



รายงานฉบับสมบูรณ์

โครงสร้างของโซลิตอนในสมการชเรอดิงเงอร์ไม่เชิงเส้นกำลังเศษสามส่วนสองในสองมิติ

Structural solitons in the 2-D nonlinear Schrödinger equation with a three-half order potential

ศรัณย์ ภิบาลชนม์

โครงการวิจัยประเภทงบประมาณเงินรายได้
จากเงินอุดหนุนรัฐบาล (งบประมาณแผ่นดิน)
ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2555
มหาวิทยาลัยบูรพา

รายงานฉบับสมบูรณ์

โครงสร้างของโซลิตอนในสมการชเรอดิงเงอร์ไม่เชิงเส้นกำลังเศษสามส่วนสองในสองมิติ

ศรัณย์ ภิบาลชนม์
ภาควิชาการจัดการเรียนรู้ คณะศึกษาศาสตร์
มหาวิทยาลัยบูรพา

งานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากงบประมาณเงินรายได้จากเงินอุดหนุนรัฐบาล
(งบประมาณแผ่นดิน) ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2555 มหาวิทยาลัยบูรพา
ผ่านสำนักงานคณะกรรมการการวิจัยแห่งชาติ เลขที่สัญญา 100/2555

บทคัดย่อ

โครงสร้างของโซลิตอนสำหรับสมการชเรอดิงเงอร์ไม่เชิงเส้นที่มีศักย์กำลังสามส่วนสองในสองมิติ หรือวอร์เทคโซลิตอน สามารถคำนวณได้จากความไม่เสถียรของผลเฉลยโซลิตอนใน 1 มิติ ที่ถูกรบกวนในแนวตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของโซลิตอน ของคลื่นความยาวคลื่นสูงๆ ซึ่งเป็นวิธีการศึกษาโซลิตอนที่มีมิติสูงกว่า 1 มิติ แต่อาจจะมีผลข้างเคียงในกรณีที่เปลี่ยน เป็นโซลิตอนในมิติที่สูงกว่า 1 มิติ มากกว่า 1 ตัว หรือ ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข iterative method ซึ่งจะทำให้ได้ผลเฉลยที่เป็น 2 มิติ อย่างสมบูรณ์โดย เป็นแบบสถานะคงที่ (steady state)

The 2D structural soliton or vortex soliton to the nonlinear Schödinger equation with three-half order potential can be determined by the effect of instability of a perturbed plane soliton in the perpendicular direction to the soliton with the long-wavelength. However, the unstable soliton can be transformed into the higher dimensional soliton more than a vortex soliton. Another method is the iterative method, this gives us only a steady vortex soliton.

สารบัญ

1	สมการชเรอดิงเงอร์ไม่เชิงเส้นที่มีศักย์กำลังสามส่วนสองใน 2 มิติ	2
1.1	โซลิตอน	2
1.2	การชนกันระหว่างโซลิตอนสองตัว	4
2	Variational Method	7
3	Petviashvili method	9
4	สรุป และ วิเคราะห์ผล	14

สารบัญรูป

1.1	การวิวัฒน์ของคลื่นโซลิตอนของสมการ KdV โดยใช้ $\eta = 0.25, x_0 = 0, V = 0.25$. . .	3
1.2	การวิวัฒน์ของคลื่นโซลิตอนของสมการ cNLS โดยใช้ $\eta = 0.5, x_0 = -30, V = 5.0$. . .	3
1.3	การวิวัฒน์ของคลื่นโซลิตอนของสมการ sNLS โดยใช้ $\eta = 0.5, x_0 = -30, V = 5.0$. . .	4
1.4	การชนกันของคลื่นโซลิตอน 2 ตัว ของสมการ KdV โดยใช้ $\eta_1 = 0.25, x_{01} = 0, V_1 = 0.25, \eta_2 = 0.4, x_{02} = -20, V_2 = 0.64$	5
1.5	การชนกันของคลื่นโซลิตอน 2 ตัว ของสมการ cNLS โดยใช้ $\eta_1 = 0.4, x_{01} = 0, V_1 = 2.0, \eta_2 = 0.55, x_{02} = -30, V_2 = 5.0$	5
1.6	การชนกันของคลื่นโซลิตอน 2 ตัว ของสมการ sNLS โดยใช้ $\eta_1 = 0.5, x_{01} = 0, V_1 = 2.0, \eta_2 = 0.55, x_{02} = -30, V_2 = 5.0$	6
1.7	แสดงมุมมองแนวสูงโดยใช้เงื่อนไขเดียวกับรูป 1.6	6
2.1	การวิวัฒน์ของคลื่นโซลิตอนที่ไม่เสถียรโดยจะเปลี่ยนเป็นโซลิตอนวอร์เทคในสถานะสุดท้าย	8
3.1	โครงสร้างของ Gaussian	11
3.2	โครงสร้างของผลเฉลยโซลิตอนวอร์เทคที่ $\mu = 1$	12
3.3	โครงสร้างของผลเฉลยโซลิตอนวอร์เทคที่ $\mu = 2.5$	12
3.4	การวิวัฒน์ของวอร์เทคโซลิตอนผลการคำนวณโดยวิธี Petviashvili	13

