รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ
วิธีโฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชันและการแปลงธรรมชาติ สำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น

Homotopy Perturbation and Natural Transform for Solving Nonlinear Partial Differential Equations

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ดวงกมล ผลเต็ม

โครงการวิจัยประเภทงบประมาณเงินรายได้
จากเงินอุดหนุนรัฐบาล (งบประมาณแผ่นดิน)
ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2560

รหัสโครงการ 555430
สัญญาเลขที่ 22/2560

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ
วิธีโฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชันและการแปลงธรรมชาติ สำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น

Homotopy Perturbation and Natural Transform for Solving Nonlinear Partial Differential Equations

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ดวงกมล ผลเต็ม

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยบูรพา

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากงบประมาณเงินรายได้จากเงินอุดหนุนรัฐบาล (งบประมาณแผ่นดิน) ประจำปีงบ-ประมาณ พ.ศ. 2560 มหาวิทยาลัยบูรพา ผ่านสำนักงานคณะกรรมการการวิจัยแห่งชาติ เลขที่สัญญา 22/2560

Acknowledgment

This work was financially supported by the Research Grant of Burapha University through National Research Council of Thailand (Grant no. 22/2560).

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้นำวิธีโฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชันร่วมกับการแปลงธรรมชาติ เพื่อพัฒนาเป็นวิธีใหม่ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย เช่นสมการเบอร์เกอร์ ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้ใช้พหุนามฮีช่วยในการเปลี่ยนพจน์ไม่เชิงเส้นให้เป็นฟังก์ชันพหุนาม ซึ่งทำให้การหาผลเฉลยทำได้ง่ายขึ้นเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีแยกอโดเมียน ซึ่งจากตัวอย่างที่ได้แสดงในงานวิจัยนี้ได้ผลเฉลยแบบแม่นตรง

Abstract

In this research, we combined natural transform method with the homotopy perturbation method to solve some systems of partial differential equations, viz. the systems of coupled Burgers' equations in one- and two-dimensions. The nonlinear term can easily be handled using the help of He's polynomial. This technique is applied in two examples. The both problems are resulted in exact solutions. The nonlinear problem can be easily solved without using Adomian's polynomials which is the advantage of this method over the decomposition method.

สารบัญ

1 บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations) เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์รูปแบบหนึ่งที่นำไปใช้อย่างแพร่หลายในการอธิบายปรากฏการณ์ทางวิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์ ไม่ว่าจะเป็นปัญหาการเคลื่อนที่ของโปรเจคไทล์ ปัญหาเกี่ยวกับการสลายตัวของสารเคมี และปัญหาเกี่ยวกับปฏิกิริยาเคมี เป็นต้น แต่อย่างไรก็ตามแบบจำลองในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่สร้างขึ้นนั้นจะมีความซับซ้อนแตกต่างกันตามปัญหาที่นำไปอธิบาย ทำให้การหาผลเฉลยมีความยุ่งยากและซับซ้อนตามไปด้วย นักวิจัยมุ่งหวังที่จะหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบของผลเฉลยวิเคราะห์ (analytical solution) เพื่อนำไปอธิบายปรากฏการณ์ตามแบบจำลองที่ได้สร้างขึ้น ซึ่งในบางสมการ โดยเฉพาะอย่างยิ่งสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น (non-linear equation) การหาผลเฉลยวิเคราะห์ทำได้ยากและมีขั้นตอนในการคำนวณค่อนข้างซับซ้อน ด้วยเหตุนี้ จึงมีงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพัฒนาวิธีการหาผลเฉลยวิเคราะห์สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์นี้ออกมาอย่างมากมาย เช่น วิธีแยกอโดเมียน (Adomian decomposition method) การแปลงเชิงอนุพันธ์(differential transform method) วิธีโฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชัน (homotopy perturbation method) อีกทั้งยังใช้การแปลงเชิงปริพันธ์เช่น การแปลงลาปลาซ (Laplace transform method) การแปลงเอลซากิ (Elzaki transform method) (M.Elzaki และคณะ, 2012) การแปลงซูมูดู (Sumudu transform method) (Belgacem & Karaballi, 2005) และการแปลงธรรมชาติ (natural transform method) อีกทั้งยังมีนักวิจัยที่นำวิธีที่ได้กล่าวมาใช้ร่วมกันในการหาผลเฉลยของ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น Khan. และ Wu. (2011) ได้นำวิธีโฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชันร่วมกับการแปลงลาปลาซ เพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น

สำหรับวิธีการแปลงธรรมชาติ เป็นการแปลงในรูปแบบอินทิกรัลรูปแบบหนึ่ง ที่เปลี่ยนรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equations) ที่ยากไปเป็นสมการพีชคณิต (algebraic equation) หรือแปลงจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไปเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ที่สามารถหาผลเฉลยได้ง่ายกว่า การแปลงธรรมชาติมีประโยชน์อย่างมากทั้งในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น และประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ (Lamb, 1995 และ Myint, 1980) ซึ่งวิธีการแปลงธรรมชาตินี้ ผู้วิจัยจะนำมาใช้ในร่วมกับวิธีโฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชัน เพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย โดยมุ่งหวังที่จะลดขั้นตอนและความซับซ้อนของวิธีโฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชันให้นำไปสู่การหาผลเฉลยที่ง่ายขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

1. ศึกษาวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบไม่เชิงเส้น
2. เพื่อสร้างองค์ความรู้ใหม่ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์
3. เพื่อลดขั้นตอนและความซับซ้อนในการหาผลเฉลยให้นำไปสู่การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นได้ง่ายขึ้น
4. ตีพิมพ์เผยแพร่ผลงานวิจัยในวารสารทางวิชาการระดับนานาชาติ ที่มีผู้ประเมินอิสระและเป็นที่ยอมรับในวงวิชาการ

1.3 ขอบเขตของโครงการวิจัย

ในงานวิจัยนี้นำเสนอวิธีโฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชันร่วมกับการแปลงธรรมชาติ เพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้นที่มีอันดับจำกัด

1.4 วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยกำหนดวิธีการดำเนินการ ดังนี้

1. ค้นคว้าและรวบรวมเอกสารที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น วิธีโฮโมโทปีเพอร์ทอร์เบชันและการแปลงธรรมชาติ

2. รวบรวมความรู้พื้นฐานและข้อมูลที่ได้จากการค้นคว้า เพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย โดยมีแนวคิดดังนี้ พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้นอันดับหนึ่ง

$$Dv(x,t) + Nv(x,t) = g(x,t) \tag{1}$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นคือ

$$v(x,0) = h(x) \tag{2}$$

เมื่อ D แทนตัวดำเนินการ กำหนดโดย $D = \dfrac{\partial}{\partial t}$

N แทนตัวดำเนินการแบบไม่เชิงเส้น

$g(x,t)$ แทนพจน์แหล่งต้นทาง (source term)

ทำการแปลงธรรมชาติทั้งสองข้างของสมการ (1)

และจากตารางที่ 1 จะได้

ตารางที่ 1: ตัวอย่างผลการแปลงธรรมชาติ

$f(t)$	$\mathbb{N}[f(t)]$
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{u}{s^2}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-au}$
$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}, n = 1, 2, \cdots$	$\dfrac{u^{n-1}}{s^n}$
$\sin(t)$	$\dfrac{u}{s^2+u^2}$
$y(t)$	$Y(s,u)$
$y(at)$	$\dfrac{1}{a}Y(s,u)$
$y'(t)$	$\dfrac{s}{u}Y(s,u) - \dfrac{y(0)}{u}$
$y''(t)$	$\dfrac{s^2}{u^2}Y(s,u) - \dfrac{s}{u^2}y(0) - \dfrac{y'(0)}{u}$

$$\mathbb{N}[Dv(x,t)] + \mathbb{N}[Nv(x,t)] = \mathbb{N}[g(x,t)]$$

$$\left[\frac{s}{u}V(x,s,u) - \frac{v(x,0)}{u}\right] + \mathbb{N}[Nv(x,t)] = \mathbb{N}[g(x,t)] \tag{3}$$

แทนเงื่อนไขค่าเริ่มต้นสมการ (2) ลงในสมการ (3) จะได้

$$\frac{s}{u}V(x,s,u) - \frac{h(x)}{u} + \mathbb{N}[Nv(x,t)] = \mathbb{N}[g(x,t)]$$

จัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$V(x,s,u) = \frac{h(x)}{s} - \frac{u}{s}\mathbb{N}[Nv(x,t)] + \frac{u}{s}\mathbb{N}[g(x,t)] \tag{4}$$

ทำการแปลงธรรมชาติผกผันทั้งสองข้างของสมการ (4) จะได้

$$v(x,t) = G(x,t) - \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}[Nv(x,t)]\right] \tag{5}$$

โดยที่

$$G(x,t) = \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{h(x)}{s}\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}[g(x,t)]\right]$$

