta_{1,n,3}}{36n}$$

where $2^{-2/3}-n^{-2/3} < \delta_{1,n,3} < \frac{5}{3}-n^{-2/3}$. Notice that for $n > 2$, $0 < \delta_{1,n,3} < 2$.
This implies that

$$A(n) > \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{k} > L(n) \quad \text{for } n > 2.$$

In order to prove the main theorem, we need the following lemmas.

Lemma 1.2. $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{k}$ *is an increasing sequence.*

Proof. We can easily see that the inequality $S_n \leq S_{n+1}$ is equivalent to $\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{k} \leq n\sqrt[3]{n+1}$. We prove the latter using mathematical induction. For $n = 1$, $\sqrt[3]{1} \leq 1\sqrt[3]{2}$ implies the basis step. To show inductive step, we assume $\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{k} \leq n\sqrt[3]{n+1}$. We then have

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sqrt[3]{k} = \sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{k}+\sqrt[3]{n+1} \leq (n+1)\sqrt[3]{n+2}.$$

Hence $\{S_n\}$ is an increasing sequence. □

For $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, we define the set $B_{j,k}$ for $j = 1, 2$ as follows:

$$B_{1,k} = \begin{cases} \left[\dfrac{64(9k+1)^3 - 37}{27}, \dfrac{64(9k+2)^3 - 53}{27}\right] \cap \mathbb{N} & \text{if } k = 0, 1, 2, \\ \left[\dfrac{64(9k+1)^3 - 37}{27}, \dfrac{64(9k+2)^3 - 80}{27}\right] \cap \mathbb{N} & \text{if } k \geq 3, \end{cases}$$

$$B_{2,k} = \begin{cases} \left[\dfrac{64(9k+2)^3 - 26}{27}, \dfrac{64(9k+3)^3 - 54}{27}\right] \cap \mathbb{N} & \text{if } k = 0, 1, 2, \\ \left[\dfrac{64(9k+2)^3 - 53}{27}, \dfrac{64(9k+3)^3 - 54}{27}\right] \cap \mathbb{N} & \text{if } k \geq 3, \end{cases}$$

and for $j = 3, 4, \ldots, 9$, define $B_{j,k}$ as

$$B_{j,k} = \left[\frac{64(9k+j)^3 - b_j}{27}, \frac{64(9k+j+1)^3 - b_{j+1} - 27}{27}\right],$$

where

$$b_j = \begin{cases} 27 & \text{if } j \equiv 0 \pmod 3, \\ 2(25 - i) & \text{if } j \not\equiv 0 \pmod 3 \text{ and } j = 2^i, \\ j(5 + (-1)^i i) & \text{if } j \text{ is prime and } j \equiv i \pmod 3, \ 0 < i < 3, \end{cases}$$

and $b_{10} = 37$.

In the following lemma, we partition $\mathbb{N}$ into classes $B_{j,k}$ in order to divide the proof of main theorem into 9 cases.

Lemma 1.3. *We have* $\mathbb{N} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{9} B_{j,k}$ *where* $B_{j,k} \cap B_{j+1,k} = \emptyset$ *and* $B_{9,k} \cap B_{1,k+1} = \emptyset$. *Consequently,* $\{B_{j,k} \mid 1 \leq j \leq 9, k \geq 0\}$ *forms a partition of* $\mathbb{N}$.

Proof. Notice that $\dfrac{64(9(0)+1)^3 - 37}{27} = 1$ is the minimum of $B_{1,0}$ and it is easy to check that all boundary points of $B_{j,k}$ are integers. It is obvious from definition of $B_{j,k}$ that $\max B_{j,k} + 1 = \min B_{j+1,k}$ for $1 \leq j \leq 8$ and $\max B_{9,k} + 1 = \min B_{1,k+1}$. Hence $\{B_{j,k}\}$ partitions $\mathbb{N}$. □

Remark 1.4. *Due to derivatives, $A(x)$ and $L(x)$ are increasing functions.*

For any $n \in B_{j,k}$, to prove that S_n and $A(n)$ are in the same interval $[9k+j, 9k+j+1)$, we use the fact that $L(n) < S_n < A(n)$ and both $L(n)$ and $A(n)$ are increasing sequences. Consequently, for $n_1 = \min B_{j,k}$ and $n_2 = \max B_{j,k}$, it is sufficient to show that $L(n_1) > 9k + j$ and $A(n_2) < 9k + j + 1$ by considering the sign of coefficients of certain Taylor expansions. In case $n \in B_{1,k}$, however, this technique of using Taylor expansion is not applicable in some numbers k. For these basic numbers k, we apply simple and direct calculation instead.