บทที่ 1

สมการชเรอดิงเจอร์ไม่เชิงเส้นที่มีศักย์กำลังสามส่วนสองใน 2 มิติ

ความน่าสนใจอย่างหนึ่งของสมการไม่เชิงเส้น คือผลเฉลยที่ได้รูปแบบหนึ่งซึ่งแสดงความคงที่ (coherent structure) ตลอดการเคลื่อนที่ภายในตัวกลาง ซึ่งรู้จักกันในชื่อ คลื่นโซลิตอน ก่อนที่จะรู้จักกับสมการชเรอดิงเจอร์ไม่เชิงเส้นที่มีศักย์กำลังสามส่วนสองใน 2 มิติ เราจะเริ่มจากความเป็นมาของโซลิตอน และ นำตาของสมการที่จะให้ผลเฉลยเป็นคลื่นโซลิตอน

1.1 โซลิตอน

โซลิตอนเป็นชื่อเรียกคลื่นโซลิตารี (solitary waves) เพราะเนื่องจากว่าเมื่อคลื่นโซลิตารี สองตัววิ่งชนกัน หลังจากการชนกัน จะได้คลื่นโซลิตารีตัวเดิมกลับมา ซึ่งเป็นคุณสมบัติของอนุภาค ดังนั้นเราจึงเรียกคลื่นโซลิตารีอีกชื่อหนึ่งว่าโซลิตอน คลื่นโซลิตารีถูกค้นพบครั้งแรกโดย John Scott Russell [1] เมื่อสังเกตคลื่นที่เกิดจากการหยุด ของเรือในลำคลองของสกอตแลนด์ โดยคลื่นที่เกิดขึ้นหน้าเรื่อนั้นจะวิ่งไปด้วยอัตราเร็วคงที่และ ไม่มีการกระจายเหมือนคลื่นทั่วไป อย่างไรก็ตามสมการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้บรรยายโซลิตอนนี้ได้ถูกคิดค้นโดย Korteweg และ de Vries จนเป็นที่มาของสมการ Korteweg-de Vries (KdV) [1]

$$\phi_t + \phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0 \quad (1.1)$$

โดยตัวห้อย t และ x แสดงอนุพันธ์ย่อยเทียบกับเวลา และ อวกาศ (space) เทอมที่สองแสดงความไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinearity) และเทอมสุดท้ายแสดง ลักษณะการกระจายตัว (dispersion) ของคลื่น ผลเฉลยของสมการ KdV (1.1) แสดงถึงการวิวัฒนาการตามเวลาของความสูงของคลื่น KdV แบบ traveling wave สามารถเขียนได้เป็น