กำหนดให้ผลเฉลยของสมการ (1) อยู่ในรูปของ

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n(x,t) \tag{6}$$

และพจน์ไม่เชิงเส้นอยู่ในรูปของ

$$Nv(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(v) \tag{7}$$

โดยที่ H_n แทน พหุนามฮี (He's polynomial) กำหนดโดย

$$H_n(v_0,\dots,v_n) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n}\left[N\left(\sum_{i=0}^{\infty}(p^i v_i)\right)\right]_{p=0}, n = 0,1,2,\dots$$

โดยโฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชัน แทนค่าสมการ (6) และสมการ (7) ลงในสมการ (5) จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n(x,t) = G(x,t) - p\left\{\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s^2}\mathbb{N}\left[\sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(v)\right]\right]\right\}$$

เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีกำลังของ p เท่ากัน จะได้

$$\begin{aligned}
p^0 &: v_0(x,t) = G(x,t) \\
p^1 &: v_1(x,t) = -\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}[H_0(v)]\right] \\
p^2 &: v_2(x,t) = -\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}[H_1(v)]\right] \\
p^3 &: v_3(x,t) = -\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}[H_2(v)]\right] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

ผลเฉลยแบบประมาณค่าที่ดีที่สุดของสมการ (1) แทนด้วย

$$v = \lim_{p\to 1}\sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

3.2 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้นอันดับสอง

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้นอันดับสอง

$$Dv(x,t) + Rv(x,t) + Nv(x,t) = g(x,t) \tag{8}$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นคือ

$$v(x,0) = h(x), v_t(x,0) = f(x) \tag{9}$$

เมื่อ D แทนตัวดำเนินการ กำหนดโดย $D = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$

R แทนตัวดำเนินการเชิงเส้นของอนุพันธ์ที่มีอันดับน้อยกว่าเท่ากับ D

N แทนตัวดำเนินการแบบไม่เชิงเส้น

$g(x,t)$ แทนพจน์แหล่งต้นทาง (source term)

ทำการแปลงธรรมชาติทั้งสองข้างของสมการ (8)
และจากตารางที่ 1 จะได้

$$\mathbb{N}[Dv(x,t)] + \mathbb{N}[Rv(x,t)] + \mathbb{N}[Nv(x,t)] = \mathbb{N}[g(x,t)]$$

$$\left[\frac{s^2}{u^2}V(x,s,u) - \frac{s}{u^2}v(x,0) - \frac{1}{u}v_t(x,0)\right] + \mathbb{N}[Rv(x,t)] + \mathbb{N}[Nv(x,t)] = \mathbb{N}[g(x,t)] \tag{10}$$

แทนเงื่อนไขค่าเริ่มต้นสมการ (9) ลงในสมการ (10) จะได้

$$\left[\frac{s^2}{u^2}V(x,s,u) - \frac{s}{u^2}h(x) - \frac{f(x)}{u}\right] + \mathbb{N}[Rv(x,t)] + \mathbb{N}[Nv(x,t)] = \mathbb{N}[g(x,t)]$$

จัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$V(x,s,u) = \frac{h(x)}{s} + \frac{u}{s}f(x) - \frac{u^2}{s^2}\mathbb{N}[Rv(x,t)] - \frac{u^2}{s^2}\mathbb{N}[Nv(x,t)] + \frac{u^2}{s^2}\mathbb{N}[g(x,t)] \tag{11}$$

ทำการแปลงธรรมชาติผกผันทั้งสองข้างของสมการ (11) จะได้

$$v(x,t) = G(x,t) - \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u^2}{s^2}\mathbb{N}[Rv(x,t) + Nv(x,t)]\right] \tag{12}$$

โดยที่

$$G(x,t) = \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{h(x)}{s}\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}f(x)\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u^2}{s^2}\mathbb{N}[g(x,t)]\right]$$

กำหนดให้ผลเฉลยของสมการ (8) อยู่ในรูปของ

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n(x,t) \tag{13}$$

และพจน์ไม่เชิงเส้นอยู่ในรูปของ

$$Nv(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(v) \tag{14}$$

โดยที่ H_n แทน พหุนามฮี กำหนดโดย

$$H_n(v_0,\ldots,v_n) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n}\left[N\left(\sum_{i=0}^{\infty}(p^i v_i)\right)\right]_{p=0}, n = 0,1,2,\ldots$$

โดยโฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชัน แทนค่าสมการ (13) และสมการ (14) ลงในสมการ (12) จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n(x,t) = G(x,t) - p\left\{\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s^2}\mathbb{N}\left[R\sum_{n=0}^{\infty}p^n v_n(x,t) + \sum_{n=0}^{\infty}p^n H_n(v)\right]\right]\right\}$$

เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีกำลังของ p เท่ากัน จะได้

$$
\begin{aligned}
p^0 &: v_0(x,t) = G(x,t) \\
p^1 &: v_1(x,t) = -\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u^2}{s^2}\mathbb{N}[Rv_0 + H_0(v)]\right] \\
p^2 &: v_2(x,t) = -\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u^2}{s^2}\mathbb{N}[Rv_1 + H_1(v)]\right] \\
p^3 &: v_3(x,t) = -\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u^2}{s^2}\mathbb{N}[Rv_2 + H_2(v)]\right] \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

ผลเฉลยแบบประมาณค่าที่ดีที่สุดของสมการ (8) แทนด้วย

$$v = \lim_{p\to 1}\sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

3. นำองค์ความรู้ที่ได้เปรียบเทียบประสิทธิภาพในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์กับวิธีที่ใช้ในปัจจุบัน เช่น วิธีการแยกอโดเมียน เป็นต้น
4. รวบรวมผลของการวิจัยในโครงการที่ได้เพื่อเขียนและสรุปผลงานวิจัย รวมทั้งเตรียมเอกสารสำหรับส่งตีพิมพ์และเขียนรายงานการวิจัย
5. ส่งรายงานเพื่อตีพิมพ์ลงในวารสารทางวิชาการระดับนานาชาติและส่งรายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ด้านวิชาการ
   ได้องค์ความรู้ใหม่ที่เป็นทางเลือกของนักวิจัยในการเลือกใช้วิธีการผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย อีกทั้งเป็นแนวทางในการพัฒนาวิธีการผาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบอื่น ๆ ให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น
2. เป็นองค์ความรู้ในการวิจัยต่อไป
   ผลที่ได้จากงานวิจัยนี้ สามารถนำไปใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญในศาสตร์ที่เกี่ยวข้องต่อไป
3. การเผยแพร่ผลงาน
   ผู้วิจัยจะนำเสนอผลงานในที่ประชุมวิชาการและส่งผลงานตีพิมพ์ในรูปแบบวารสารระดับนานาชาติ

2 วิธีดำเนินการวิจัย

1. ค้นคว้าและรวบรวมเอกสารที่เกี่ยวข้อง กับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น วิธีโฮโมโทปีเพอร์ทอร์เบชันและการแปลงธรรมชาติ
2. รวบรวมความรู้พื้นฐาน และข้อมูลที่ได้จากการค้นคว้า เพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย
3. สร้างองค์ความรู้ในการหาผลเฉลย ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น โดยวิธีโฮโมโทปีเพอร์- เทอร์เบชันร่วมกับการแปลงธรรมชาติ
4. นำองค์ความรู้ที่ได้ เปรียบเทียบประสิทธิภาพในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์กับวิธีที่ใช้ในปัจจุบัน เช่น วิธีการแยกอโดเมียน เป็นต้น
5. รวบรวมผลของการวิจัยในโครงการที่ได้เพื่อเขียนและสรุปผลงานวิจัย รวมทั้งเตรียมเอกสารสำหรับส่งตีพิมพ์และเขียนรายงานการวิจัย
6. ส่งรายงานเพื่อตีพิมพ์ในวารสารทางวิชาการระดับนานาชาติ และส่งรายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

3 ผลการวิจัย

จากวิธีการวิจัยที่ได้พัฒนาขึ้นนั้น สามารถนำไปใช้ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นในรูปแบบสมการเอกพันธ์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 แสดงการหาผลเฉลยของ

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial (vw)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2w\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial (vw)}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นคือ

$$\begin{aligned} v(x,0) &= \sin x \\ w(x,0) &= \sin x \end{aligned} \tag{16}$$

วิธีทำ

จากสมการ (15) ทำการแปลงธรรมชาติ จะได้

$$\mathbb{N}\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right] - \mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] - \mathbb{N}\left[2v\frac{\partial v}{\partial x}\right] + \mathbb{N}\left[\frac{\partial (vw)}{\partial x}\right] = 0$$

$$\mathbb{N}\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right] - \mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] - \mathbb{N}\left[2w\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \mathbb{N}\left[\frac{\partial (vw)}{\partial x}\right] = 0$$

จากคุณสมบัติของการแปลงธรรมชาติจะได้

$$\begin{aligned} \frac{s}{u}V(x,s,u) - \frac{v(x,0)}{u} - \mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] - \mathbb{N}\left[2v\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial (vw)}{\partial x}\right] &= 0 \\ \frac{s}{u}W(x,s,u) - \frac{w(x,0)}{u} - \mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] - \mathbb{N}\left[2w\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial (vw)}{\partial x}\right] &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