Proof of Theorem 1.1. Let $n \in \mathbb{N}$.
Case 1: $n \in B_{1,k}$
Case 1.1: $k = 0$

We consider $1 = \dfrac{64(1)^3 - 3}{27} \le n \le \dfrac{64(2)^3 - 53}{27} = 17$. Since S_n and $A(n)$ are increasing sequences,

$$1 = S_1 \le S_n \le S_{17} \approx 1.9880$$

and

$$1.0099 \approx A(1) \le A(n) \le A(17) \approx 1.9894.$$

Hence $\lfloor S_n \rfloor = \lfloor A(n) \rfloor = 1$ for $1 \le n \le 17$.

Case 1.2: $k \ge 1$

Let $n_1 = \dfrac{64(9k+1)^3 - 37}{27}$. We will show that $L(n_1) > 9k + 1$. After we substitute n_1 into the following expression and expand its Taylor series about 1, we have

$$\begin{aligned}
&(36n_1(9k+1)+11)^3 - (n_1+1)(27n_1+9)^3 \\
&= -140912433282709 - 1163293726126932(k-1) - 4266503508623472(k-1)^2 \\
&\quad - 9124406608540608(k-1)^3 - 12539857656248064(k-1)^4 \\
&\quad - 11485195678476288(k-1)^5 - 7010519795527680(k-1)^6 \\
&\quad - 2750059732008960(k-1)^7 - 629107509362688(k-1)^8 \\
&\quad - 63945157902336(k-1)^9 < 0.
\end{aligned}$$

Then we obtain the following inequality $36n_1(9k+1) + 11 < \sqrt[3]{n_1+1}(27n_1+9)$. By simple calculation, we obtain $9k + 1 < \sqrt[3]{n_1+1}\left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4n_1}\right) - \dfrac{11}{36n_1} = L(n_1)$.

$$\text{Let } n_2 = \begin{cases} \dfrac{64(9k+2)^3 - 53}{27} & \text{if } k = 1, 2, \\[2ex] \dfrac{64(9k+2)^3 - 80}{27} & \text{if } k \ge 3. \end{cases}$$

We will prove that $A(n_2) < 9k + 2$. For $k = 1, 2$, we have

$$(4n_2(9k+2)+1)^3 - (n_2+1)(3n_2+1)^3 = \begin{cases} 26036934837 & \text{if } k = 1, \\ 72986823793 & \text{if } k = 2. \end{cases}$$

Hence $(4n_2(9k+2)+1)^3 - (n_2+1)(3n_2+1)^3 > 0$.

For $k = 3, 4, 5, \ldots$, we have

$$\begin{aligned}
&(4n_2(9k+2)+1)^3 - (n_2+1)(3n_2+1)^3 \\
&= 134154289152k^9 + 279918084096k^8 + 259135635456k^7 + 138919919616k^6 \\
&\quad + 47252865024k^5 + 10507311360k^4 + 1516397696k^3 \\
&\quad + 135961344k^2 + 6837440k + 146656 > 0.
\end{aligned}$$

This implies that

$$9k + 2 > \sqrt[3]{n_2 + 1}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4n_2}\right) - \frac{1}{4n_2} = A(n_2).$$

Since $A(n)$ and $L(n)$ are increasing, for $n_1 \le n \le n_2$, we have

$$9k + 1 < L(n) \le S_n \le A(n) < 9k + 2.$$

Hence $\lfloor S_n \rfloor = \lfloor A(n) \rfloor = 9k + 1$ for $k \ge 1$.

Case 2: $n \in B_{2,k}$

Let $n_1 = \begin{cases} \dfrac{64(9k+2)^3 - 26}{27}, & k = 0, 1, 2, \\[2ex] \dfrac{64(9k+2)^3 - 53}{27}, & k \ge 3. \end{cases}$

For $k = 0, 1, 2$, we gain

$$\begin{aligned}
&(36n_1(9k+2) + 11)^3 - (n_1 + 1)(27n_1 + 9)^3 \\
&= -105321436545024k^9 - 200298803429376k^8 - 168848652238848k^7 \\
&\quad - 82685802627072k^6 - 25886537404416k^5 - 5366022080256k^4 \\
&\quad - 735591839616k^3 - 64231766208k^2 - 3238636392k \\
&\quad - 71778682 < 0.
\end{aligned}$$