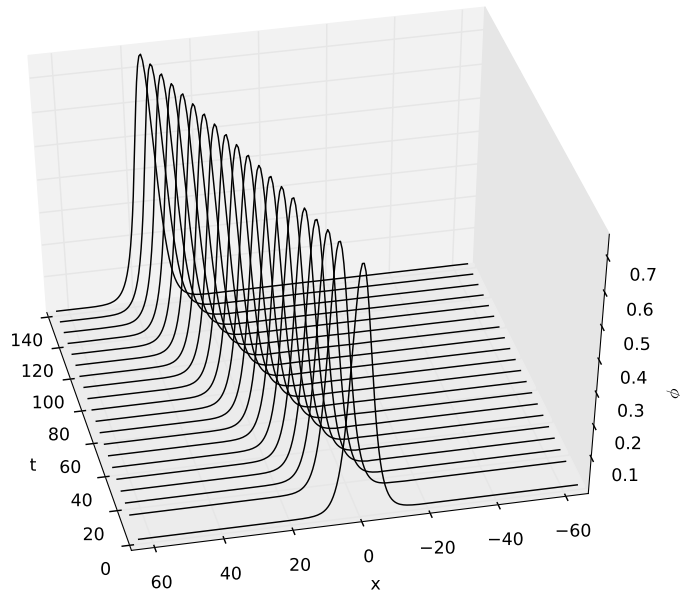
$$\phi(x, t) = 12\eta^2 \operatorname{sech}^2 \eta(x - Vt - x_0)$$

ซึ่ง η เป็นค่าคงที่ และ V แสดงอัตราเร็วของคลื่น รูปที่ 1.1 แสดงการเคลื่อนที่ของโซลิตอนจากสมการ (1.1) ที่ความสูงของคลื่นไม่มีการเปลี่ยนแปลงขณะเคลื่อนที่ นอกจากกลุ่มของสมการที่อยู่ในรูปของสมการ KdV แล้ว ยังมีอีกกลุ่มหนึ่งซึ่งให้ผลเฉลยอยู่ในรูปของโซลิตอน เหมือนกันกลุ่มนี้จะเรียกว่า สมการ nonlinear Schrödinger equation โดยสมการที่รู้จักกันดีในโดยเฉพาะในการไฟเบอร์ โยแก้วนำแสงคือ cubic nonlinear Schrödinger equation (cnLS) [2]

$$i\phi_t + \phi_{xx} + |\phi|^2\phi = 0 \quad (1.2)$$

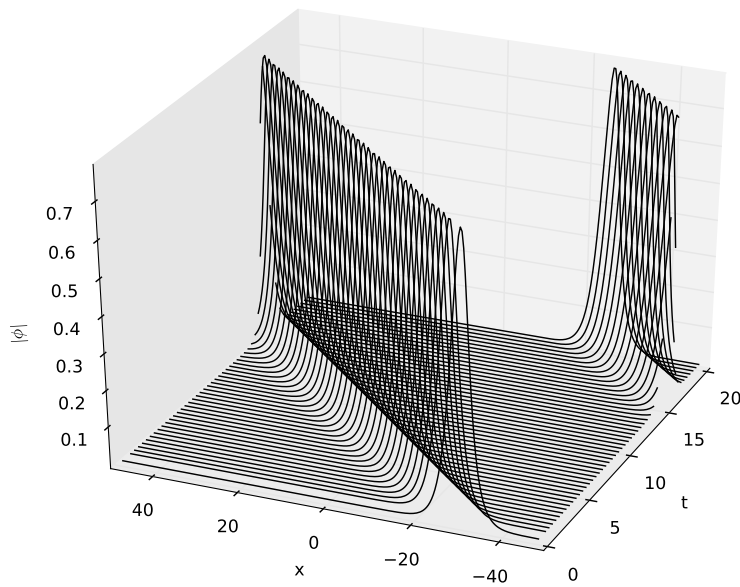
ผลเฉลยของสมการ (1.2) ในรูปของ traveling wave จะเขียนได้เป็น

$$\phi(x, t) = \sqrt{2}\eta \operatorname{sech} \eta(x - Vt - x_0) e^{i(xV/2 - Vt)}$$



รูปที่ 1.1: การวิวัฒน์ของคลื่นโซลิตอนของสมการ KdV โดยใช้ $\eta = 0.25, x_0 = 0, V = 0.25$

โดย V แสดงอัตราเร็วของโซลิตอน และ η เป็นค่าคงที่ รูปที่ 1.2 แสดงการวิวัฒน์ตามเวลาของผลเฉลยของสมการ cNLS สำ-



รูปที่ 1.2: การวิวัฒน์ของคลื่นโซลิตอนของสมการ cNLS โดยใช้ $\eta = 0.5, x_0 = -30, V = 5.0$