แทนเงื่อนไขค่าเริ่มต้นสมการ (16) ลงในสมการ (17)

$$\frac{s}{u}V(x,s,u) - \frac{\sin x}{u} - \mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] - \mathbb{N}\left[2v\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial (vw)}{\partial x}\right] = 0$$

$$\frac{s}{u}W(x,s,u) - \frac{\sin x}{u} - \mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] - \mathbb{N}\left[2w\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial (vw)}{\partial x}\right] = 0$$

จัดรูปสมการ จะได้

$$\begin{aligned} V(x,s,u) &= \frac{\sin x}{s} + \frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] + \frac{u}{s}\mathbb{N}\left[2v\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial (vw)}{\partial x}\right] \\ W(x,s,u) &= \frac{\sin x}{s} + \frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] + \frac{u}{s}\mathbb{N}\left[2w\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial (vw)}{\partial x}\right] \end{aligned} \tag{18}$$

ทำการแปลงธรรมชาติผกผันของสมการ (18) จะได้

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \sin x + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[2v\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial (vw)}{\partial x}\right]\right] \\ w(x,t) &= \sin x + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[2w\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial (vw)}{\partial x}\right]\right] \end{aligned}$$

แทน

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n(x,t) \\ w(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} p^n w_n(x,t) \end{aligned} \tag{19}$$

พจน์ที่ไม่เชิงเส้น

$$\begin{aligned} F_1(v,w) &= \sum_{n=0}^{\infty} p^n A_n(v,w) \\ F_2(v,w) &= \sum_{n=0}^{\infty} p^n B_n(v,w) \end{aligned} \tag{20}$$

โดยที่ $A_n(v,w)$ และ $B_n(v,w)$ แทนพหุนามอีี กำหนดโดย

$$\begin{aligned} A_n(v_0,v_1,...,v_n,w_0,w_1,...w_n) &= \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n}\left[F_1(v,w)\right]_{p=0}, n = 0,1,2,... \\ B_n(v_0,v_1,...,v_n,w_0,w_1,...w_n) &= \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n}\left[F_2(v,w)\right]_{p=0}, n = 0,1,2,... \end{aligned}$$

โดยวิธีโฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชัน จะได้

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n(x,t) &= \sin x + p\left[\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n\right]\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\sum_{n=0}^{\infty} p^n A_n\right]\right]\right] \\ \sum_{n=0}^{\infty} p^n w_n(x,t) &= \sin x + p\left[\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{n=0}^{\infty} p^n w_n\right]\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\sum_{n=0}^{\infty} p^n B_n\right]\right]\right] \end{aligned} \tag{21}$$

เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีกำลังของ p เท่ากัน จะได้

$$
\begin{aligned}
p^0: v_0(x,t) &= \sin x \\
: w_0(x,t) &= \sin x
\end{aligned}
$$

$$p^1: v_1(x,t) = \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}\right]\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[A_0\right]\right]$$

หา A_0

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{0!}\left[2\sum_{k=0}^{\infty}p^k v_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=0}^{\infty}p^k v_k\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{k=0}^{\infty}p^k v_k \sum_{k=0}^{\infty}p^k w_k\right)\right]_{p=0} \\
&= \Bigg[\bigg[2\left(p^0 v_0 + p^1 v_1 + p^2 v_2 + \cdots\right)\left(p^0 v_{0x} + p^1 v_{1x} + p^2 v_{2x} + \cdots\right)\bigg] \\
&\quad - \left[\frac{\partial}{\partial x}\bigg[\left(p^0 v_0 + p^1 v_1 + p^2 v_2 + \cdots\right)\left(p^0 w_0 + p^1 w_1 + p^2 w_2 + \cdots\right)\bigg]\right]\Bigg]_{p=0} \\
&= \Bigg[2\left(v_0 v_{0x} + p^1 v_0 v_{1x} + p^2 v_0 v_{2x} + p^1 v_1 v_{0x} + p^2 v_1 v_{1x} + p^3 v_1 v_{2x} + \cdots\right) \\
&\quad - \left(p^0\left(v_0 w_0\right)_x + p^1\left(v_0 w_1\right)_x + p^2\left(v_0 w_2\right)_x + p^1\left(v_1 w_0\right)_x + p^2\left(v_1 w_1\right)_x + \cdots\right)\Bigg]_{p=0} \\
&= 2v_0 v_{0x} - \left(v_0 w_0\right)_x
\end{aligned}
$$

จะได้

$$
\begin{aligned}
v_1(x,t) &= \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}\right]\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[2v_0 v_{0x} - \left(v_0 w_0\right)_x\right]\right] \\
&= \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin x\right]\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[2\sin x\frac{\partial}{\partial x}\sin x - \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin x\cdot\sin x\right)\right]\right] \\
&= \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[-\sin x\right]\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[2\sin x\cos x - \frac{\partial}{\partial x}\sin^2 x\right]\right] \\
&= \left(-\sin x\right)\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[1\right]\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[2\sin x\cos x - 2\sin x\cos x\right]\right] \\
&= \left(-\sin x\right)\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\cdot\frac{1}{s}\right] + 0 \\
&= \left(-\sin x\right)\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s^2}\right] \\
&= -t\sin x
\end{aligned}
$$

$$p^1: w_1(x,t) = \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right]\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[B_0\right]\right]$$

หา B_0

$$
\begin{aligned}
B_0 &= \frac{1}{0!}\left[2\sum_{k=0}^{\infty}p^k w_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=0}^{\infty}p^k w_k\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{k=0}^{\infty}p^k v_k\sum_{k=0}^{\infty}p^k w_k\right)\right]_{p=0}\\
&= \Bigg[\Bigg[2\left(p^0w_0+p^1w_1+p^2w_2+\cdots\right)\left(p^0w_{0x}+p^1w_{1x}+p^2w_{2x}+\cdots\right)\Bigg]\\
&\quad -\left[\frac{\partial}{\partial x}\Bigg[\left(p^0v_0+p^1v_1+p^2v_2+\cdots\right)\left(p^0w_0+p^1w_1+p^2w_2+\cdots\right)\Bigg]\right]\Bigg]_{p=0}\\
&= \Bigg[2\left(w_0w_{0x}+p^1w_0w_{1x}+p^2w_0w_{2x}+p^1w_1w_{0x}+p^2w_1w_{1x}+p^3w_1w_{2x}+\cdots\right)\\
&\quad -\left(p^0\left(v_0w_0\right)_x+p^1\left(v_0w_1\right)_x+p^2\left(v_0w_2\right)_x+p^1\left(v_1w_0\right)_x+p^2\left(v_1w_1\right)_x+\cdots\right)\Bigg]_{p=0}\\
&= 2w_0w_{0x}-\left(v_0w_0\right)_x
\end{aligned}
$$

จะได้

$$
\begin{aligned}
w_1(x,t) &= \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right]\right]+\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[2w_0w_{0x}-\left(v_0w_0\right)_x\right]\right]\\
&= \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin x\right]\right]+\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[2\sin x\frac{\partial}{\partial x}\sin x-\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin x\cdot\sin x\right)\right]\right]\\
&= \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[-\sin x\right]\right]+\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[2\sin x\cos x-\frac{\partial}{\partial x}\sin^2 x\right]\right]\\
&= \left(-\sin x\right)\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[1\right]\right]+\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[2\sin x\cos x-2\sin x\cos x\right]\right]\\
&= \left(-\sin x\right)\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\cdot\frac{1}{s}\right]+0\\
&= \left(-\sin x\right)\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s^2}\right]\\
&= -t\sin x
\end{aligned}
$$

$$p^2: v_2(x,t)=\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right]\right]+\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[A_1\right]\right]$$

หา A_1

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial p}\left[2\sum_{k=0}^{\infty}p^k v_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=0}^{\infty}p^k v_k\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{k=0}^{\infty}p^k v_k\sum_{k=0}^{\infty}p^k w_k\right)\right]_{p=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial p}\Bigg[2\left(v_0v_{0x}+p^1v_0v_{1x}+p^2v_0v_{2x}+p^1v_1v_{0x}+p^2v_1v_{1x}+p^3v_1v_{2x}+\cdots\right) \\
&\quad -\left(p^0\left(v_0w_0\right)_x+p^1\left(v_0w_1\right)_x+p^2\left(v_0w_2\right)_x+p^1\left(v_1w_0\right)_x+p^2\left(v_1w_1\right)_x+\cdots\right)\Bigg]_{p=0}
\end{aligned}$$

]

$$\begin{aligned}
&= \Bigg[2\left(v_0v_{1x}+2pv_0v_{2x}+v_1v_{0x}+2pv_1v_{1x}+3p^2v_1v_{2x}+\cdots\right) \\
&\quad -\left(\left(v_0w_1\right)_x+2p\left(v_0w_2\right)_x+\left(v_1w_0\right)+2p\left(v_1w_1\right)_x+\cdots\right)\Bigg]_{p=0} \\
&= 2\left[v_0v_{1x}+v_1v_{0x}\right]-\left[\left(v_0w_1\right)_x+\left(v_1w_0\right)_x\right]
\end{aligned}$$