For $k \ge 3$, using the Taylor series expansion about 3, we obtain

$$\begin{aligned}
&(36n_1(9k+2) + 11)^3 - (n_1 + 1)(27n_1 + 9)^3 \\
&= -20723370376131937 - 95110224549962868(k-3) - 164307456860697648(k-3)^2 \\
&\quad - 152480690365127616(k-3)^3 - 86582810797661952(k-3)^4 \\
&\quad - 31713445228234752(k-3)^5 - 7563596651458560(k-3)^6 \\
&\quad - 1139310460403712(k-3)^7 - 98738846760960(k-3)^8 \\
&\quad - 3761479876608(k-3)^9 < 0.
\end{aligned}$$

In similar process to Case 1, we have $9k + 2 < L(n_1)$.

Let $n_2 = \dfrac{64(9k+3)^3 - 54}{27}$. We claim that $A(n_2) < 9k + 3$. After substituting n_2 into the following expression, we have

$$\begin{aligned}
&(4n_2(9k+3) + 1)^3 - (n_2 + 1)(3n_2 + 1)^3 \\
&= -80244904034304k^{11} - 285315214344192k^{10} - 460995415769088k^9 \\
&\quad - 446505462595584k^8 - 287877045288960k^7 - 129650051727360k^6 \\
&\quad - 41596420313088k^5 - 9502311626496k^4 - 1513938218112k^3 \\
&\quad - 160144814016k^2 - 10118551896k - 289206316 < 0.
\end{aligned}$$

Deriving the inequality in the same way, we get $A(n_2) < 9k + 3$.

Thus, for $n_1 \le n \le n_2$, we obtain that

$$9k + 2 < L(n) \le S_n \le A(n) < 9k + 3.$$

Hence $\lfloor S_n \rfloor = \lfloor A(n) \rfloor = 9k + 2$.

Case 3: $n \in B_{3,k}$

Let $n_1 = \dfrac{64(9k + 3)^3 - 27}{27}$. By direct calculation, we have

$$\begin{aligned}
&(36n_1(9k + 3) + 11)^3 - (n_1 + 1)(27n_1 + 9)^3 \\
&\quad = -1015599566668416k^9 - 2943358003445 76k^8 - 378655640911872k^7 \\
&\qquad - 283684804374528k^6 - 136343850006528k^5 - 43577890742016k^4 \\
&\qquad - 9259059419712k^3 - 1260645061680k^2 - 99771741900k \\
&\qquad - 3496110625 \ < \ 0.
\end{aligned}$$

Consequently, we gain $9k + 3 < L(n_1)$.

Let $n_2 = \dfrac{64(9k + 4)^3 - 73}{27}$. In the same process, we obtain $A(n_2) < 9k + 4$ and conclude that $\lfloor S_n \rfloor = \lfloor A(n) \rfloor = 9k + 3$.

For the remaining cases, we use arguments similar to those in case 3 to show that

$$\lfloor S_n \rfloor = \lfloor A(n) \rfloor = 9k + j, \quad \text{for } j = 4, \ldots, 9.$$

$\square$

บทที่ 4
สรุปผลการวิจัย

เราสามารถสรุปได้ว่าค่าพื้นของ $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{k}$ ว่ามีค่าพื้นเดียวกันกับ $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4n}\right)\sqrt[3]{n+1}-\frac{1}{4n}$ ในแต่ละช่วง $B_{j,k}$ ที่เป็นผลแบ่งกั้นของ $\mathbb{N}$ ซึ่งมีแนวโน้มในการที่จะทำกระบวนการเดียวกันในกรณี r อื่นๆ

บรรณานุกรม

[1] H. W. Gould, 'Evaluation of sums of convolved powers using Stirling and Eulerian numbers', *Fibonacci Quart* **16** (1978), 488-497.

[2] M. Merca, 'On the arithmetic mean of the square roots of the first n positive integers', *College Math. J.* **48** (2017), 129-133.

[3] S. Ramanujan, 'On the sum of the square roots of the first n natural numbers', *J. Indian Math. Soc.* **7** (1915), 173-175.

[4] S. Shekatkar, 'The sum of the rth roots of the first n natural numbers and new formula for factorial', (2013), https://arxiv.org/abs/1204.0877.

[5] J. Zacharias, 'Proof of a conjecture of Merca on an average of square roots', *College Math. J.* **49** (2018), 342-345.

[6] T. P. Wihler, 'Rounding the arithmetic mean value of the square roots of the first n integers', (2018), https://arxiv.org/pdf/1803.00362.