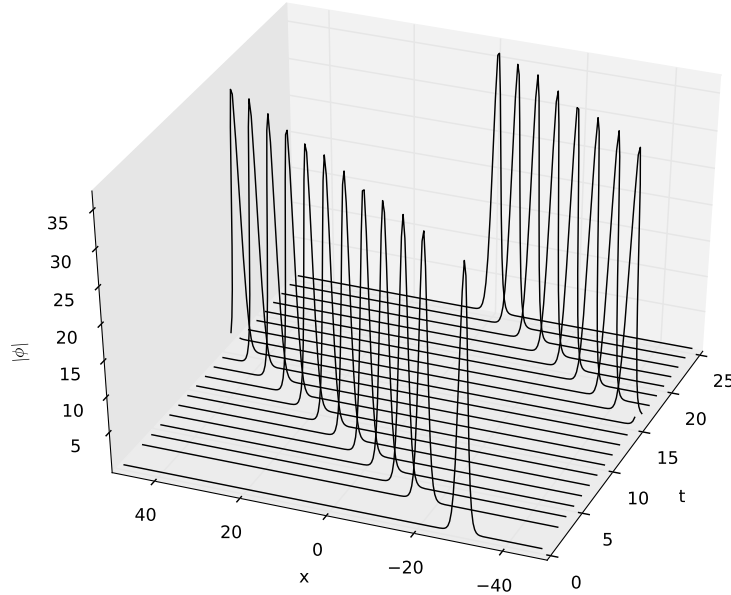
หรับสมการชเรอดิงเงอร์ไม่เชิงเส้นที่บรรยายการสั่นของประจุควมในสถานพลาสมาที่มีประจุลบวิ่งอยู่รอบๆ [3] จะเขียนอยู่ในรูป

$$i\phi_t + \phi_{xx} + |\phi|^{1/2}\phi = 0 \quad (1.3)$$

ผลเฉลยของสมการ (1.3) สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\phi(x, t) = 400\eta^4 \operatorname{sech}^2 \eta(x - Vt - x_0) e^{i(xV/2 - Vt)}$$

และการวิวัฒนาการของโซลิตอนนี้แสดงในรูป 1.3 จากศึกษาการวิวัฒนาการตามเวลาของสมการไม่เชิงเส้นทั้งสามสมการ เราพบว่าผล



รูปที่ 1.3: การวิวัฒนาการของคลื่นโซลิตอนของสมการ sNLS โดยใช้ $\eta = 0.5, x_0 = -30, V = 5.0$

เฉลยอยู่ในรูปของคลื่นโซลิตารี เพราะว่าความสูงของคลื่นไม่มีการเปลี่ยนแปลง อย่างไรก็ตาม เราสามารถยืนยันคุณสมบัติของคลื่นโซลิตารีได้จากการชนกันระหว่างคลื่นสองขบวน

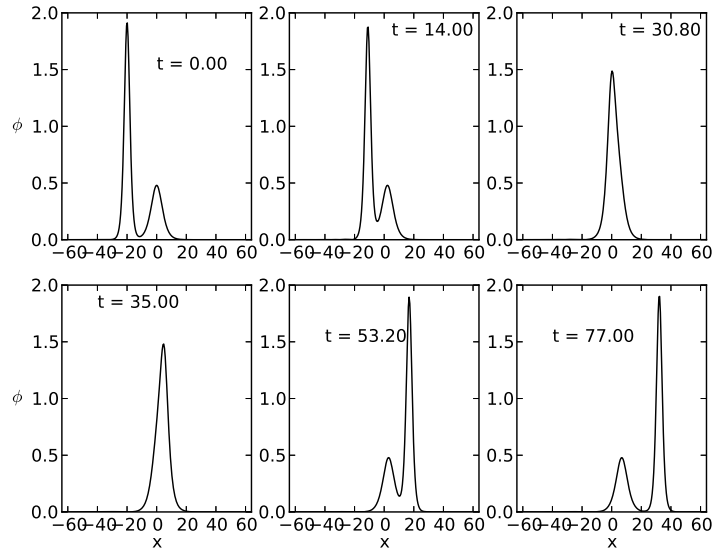
1.2 การชนกันระหว่างโซลิตอนสองตัว

ปรากฏการณ์อย่างหนึ่งที่สำคัญซึ่งทำให้โซลิตอนแตกต่างจากคลื่นแบบอื่น ๆ คือการชนกัน (collision) โดยจะได้โซลิตอนลักษณะเดิมกลับมาหลังจากชนกันแล้ว ดังแสดงให้ดูตามรูปที่ 1.4 โดยใช้เงื่อนไขเริ่มต้นเป็น