จะได้

$$\begin{aligned}
v_2(x,t) &= \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right]\right]+\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[2\left[v_0v_{1x}+v_1v_{0x}\right]-\left[\left(v_0w_1\right)_x+\left(v_1w_0\right)_x\right]\right]\right] \\
&= \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-t\sin x\right)\right]\right]+\mathbb{N}^{-1}\Bigg[\frac{u}{s}\mathbb{N}\Bigg[2\left[\sin x\frac{\partial}{\partial x}\left(-t\sin x\right)-t\sin x\frac{\partial}{\partial x}\sin x\right] \\
&\quad -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin x\right)\left(-t\sin x\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(-t\sin x\right)\left(\sin x\right)\right]\Bigg]\Bigg] \\
&= \left(\sin x\right)\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[t\right]\right]+\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\left[-4t\sin x\cos x\right]-\left[-2t\sin x\cos x-2t\sin x\cos x\right]\right]\right] \\
&= \left(\sin x\right)\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\cdot\frac{u}{s^2}\right]+\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[-4t\sin x\cos x+4t\sin x\cos x\right]\right] \\
&= \left(\sin x\right)\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u^2}{s^3}\right]+0 \\
&= \frac{t^2}{2!}\sin x
\end{aligned}$$

$$p^2: w_2(x,t)=\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right]\right]+\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[B_1\right]\right]$$

หา B_1

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial p}\left[2\sum_{k=0}^{\infty}p^k w_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=0}^{\infty}p^k w_k\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{k=0}^{\infty}p^k v_k\sum_{k=0}^{\infty}p^k w_k\right)\right]_{p=0}\\
&= \frac{\partial}{\partial p}\Bigg[2\left(w_0w_{0x}+p^1w_0w_{1x}+p^2w_0w_{2x}+p^1w_1w_{0x}+p^2w_1w_{1x}+p^3w_1w_{2x}+\cdots\right)\\
&\quad -\left(p^0\left(v_0w_0\right)_x+p^1\left(v_0w_1\right)_x+p^2\left(v_0w_2\right)_x+p^1\left(v_1w_0\right)_x+p^2\left(v_1w_1\right)_x+\cdots\right)\Bigg]_{p=0}\\
&= \Bigg[2\left(w_0w_{1x}+2pw_0w_{2x}+w_1w_{0x}+2pw_1w_{1x}+3p^2w_1w_{2x}+\cdots\right)\\
&\quad -\left(\left(v_0w_1\right)_x+2p\left(v_0w_2\right)_x+\left(v_1w_0\right)+2p\left(v_1w_1\right)_x+\cdots\right)\Bigg]_{p=0}\\
&= 2\left[w_0w_{1x}+w_1w_{0x}\right]-\left[\left(v_0w_1\right)_x+\left(v_1w_0\right)_x\right]
\end{aligned}
$$

จะได้

$$
\begin{aligned}
w_2(x,t) &= \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right]\right]+\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[2\left[w_0w_{1x}+w_1w_{0x}\right]-\left[\left(v_0w_1\right)_x+\left(v_1w_0\right)_x\right]\right]\right]\\
&= \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[t\sin x\right]\right]+\mathbb{N}^{-1}\Bigg[\frac{u}{s}\mathbb{N}\Bigg[2\left[\sin x\left(-t\cos x\right)-t\sin x\cos x\right]\\
&\quad -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-t\sin^2 x\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(-t\sin^2 x\right)\right]\Bigg]\Bigg]\\
&= \left(\sin x\right)\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[t\right]\right]+\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\left[-4t\sin x\cos x\right]-\left[-2t\sin x\cos x-2t\sin x\cos x\right]\right]\right]\\
&= \left(\sin x\right)\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\cdot\frac{u}{s^2}\right]+\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[-4t\sin x\cos x+4t\sin x\cos x\right]\right]\\
&= \left(\sin x\right)\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u^2}{s^3}\right]+0\\
&= \frac{t^2}{2!}\sin x
\end{aligned}
$$

$$
p^3: v_3(x,t)=\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right]\right]+\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[A_2\right]\right]
$$

หา A_2

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\left[2\sum_{k=0}^{\infty}p^k v_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=0}^{\infty}p^k v_k\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{k=0}^{\infty}p^k v_k\sum_{k=0}^{\infty}p^k w_k\right)\right]_{p=0}\\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\Bigg[2\left(v_0v_{0x}+p^1v_0v_{1x}+p^2v_0v_{2x}+p^1v_1v_{0x}+p^2v_1v_{1x}+p^2v_2v_{0x}+\cdots\right)\\
&\quad -\Big(p^0\left(v_0w_0\right)_x+p^1\left(v_0w_1\right)_x+p^2\left(v_0w_2\right)_x+p^1\left(v_1w_0\right)_x+p^2\left(v_1w_1\right)_x+p^2\left(v_2w_0\right)_x+\cdots\Big)\Bigg]_{p=0}\\
&= \left[v_0v_{2x}+v_1v_{1x}+v_2v_{0x}\right]-\frac{1}{2}\Big[\left(v_0w_2\right)_x+\left(v_1w_1\right)_x+\left(v_2w_0\right)_x\Big]
\end{aligned}
$$

จะได้

$$
\begin{aligned}
v_3(x,t) &= \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right]\right]+\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\Bigg[\Bigg[v_0v_{2x}+v_1v_{1x}+v_2v_{0x}\Bigg]-\frac{1}{2}\Bigg[(v_0w_2)_x\right.\\
&\left.+(v_1w_1)_x+(v_2w_0)_x\Bigg]\Bigg]\right]\\
&= \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{t^2\sin x}{2!}\right)\right]\right]+\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\Bigg[\Bigg[\sin x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t^2\sin x}{2!}\right)\right.\\
&-t\sin x\frac{\partial}{\partial x}(-t\sin x)+\frac{t^2\sin x}{2!}\frac{\partial}{\partial x}(\sin x)\Bigg]-\frac{1}{2}\Bigg[\frac{\partial}{\partial x}(\sin x)\left(\frac{t^2\sin x}{2!}\right)\\
&\left.+\frac{\partial}{\partial x}(-t\sin x)(-t\sin x)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t^2\sin x}{2!}\right)(\sin x)\Bigg]\Bigg]\right]\\
&= (-\sin x)\,\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{t^2}{2}\right]\right]+\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\Bigg[2t^2\sin x\cos x-\frac{1}{2}\Bigg[\frac{t^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin^2 x\right)\right.\\
&\left.+t^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin^2 x\right)+\frac{t^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin^2 x\right)\Bigg]\Bigg]\right]\\
&= (-\sin x)\,\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\cdot\frac{u^2}{s}\right]+\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\Big[2t^2\sin x\cos x-\frac{1}{2}\Big[t^2\sin x\cos x\right.\\
&\left.+2t^2\sin x\cos x+t^2\sin x\cos x\Big]\Big]\right]\\
&= (-\sin x)\,\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u^3}{s^2}\right]+\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[2t^2\sin x\cos x-2t^2\sin x\cos x\right]\right]\\
&= -\frac{t^3}{3!}\sin x
\end{aligned}
$$

$$p^3: w_3(x,t)=\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right]\right]+\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[B_2\right]\right]$$

หา B_2

$$
\begin{aligned}
B_2 &= \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\left[2\sum_{k=0}^{\infty}p^k w_k\frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{k=0}^{\infty}p^k w_k\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{k=0}^{\infty}p^k v_k\sum_{k=0}^{\infty}p^k w_k\right]\right]_{p=0} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\Bigg[2\left(w_0w_{0x}+p^1w_0w_{1x}+p^2w_0w_{2x}+p^1w_1w_{0x}+p^2w_1w_{1x}+p^2w_2w_{0x}+\cdots\right) \\
&\quad -\Big(p^0\left(v_0w_0\right)_x+p^1\left(v_0w_1\right)_x+p^2\left(v_0w_2\right)_x+p^1\left(v_1w_0\right)_x+p^2\left(v_1w_1\right)_x+p^2\left(v_2w_0\right)_x+\cdots\Big)\Bigg]_{p=0} \\
&= \left[w_0w_{2x}+w_1w_{1x}+w_2w_{0x}\right]-\frac{1}{2}\left[\left(v_0w_2\right)_x+\left(v_1w_1\right)_x+\left(v_2w_0\right)_x\right]
\end{aligned}
$$

จะได้

$$
\begin{aligned}
w_3(x,t) &= \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right]\right]+\mathbb{N}^{-1}\Bigg[\frac{u}{s}\mathbb{N}\Bigg[\Big[w_0w_{2x}+w_1w_{1x}+w_2w_{0x}\Big]-\frac{1}{2}\Big[\left(v_0w_2\right)_x \\
&\quad +\left(v_1w_1\right)_x+\left(v_2w_0\right)_x\Big]\Bigg]\Bigg] \\
&= \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{t^2\sin x}{2!}\right)\right]\right]+\mathbb{N}^{-1}\Bigg[\frac{u}{s}\mathbb{N}\Bigg[\Bigg[\sin x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t^2\sin x}{2!}\right) \\
&\quad -t\sin x\frac{\partial}{\partial x}\left(-t\sin x\right)+\frac{t^2\sin x}{2!}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin x\right)\Bigg]-\frac{1}{2}\Bigg[\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin x\right)\left(\frac{t^2\sin x}{2!}\right) \\
&\quad +\frac{\partial}{\partial x}\left(-t\sin x\right)\left(-t\sin x\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t^2\sin x}{2!}\right)\left(\sin x\right)\Bigg]\Bigg]\Bigg] \\
&= \left(-\sin x\right)\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{t^2}{2}\right]\right]+\mathbb{N}^{-1}\Bigg[\frac{u}{s}\mathbb{N}\Bigg[2t^2\sin x\cos x-\frac{1}{2}\Bigg[\frac{t^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin^2 x\right) \\
&\quad +t^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin^2 x\right)+\frac{t^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin^2 x\right)\Bigg]\Bigg]\Bigg] \\
w_3(x,t) &= \left(-\sin x\right)\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\cdot\frac{u^2}{s}\right]+\mathbb{N}^{-1}\Bigg[\frac{u}{s}\mathbb{N}\Bigg[2t^2\sin x\cos x-\frac{1}{2}\Bigg[t^2\sin x\cos x \\
&\quad +2t^2\sin x\cos x+t^2\sin x\cos x\Bigg]\Bigg]\Bigg] \\
&= \left(-\sin x\right)\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u^3}{s^2}\right]+\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[2t^2\sin x\cos x-2t^2\sin x\cos x\right]\right] \\
&= -\frac{t^3}{3!}\sin x
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ผลเฉลยแบบประมาณค่าของสมการนี้คือ

$$
\begin{aligned}
v(x,t) &= v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \\
&= \sin x - t\sin x + \frac{t^2}{2!}\sin x - \frac{t^3}{3!}\sin x + \cdots \\
&= \sin x \ \left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \cdots\right)
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
w(x,t) &= w_0 + w_1 + w_2 + \cdots \\
&= \sin x - t\sin x + \frac{t^2}{2!}\sin x - \frac{t^3}{3!}\sin x + \cdots \\
&= \sin x \ \left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \cdots\right)
\end{aligned}
$$

จาก $e^t \ = \ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$ จะได้ $e^{-t} \ = \ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n!} \ = \ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,t^n}{n!}$

ดังนั้น จะได้ผลเฉลยที่ดีที่สุดของสมการ (15) คือ

$$
v(x,t) = e^{-t}\sin x
$$

$$
w(x,t) = e^{-t}\sin x
$$

□

ตัวอย่างที่ 2 แสดงการหาผลเฉลยของ

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} = z \\
&\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} = v \\
&\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = w
\end{aligned} \tag{22}
$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นคือ

$$
\begin{aligned}
z(x,y,0) &= e^{x-y} \\
v(x,y,0) &= e^{x-y} \\
w(x,y,0) &= e^{y-x}
\end{aligned} \tag{23}
$$

วิธีทำ
ทำการแปลงธรรมชาติ จะได้

$$\mathbb{N}\left[\frac{\partial z}{\partial t}\right]+\mathbb{N}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right]-\mathbb{N}\left[\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\right]-\mathbb{N}\left[z\right]=0$$

$$\mathbb{N}\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]+\mathbb{N}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right]-\mathbb{N}\left[\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right]-\mathbb{N}\left[v\right]=0$$

$$\mathbb{N}\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right]+\mathbb{N}\left[\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right]-\mathbb{N}\left[\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right]-\mathbb{N}\left[w\right]=0$$

จากคุณสมบัติของการแปลงธรรมชาติ จะได้

$$\begin{aligned}
&\frac{s}{u}Z(x,y,s,u)-\frac{z(x,y,0)}{u}+\mathbb{N}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]-\mathbb{N}\left[z\right]=0\\
&\frac{s}{u}V(x,y,s,u)-\frac{v(x,y,0)}{u}+\mathbb{N}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]-\mathbb{N}\left[v\right]=0\\
&\frac{s}{u}W(x,y,s,u)-\frac{w(x,y,0)}{u}+\mathbb{N}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]-\mathbb{N}\left[w\right]=0
\end{aligned} \tag{24}$$

แทนเงื่อนไขเริ่มต้นสมการ (23) ลงในสมการ (24)

$$\frac{s}{u}Z(x,y,s,u)-\frac{e^{x-y}}{u}+\mathbb{N}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]-\mathbb{N}\left[z\right]=0$$

$$\frac{s}{u}V(x,y,s,u)-\frac{e^{x-y}}{u}+\mathbb{N}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]-\mathbb{N}\left[v\right]=0$$

$$\frac{s}{u}W(x,y,s,u)-\frac{e^{y-x}}{u}+\mathbb{N}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]-\mathbb{N}\left[w\right]=0$$

จัดรูปสมการ จะได้

$$\begin{aligned}
Z(x,y,s,u)&=\frac{1}{s}e^{x-y}-\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]+\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[z\right]\\
V(x,y,s,u)&=\frac{1}{s}e^{x-y}-\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]+\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[v\right]\\
W(x,y,s,u)&=\frac{1}{s}e^{y-x}-\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[w\right]
\end{aligned} \tag{25}$$

ทำการแปลงธรรมชาติผกผันสมการ (25) จะได้

$$z(x,y,t) = e^{x-y} - \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}N\left[z\right]\right]$$

$$v(x,y,t) = e^{x-y} - \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}N\left[v\right]\right]$$

$$w(x,y,t) = e^{y-x} - \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}N\left[w\right]\right]$$

แทน

$$\begin{aligned} z(x,y,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} p^n z_n(x,y,t) \\ v(x,y,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n(x,y,t) \\ w(x,y,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} p^n w_n(x,y,t) \end{aligned} \tag{26}$$

และพจน์ที่ไม่เชิงเส้น

$$\begin{aligned} F_1(z,v,w) &= \sum_{n=0}^{\infty} p^n A_n(z,v,w) \\ F_2(z,v,w) &= \sum_{n=0}^{\infty} p^n B_n(z,v,w) \\ F_3(z,v,w) &= \sum_{n=0}^{\infty} p^n C_n(z,v,w) \end{aligned} \tag{27}$$

โดยที่ $A_n(z,v,w)$, $B_n(z,v,w)$ และ $C_n(z,v,w)$ แทนพหุนามฮี กำหนดโดย

$$A_n(z_0,z_1,...,z_n,v_0,v_1,...,v_n,w_0,w_1,...w_n) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n}\left[F_1(v,w)\right]_{p=0} \quad ,n = 0,1,2,\cdots$$

$$B_n(z_0,z_1,...,z_n,v_0,v_1,...,v_n,w_0,w_1,...w_n) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n}\left[F_2(v,w)\right]_{p=0} \quad ,n = 0,1,2,\cdots$$

$$C_n(z_0,v_1,...,z_n,v_0,z_1,...,v_n,w_0,w_1,...w_n) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n}\left[F_3(v,w)\right]_{p=0} \quad ,n = 0,1,2,\cdots$$

โดยวิธีโฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชัน จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n z_n = e^{x-y} + p\left[-\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\sum_{n=0}^{\infty} p^n A_n\right]\right]\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\sum_{n=0}^{\infty} p^n z_n\right]\right]\right]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n = e^{x-y} + p\left[-\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\sum_{n=0}^{\infty} p^n B_n\right]\right]\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n\right]\right]\right]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n w_n = e^{y-x} + p\left[-\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\sum_{n=0}^{\infty} p^n C_n\right]\right]\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\sum_{n=0}^{\infty} p^n w_n\right]\right]\right]$$

เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีกำลังของ p เท่ากัน จะได้

$$\begin{aligned} p^0 :\ z_0(x,y,t) &= e^{x-y} \\ :\ v_0(x,y,t) &= e^{x-y} \\ :\ w_0(x,y,t) &= e^{y-x} \end{aligned}$$

จากกระบวนการเดียวกันกับการหาพหุนามฮี ดังตัวอย่าง 4.1 จะได้ว่า

$A_0 = v_{0x}w_{0y} - v_{0y}w_{0x}$

$B_0 = w_{0x}z_{0y} - z_{0x}w_{0y}$

$C_0 = z_{0x}v_{0y} - z_{0y}v_{0x}$

$A_1 = (v_{0x}w_{1y} + v_{1x}w_{0y}) - (v_{0y}w_{1x} + v_{1y}w_{0x})$

$B_1 = (w_{0x}z_{1y} + w_{1x}z_{0y}) - (z_{0x}w_{1y} + z_{1x}w_{0y})$

$C_1 = (z_{0x}v_{1y} + z_{1x}v_{0y}) - (z_{0y}v_{1x} + z_{1y}v_{0x})$

$A_2 = (v_{0x}w_{2y} + v_{1x}w_{1y} + v_{2x}w_{0y}) - (v_{0y}w_{2x} + v_{1y}w_{1x} + v_{2y}w_{0x})$