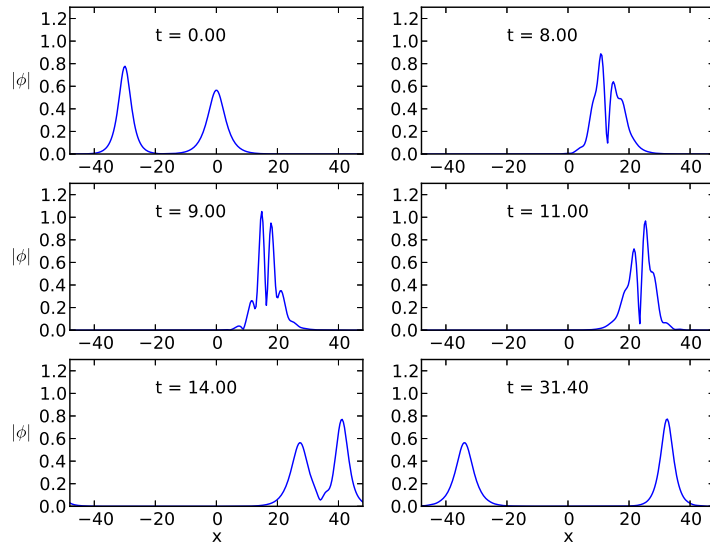
$$\phi(x, t) = 12\eta_1^2 \operatorname{sech}^2 \eta_1(x - V_1t - x_{01}) + 12\eta_2^2 \operatorname{sech}^2 \eta_2(x - V_2t - x_{02})$$

จากค่าเริ่มต้นต่างๆ อัตราเร็วของคลื่นโซลิตอนไม่เร็วมากทำให้มีเวลาในการศึกษาพฤติกรรมระหว่างชนกันนาน ขึ้น โดยจะสังเกตว่าการชนกันระหว่างคลื่นโซลิตารีในช่วงเวลาที่ 30.8 ถึง 35 ไม่ใช่เป็นการรวมกันแบบ superposition เมื่อคลื่นเชิงเส้นทั่วไป เพราะความสูงของคลื่นทั้งสองขณะชนกัน ($t = 30.8$) มันไม่ใช่ นำความสูงของคลื่นทั้งสองมารวมกัน ความสูงของคลื่นจะลดลง แต่หลังจากชนกันแล้ว ความสูงของคลื่นโซลิตารีจะกลับมาเป็นแบบเดิม ลักษณะการชนแบบนี้เราจะเรียกว่าชนแบบยืดหยุ่น (elastic collision) และทำให้เราเรียกคลื่นโซลิตารีอีกชื่อหนึ่งว่าคลื่นโซลิตอนนั่นเอง สำหรับสมการ cNLS เราจะใช้เงื่อนไขเริ่มต้นเป็น

$$\phi(x, t) = \sqrt{2}\eta_1^2 \operatorname{sech} \eta_1(x - x_{01}) e^{ixV_1/2} + \sqrt{2}\eta_2^2 \operatorname{sech} \eta_2(x - x_{02}) e^{ixV_2/2}$$



รูปที่ 1.4: การชนกันของคลื่นโซลิตอน 2 ตัว ของสมการ KdV โดยใช้ $\eta_1 = 0.25$, $x_{01} = 0$, $V_1 = 0.25$, $\eta_2 = 0.4$, $x_{02} = -20$, $V_2 = 0.64$