$B_2 = (w_{0x}z_{2y} + w_{1x}z_{1y} + w_{2x}z_{0y}) - (z_{0x}w_{2y} + z_{1x}w_{1y} + z_{2x}w_{0y})$

$C_2 = (z_{0x}v_{2y} + z_{1x}v_{1y} + z_{2x}v_{0y}) - (z_{0y}v_{2x} + z_{1y}v_{1x} + z_{2y}v_{0x})$

$\vdots$

ดังนั้น

$$p^1: z_1(x,y,t) = e^{x-y}t \qquad p^2: z_2(x,y,t) = e^{x-y}\frac{t^2}{2!}$$

$$: v_1(x,y,t) = e^{x-y}t \qquad : v_2(x,y,t) = e^{x-y}\frac{t^2}{2!}$$

$$: w_1(x,y,t) = e^{y-x}t \qquad : w_2(x,y,t) = e^{y-x}\frac{t^2}{2!}$$

$$p^3: z_3(x,y,t) = e^{x-y}\frac{t^3}{3!}$$

$$: v_3(x,y,t) = e^{x-y}\frac{t^3}{3!}$$

$$: w_3(x,y,t) = e^{y-x}\frac{t^3}{3!}$$

$$\vdots$$

ผลเฉลยของสมการนี้คือ

$$\begin{aligned}
z(x,y,t) &= z_0 + z_1 + z_2 + \cdots \\
&= e^{x-y} + e^{x-y}t + e^{x-y}\frac{t^2}{2!} + e^{x-y}\frac{t^3}{3!} + \cdots \\
&= e^{x-y}(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots) \;=\; e^{x-y+t} \\
v(x,y,t) &= v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \\
&= e^{x-y} + e^{x-y}t + e^{x-y}\frac{t^2}{2!} + e^{x-y}\frac{t^3}{3!} + \cdots \\
&= e^{x-y}(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots) \;=\; e^{x-y+t} \\
w(x,y,t) &= w_0 + w_1 + w_2 + \cdots \\
&= e^{y-x} + e^{y-x}t + e^{y-x}\frac{t^2}{2!} + e^{y-x}\frac{t^3}{3!} + \cdots \\
&= e^{y-x}(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots) \;=\; e^{y-x+t}
\end{aligned}$$

□

4 สรุปและอภิปรายผลการวิจัย

งานวิจัยนี้ได้พัฒนาวิธีการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น โดยนำวิธีการแปลงธรรมชาติและวิธีโฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชันมาใช้ร่วมกัน เพื่อนำไปหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งผลเฉลยที่ได้จะเป็นผลเฉลยแบบประมาณค่า และยิ่งไปกว่านั้นจากตัวอย่างที่ได้แสดงในงานวิจัยนี้ พบว่าผลเฉลยที่ได้นั้นลู่เข้าสู่ ผลเฉลยแม่นตรง จากผลการคำนวณที่ได้จากตัวอย่างที่ 1 ซึ่งเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย 2 ตัวแปร จะมีขั้นตอนการหาผลเฉลยที่ซับซ้อนและยุ่งยากน้อยกว่าตัวอย่างที่ 2 ซึ่งเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย 3 ตัวแปร อย่างไรก็ตามเมื่อเปรียบเทียบขั้นตอน

วิธีที่ได้จากงานวิจัยนี้ กับงานวิจัยของ Ahmad และ Noor ในปี 2014 พบว่าขั้นตอนวิธีที่ได้พัฒนาขึ้นนี้มีความยุ่งยากในการคำนวณน้อยกว่า

5 ข้อเสนอแนะ

วิธีการที่ได้จากงานวิจัยนี้สามารถนำพัฒนาต่อยอดในการนำไปใช้ หาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์เชิงเศษส่วน ซึ่งเป็นสมการที่สำคัญอย่างยิ่งทั้งทางด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์

6 ผลผลิต (Output)

6.1 ผลงานตีพิมพ์

ผลงานวิจัยได้ถูกตีพิมพ์ในวรสารวิชาการระดับนานาชาติ ในฐานข้อมูล SCOPUS SJR Q_3 แล้ว ดังนี้

1. Poltem, D., & Sak-aree-amorn, S. (2017) Natural homotopy perturbation method for system of nonlinear partial differential equations, Far East Journal of mathematical Science, 102(3), 631-644.

6.2 การผลิตบัณฑิต

1. นางสาวสิรัญญา ถนอมพลกรัง
   นิสิตระดับปริญญาโท ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ซึ่งขณะนี้กำลังอยู่ระหว่างการทำวิทยา-นิพนธ์ และคาดว่าจะสำเร็จการศึกษาในปีการศึกษา ๒๕๖๑

7 บรรณานุกรม (Bibliography)

[1] Ahmad, J., Bibi, Z., & Noor, K. (2014) Laplace decomposition method using he's polynomial to bergers equation, Journal of science and arts, 2(27), 131-138.

[2] Belgacem & Karaballi. (2015). Sumudu transform fundamenfal properties investigations and applications, Journal of Applied Mathematics and stochastic Analysis, 1-23

[3] Elzaki, T. M., Elzaki, S. M. & Eman M. A. Hilal. (2012). Elzaki and Sumudu transform for solving some differential equations, Global Journal of pure and Applied Mathematics, 8(2), 167-173

[4] Khan, M., Hussain, M., Jafari, H., & Khan, Y. (2010) Application of laplace decomposition method to solve nonlinear coupled partial differential equations, World applied sciences journal 9 (special issue of applied math), 13-19.

[5] Khan, Y. & Wu, Q. (2011). Homotopy Perturbation transform method for nonlinear equations using He's Polynomial, Journal homepage:www.elsevier.com /locate/camma, 1963-1967

[6] Lamb, GL. (1995) Introductory Applications of Partial Differential Equations with Emphasis on Wave Propagation and Diffusion, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 1995.

[7] Myint, UT. (1980) Differential Equations of Mathematical Physics, American Elsevier, New York, NY, USA.

[8] Rawashdeh, M. S., & Maitama, S. (2014) Solving coupled system of nonlinear pde's using the natural decomposition method, International journal of pure and applied mathematics, 92(5), 757-776.

[9] Rawashdeh, M.S. & Maitama, S. (2015). Solving nonlinear ordinary differential equations using the NDM, Journal of Applied Analysis and Computation, 5(1), 77-88.

[10] Ziane, D., & Cherif, H. (2015) Resolution of nonlinear partial differential equations by elzaki transform decomposition method, Journal of approximation theory and applied mathematics, 5, 17-30.

8 ภาคผนวก (Appendix)

ผลงานวิจัยได้ถูกตีพิมพ์ในวรสารวิชาการระดับนานาชาติ ในฐานข้อมูล SCOPUS SJR Q_3 แล้ว ดังนี้

1. Poltem, D., & Sak-aree-amorn, S. (2017) Natural homotopy perturbation method for system of nonlinear partial differential equations, Far East Journal of mathematical Science, 102(3), 631-644.

Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)

http://www.pphmj.com
http://dx.doi.org/10.17654/MS102030631
Volume 102, Number 3, 2017, Pages 631-644 **ISSN: 0972-0871**

NATURAL HOMOTOPY PERTURBATION METHOD FOR SYSTEM OF NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

D. Poltem* and S. Sak-Aree-Amorn

Department of Mathematics
Faculty of Science
Burapha University
Thailand
e-mail: duangkamolp@buu.ac.th

Centre of Excellence in Mathematics
PERDO, CHE
Thailand

Abstract

In this article, we combined natural transform method with the homotopy perturbation method to solve some systems of partial differential equations, viz. the systems of coupled Burgers' equations in one- and two-dimensions. The nonlinear terms can be expressed in He's polynomial. The proposed method finds the solution without discretization and avoids round-off errors. The nonlinear problem can be easily solved without using Adomian's polynomials which is the advantage of this method over the decomposition method.

Received: March 27, 2017; Revised: May 19, 2017; Accepted: June 10, 2017
2010 Mathematics Subject Classification: 35A22, 49M27.
Keywords and phrases: homotopy perturbation method, coupled Burgers' equations, natural transform method, He's polynomial.
*Corresponding author

1. Introduction

Adomian decomposition method (ADM) [1, 2] is a powerful decomposition methodology for the practical solution of linear or nonlinear ordinary differential equations, partial differential equations, integral equations, etc. However, the main difficulty of the method is to calculate Adomian's polynomials, the procedure is very complex. He [3, 4] proposed homotopy perturbation method for solving differential equations, linear and nonlinear. The method has been shown to solve effectively and easily of nonlinear problems, generally a few iterations lead to high accurate solutions. In 2009, Ghorbani [5] showed that the homotopy perturbation method (HPM) and He's polynomials can completely replace the Adomian's method and Adomian's polynomials. There are many integral transform methods [6, 7-12], existing in the literature to solve ordinary differential equations such as the Laplace transformation [13], the Sumudu transform [14] and the Elzaki transform [7-12]. In [15], a combination of Laplace transform method and homotopy perturbation method (LT-HPM) was reported in order to solve approximately nonlinear ordinary and partial differential equations. This method is capable to find analytical approximate solutions without any simplifications like linearization, perturbation parameters, among others. The importance of research on LT-HPM is that many phenomena of nonlinear nature such as convection-diffusion equation [16], nonlinear shock wave equation [17] and Klein-Gordon equation are covered. Furthermore, fractional model has also been studied with the help of homotopy perturbation method [18]. Kumar et al. [19] investigated local fractional Zakharov-Kuznetsov equation by using a technique based on LT-HPM. Kumar et al. [20] also applied a numerical scheme, namely, homotopy analysis Sumudu transform algorithm to obtain the analytical and numerical solutions of a nonlinear differential difference problem in nanohemodynamics, heat conduction in nanoscale, and electronic current flow in carbon nanotube.

Following the previous review, this work proposes a new integral transform method called the *natural transform method* [21, 22], and applies it to find exact solutions to nonlinear partial differential equations. The aim of this paper is to develop a new technique to solve the system of partial differential equations by the natural homotopy perturbation method and He's polynomial. The natural homotopy perturbation method (N-HPM) provides solution as a rapidly convergent series.

2. Natural Transform

In this section, we present some basic idea about the natural transform method. The natural transform of the function $f(t)$ for $t \in (-\infty, \infty)$ is defined by [21, 22]:

$$\mathbb{N}[f(t)] = R(s, u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(ut) dt, \quad s, u \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$

where $\mathbb{N}[f(t)]$ is called the *natural transform* of time function. Variables s and u are the natural transform variables.

Equation (1) can be written as

$$\mathbb{N}[f(t)] = \mathbb{N}^{-}[f(t)] + \mathbb{N}^{+}[f(t)], \tag{2}$$

where

$$\mathbb{N}^{-}[f(t)] = R^{-}(s, u) = \int_{-\infty}^{0} e^{-st} f(ut) dt; \quad s, u \in (-\infty, 0) \tag{3}$$

and

$$\mathbb{N}^{+}[f(t)] = R^{+}(s, u) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(ut) dt, \quad s, u \in (0, \infty). \tag{4}$$

If the real functions $f(t) > 0$ and $f(t) = 0$ for $t < 0$ are piecewise continuous, exponential order, then we define the natural transform on the set

$$A = \{f(t) \mid \exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, |f(t)| < Me^{t/\tau_j}, \text{ if } t \in (-1)^j \times [0, \infty)\}$$

as

$$\mathbb{N}[f(t)H(t)] = \mathbb{N}^{+}[f(t)] = R^{+}(s, u) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(ut) dt, \quad s, u \in (0, \infty),$$

where $H(\cdot)$ is the Heaviside function. Now we give some important properties of the natural transform.

Table 1. Some important properties of natural transform

$f(t)$	$\mathbb{N}[f(t)]$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{u}{s^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s - au}$
$\sin(t)$	$\frac{u}{s^2 + u^2}$
$y(t)$	$Y(s, u)$
$y(at)$	$\frac{1}{a} Y(s, u)$
$y'(t)$	$\frac{s}{u} Y(s, u) - \frac{y(0)}{u}$
$y''(t)$	$\frac{s^2}{u^2} Y(s, u) - \frac{s}{u^2} y(0) - \frac{y'(0)}{u}$

3. Natural Homotopy Perturbation Transform Method

Consider the system of partial differential equations:

$$L_t v(x, t) + L_{xx} v(x, t) + F_1(v, w) = h_1(x, t),$$

$$L_t w(x, t) + L_{xx} w(x, t) + F_2(v, w) = h_2(x, t) \tag{5}$$

subject to the initial conditions

$$v(x, 0) = g_1(x),$$

$$w(x, 0) = g_2(x), \tag{6}$$

where L_t is the first order linear differential operator $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$, L_{xx} is the second order linear differential operator $L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $F_1(v, w)$ and $F_2(v, w)$ represent the general nonlinear differential operators and $h_1(x, t)$ and $h_2(x, t)$ are the source terms.

Using the differentiation property of the natural transform, we have

$$\frac{s}{u}V(x, s, u) - \frac{v(x, 0)}{u} + \mathbb{N}[L_{xx}v] + \mathbb{N}[F_1(v, w)] = \mathbb{N}[h_1(x, t)],$$

$$\frac{s}{u}W(x, s, u) - \frac{w(x, 0)}{u} + \mathbb{N}[L_{xx}w] + \mathbb{N}[F_2(v, w)] = \mathbb{N}[h_2(x, t)]. \tag{7}$$

Substituting (6) into (7), we have

$$\frac{s}{u}V(x, s, u) - \frac{g_1(x)}{u} + \mathbb{N}[L_{xx}v] + \mathbb{N}[F_1(v, w)] = \mathbb{N}[h_1(x, t)],$$

$$\frac{s}{u}W(x, s, u) - \frac{g_2(x)}{u} + \mathbb{N}[L_{xx}w] + \mathbb{N}[F_2(v, w)] = \mathbb{N}[h_2(x, t)].$$

We have

$$V(x, s, u) = \frac{g_1(x)}{s} + \frac{u}{s}\mathbb{N}[h_1(x, t)] - \frac{u}{s}\mathbb{N}[L_{xx}v] - \frac{u}{s}\mathbb{N}[F_1(v, w)],$$

$$W(x, s, u) = \frac{g_2(x)}{s} + \frac{u}{s}\mathbb{N}[h_2(x, t)] - \frac{u}{s}\mathbb{N}[L_{xx}w] - \frac{u}{s}\mathbb{N}[F_2(v, w)]. \tag{8}$$

Operating with the natural inverse on both the sides of (8) gives

$$v(x, t) = H_1(x, t) - \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}[L_{xx}v + F_1(v, w)]\right],$$

$$w(x, t) = H_2(x, t) - \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}[L_{xx}w + F_2(v, w)]\right], \tag{9}$$

where $H_1(x, t)$ and $H_2(x, t)$ represent the terms arising from the source term and the prescribed initial conditions. Now, we apply the homotopy perturbation method.

Let the solution of (5) be in the form

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n(x, t),$$

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n w_n(x, t), \tag{10}$$

and the nonlinear terms can be decomposed as

$$F_1(v, w) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n A_n(v, w),$$

$$F_2(v, w) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n B_n(v, w), \tag{11}$$

where $A_n(v, w)$ and $B_n(v, w)$ denote He's polynomials defined by

$$A_n(v_0, v_1, ..., v_n, w_0, w_1, ..., w_n) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n}[F_1(v, w)]_{p=0}, \; n = 0, 1, 2, ...,$$

$$B_n(v_0, v_1, ..., v_n, w_0, w_1, ..., w_n) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n}[F_2(v, w)]_{p=0}, \; n = 0, 1, 2, ...$$

We have

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n(x, t) = H_1(x, t) - p\left[\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[L_{xx}\sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n + \sum_{n=0}^{\infty} p^n A_n\right]\right]\right],$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n w_n(x, t) = H_2(x, t) - p\left[\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[L_{xx}\sum_{n=0}^{\infty} p^n w_n + \sum_{n=0}^{\infty} p^n B_n\right]\right]\right]. \tag{12}$$

Then, by comparing both the sides of (12), we have

$$p^0 : v_0(x, t) = H_1(x, t),$$

$$: w_0(x, t) = H_2(x, t),$$

$$p^1 : v_1(x, t) = -\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}[L_{xx}v_0 + A_0]\right],$$

$$: w_1(x, t) = -\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}[L_{xx}w_0 + B_0]\right],$$

$$p^2 : v_2(x, t) = -\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}[L_{xx}v_1 + A_1]\right],$$

$$: w_2(x, t) = -\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}[L_{xx}w_1 + B_1]\right],$$

$$\vdots$$

We obtain the recurrence relations:

$$v_{n+1}(x, t) = -\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}[L_{xx}v_n + A_n]\right], \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$w_{n+1}(x, t) = -\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}[L_{xx}w_n + B_n]\right], \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

The best approximation solution of (5) is

$$v(x, t) = \lim_{p\to 1}\sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots,$$

$$w(x, t) = \lim_{p\to 1}\sum_{n=0}^{\infty} p^n w_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots. \tag{14}$$

4. Example Illustrations

Example 1. Consider the system of nonlinear partial differential equations of the form

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial (vw)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2w\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial (vw)}{\partial x} = 0 \tag{15}$$

subject to the initial conditions

$$v(x, 0) = \sin x,$$

$$w(x, 0) = \sin x. \tag{16}$$

By taking the natural transform to both the sides of (15), we obtain

$$\frac{s}{u}V(x, s, u) - \frac{v(x, 0)}{u} - \mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] - \mathbb{N}\left[2v\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial(vw)}{\partial x}\right] = 0,$$

$$\frac{s}{u}W(x, s, u) - \frac{w(x, 0)}{u} - \mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] - \mathbb{N}\left[2w\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial(vw)}{\partial x}\right] = 0. \tag{17}$$

By substituting (16) into (17), we obtain

$$V(x, s, u) = \frac{\sin x}{s} + \frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] + \frac{u}{s}\mathbb{N}\left[2v\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial(vw)}{\partial x}\right],$$

$$W(x, s, u) = \frac{\sin x}{s} + \frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] + \frac{u}{s}\mathbb{N}\left[2w\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial(vw)}{\partial w}\right]. \tag{18}$$

Taking inverse natural transform of (18), we have

$$v(x, t) = \sin x + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[2v\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial(vw)}{\partial x}\right]\right],$$

$$w(x, t) = \sin x + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[2w\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial(vw)}{\partial x}\right]\right].$$

We now consider infinite series solutions of $v(x, t)$ and $w(x, t)$:

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n(x, t),$$

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n w_n(x, t). \tag{19}$$

For nonlinear terms, we let

$$2v\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial(vw)}{\partial x} = F_1(v, w) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n A_n(v, w),$$

$$2w\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial(vw)}{\partial x} = F_2(v, w) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n B_n(v, w), \tag{20}$$

where $A_n(v, w)$ and $B_n(v, w)$ are He's polynomials of nonlinear terms

$$A_n(v_0, v_1, ..., v_n, w_0, w_1, ..., w_n) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n}[F_1(v, w)]_{p=0}, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

$$B_n(v_0, v_1, ..., v_n, w_0, w_1, ..., w_n) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n}[F_2(v, w)]_{p=0}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

By homotopy perturbation method, we have

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n(x, t) = \sin x + p\left[\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n\right]\right]\right.$$
$$\left. + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\sum_{n=0}^{\infty} p^n A_n\right]\right]\right], \tag{21}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n w_n(x, t) = \sin x + p\left[\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{n=0}^{\infty} p^n w_n\right]\right]\right.$$
$$\left. + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\sum_{n=0}^{\infty} p^n B_n\right]\right]\right]. \tag{22}$$

Then, by comparing both the sides of (22), we have the general recursive relation as follows:

$$p^0 : v_0(x, t) = \sin x,$$

$$: w_0(x, t) = \sin x,$$

$$p^1 : v_1(x, t) = \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}\right]\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}[A_0]\right],$$

$$: w_1(x, t) = \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right]\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}[B_0]\right],$$

$$p^2 : v_2(x, t) = \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right]\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}[A_1]\right],$$

$$: w_2(x, t) = \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right]\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}[B_1]\right].$$

Therefore, the recursive relations are given by

$$v_{n+1}(x, t) = \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial x^2}\right]\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}[A_n]\right], \quad n \geq 0,$$

$$w_{n+1}(x, t) = \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 w_{n-1}}{\partial x^2}\right]\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}[B_n]\right], \quad n \geq 0.$$

In order to compute $v_{n+1}(x, t)$ and $w_{n+1}(x, t)$, we have to find $A_0, B_0, A_1, B_1, \ldots, A_n, B_n$ as follows:

$$\begin{aligned}
A_0 &= 2v_0 v_{0x} - (v_0 w_0)_x, \\
B_0 &= 2w_0 w_{0x} - (v_0 w_0)_x, \\
A_1 &= 2[v_0 v_{0x} + v_1 v_{0x}] - [(v_0 w_1)_x + (v_1 w_0)_x], \\
B_1 &= 2[w_0 w_{1x} + w_1 w_{0x}] - [(v_0 w_1)_x + (v_1 w_0)_x], \\
&\vdots
\end{aligned}$$

We have

$$v_1(x, t) = \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}\right]\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}[2v_0 v_{0x} - (v_0 w_0)_x]\right] = -t \sin x,$$

$$w_1(x, t) = \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right]\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}[2w_0 w_{0x} - (v_0 w_0)_x]\right] = -t\sin x,$$

$$v_2(x, t) = \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right]\right]$$

$$+ \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}[2[v_0 v_{1x} + v_1 v_{0x}] - [(v_0 w_1)_x + (v_1 w_0)_x]]\right] = \frac{t^2}{2!}\sin x,$$

$$w_2(x, t) = \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}\left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right]\right]$$

$$+ \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u}{s}\mathbb{N}[2[w_0 w_{1x} + w_1 w_{0x}] - [(v_0 w_1)_x + (v_1 w_0)_x]]\right] = \frac{t^2}{2!}\sin x.$$

In the same manner, we obtain

$$v_3(x, t) = -\frac{t^3}{3!}\sin x,$$

$$w_3(x, t) = -\frac{t^3}{3!}\sin x,$$

$$\vdots$$

Therefore, the best approximation solution is

$$v(x, t) = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots = \sin x\left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \cdots\right)$$

and

$$w(x, t) = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots = \sin x\left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \cdots\right).$$

Therefore, we obtain the exact solution of (15) as

$$v(x, t) = e^{-t}\sin x,$$

$$w(x, t) = e^{-t}\sin x.$$

5. Conclusion

In this paper, the natural homotopy perturbation method is simple for solving the system of partial differential equation. We successfully found exact solutions of examples considered. It has been observed that the suggested method is very efficient for solving nonlinear problem without using Adomian's polynomial. Our goal in the future is to apply this method to fractional differential equations.

Acknowledgements

The authors are grateful to the reviewers for valuable suggestions in improving the quality of the paper. This work was financially supported by the Research Grant of Burapha University through National Research Council of Thailand (Grant no. 22/2560).

References

[1] G. Adomian, A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equation, Comput. Math. Appl. 21(5) (1991), 101-127.

[2] G. Adomian, Solving Frontier Problems of Physics: the Decomposition Method, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[3] J. H. He, Homotopy perturbation technique, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 178(3-4) (1999), 257-262.

[4] J. H. He, A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems, Internat. J. Non-Linear Mech. 35(1) (2000), 37-43.

[5] A. Ghorbani, Beyond Adomian polynomials: He polynomials, Chaos Solitons Fractals 39(2) (2009), 1486-1492.

[6] Sh. Sadigh Behzadi and A. Yildirim, Numerical solution of LR fuzzy Hunter-Saxeton equation by using homotopy analysis method, J. Appl. Anal. Comput. 2(1) (2012), 1-10.

[7] T. M. Elzaki, The new integral transform "Elzaki transform", Glob. J. Pure Appl. Math. 1 (2011), 57-64.

[8] T. M. Elzaki and S. M. Elzaki, Application of new transform "Elzaki transform" to partial differential equations, Glob. J. Pure Appl. Math. 1 (2011), 65-70.

[9] T. M. Elzaki and S. M. Elzaki, On the connections between Laplace and Elzaki transforms, Advances in Theoretical and Applied Mathematics 6(1) (2011), 1-11.

[10] T. M. Elzaki and S. M. Elzaki, On the Elzaki transform and ordinary differential equation with variable coefficients, Advances in Theoretical and Applied Mathematics 6(1) (2011), 13-18.

[11] T. M. Elzaki, K. Adem and E. Hassan, On existence and uniqueness of generalized solutions for a mixed-type differential equation, J. Math. Res. 2(4) (2010), 88-92.

[12] T. M. Elzaki, Existence and uniqueness of solutions for composite type equation, Journal of Science and Technology (2009), 214-219.

[13] M. R. Spiegel, Theory and Problems of Laplace Transforms, Schaums Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1965.

[14] F. B. M. Belgacem and A. A. Karaballi, Sumudu transform fundamental properties, investigations and applications, J. Appl. Math. Stoch. Anal. 40 (2006), 1-23.

[15] H. Aminikhah and M. H. Hemmatnezhad, A novel effective approach for solving nonlinear heat transfer equations, Heat Transfer Asian Research 41(6) (2012), 459-467.

[16] S. Gupta, D. Kumar and J. Singh, Analytical solutions of convection diffusion problems by combining Laplace transform method and homotopy perturbation method, Alexandria Engineering Journal 54 (2015), 645-651.

[17] D. Kumar, J. Singh, S. Kumar, Sushila and B. P. Singh, Numerical computation of nonlinear shock wave equation of fractional order, Ain Shams Engineering Journal 6 (2015), 605-611.

[18] D. Kumar, J. Singh and D. Baleanu, A hybrid computational approach for Klein-Gordon equation on Cantor sets, Nonlinear Dynam. 87 (2017), 511-517.

[19] D. Kumar, J. Singh and S. Kumar, Numerical computation of the nonlinear fractional Zakharov-Kuznetsov equation arising in ion-acoustic waves, Journal of the Egyptian Mathematical Society 22 (2014), 373-378.

[20] D. Kumar, J. Singh and D. Baleanu, Numerical computation of the fractional model of differential-difference equation, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics 11(6) (2016), 373-378.

[21] F. B. M. Belgacem, Applications of Sumudu transform to indefinite periodic parabolic equations, Proceedings of the 6th International Conference on Mathematical Problems and Aerospace Sciences (ICNPAA'06), Chap. 6, 5160, Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, UK, 2007.

[22] F. B. M. Belgacem and R. Silambarasan, Theoretical investigations of the natural transform, Progress in Electromagnetics Research Symposium Proceedings, Suzhou, China, Sept. 2011, pp. 12-16.