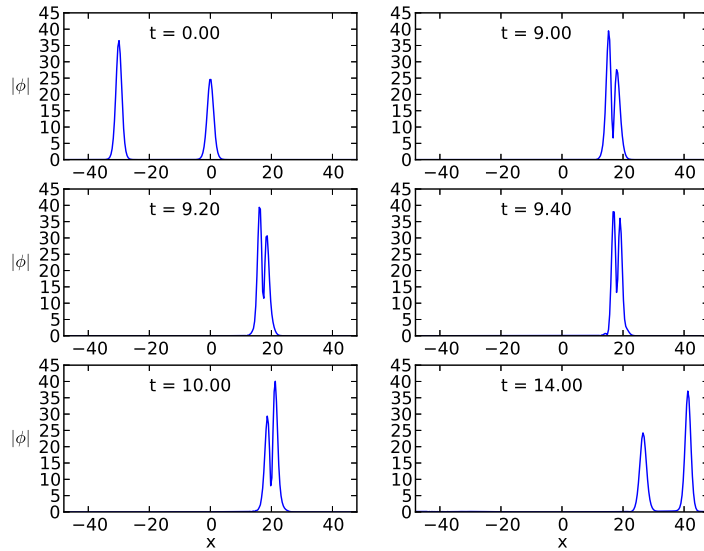


รูปที่ 1.5: การชนกันของคลื่นโซลิตอน 2 ตัว ของสมการ cNLS โดยใช้ $\eta_1 = 0.4$, $x_{01} = 0$, $V_1 = 2.0$, $\eta_2 = 0.55$, $x_{02} = -30$, $V_2 = 5.0$

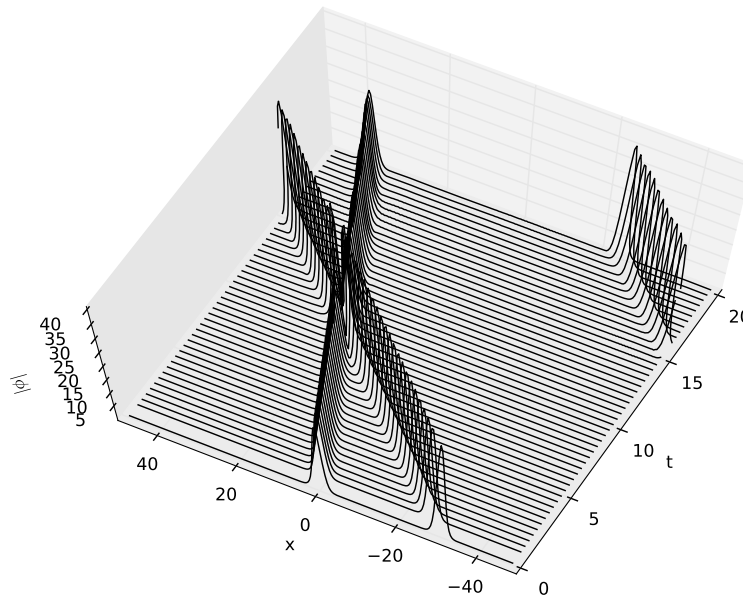
ผลการคำนวณเชิงตัวเลขจะแสดงในรูป 1.5 สำหรับเงื่อนไขนี้ ความสูงของคลื่นโซลิตอนไม่ขึ้นกับอัตราเร็ว เราจำเป็นต้องกำหนดอัตราเร็วของคลื่นเอง และ สมการที่เราสนใจในกรณีหนึ่งมิติ จะใช้เงื่อนไขเริ่มต้นเป็น

$$\phi(x, t) = 400\eta_1^4 \operatorname{sech}^4 \eta_1(x - x_{01}) e^{ixV_1/2} + 400\eta_2^4 \operatorname{sech}^4 \eta_2(x - x_{02}) e^{ixV_2/2}$$

ผลการคำนวณเชิงตัวเลขสำหรับการชนกันจะแสดงในรูป 1.6 สำหรับรูปที่ 1.7 แสดงเหตุการณ์ทั้งหมดใน 3 มิติ การจำลอง



รูปที่ 1.6: การชนกันของคลื่นโซลิตอน 2 ตัว ของสมการ sNLS โดยใช้ $\eta_1 = 0.5, x_{01} = 0, V_1 = 2.0, \eta_2 = 0.55, x_{02} = -30, V_2 = 5.0$



รูปที่ 1.7: แสดงมุมมองแนวสูงโดยใช้เงื่อนไขเดียวกับรูป 1.6

การชนกันของผลเฉลยทั้งสามแบบ แสดงว่าเป็นการชนกันแบบยืดหยุ่น โดยเราสามารถเรียกผลเฉลย ทั้งสามแบบนี้ว่าโซลิตอน อย่างไรก็ตามเราสนใจที่จะคลื่นโซลิตารีในสองมิติของสมการ sNLS,

$$i\phi_t + \phi_{xx} + \phi_{yy} + |\phi|^{1/2}\phi = 0 \quad (1.4)$$

ซึ่งไม่มีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (analytic solution) อย่างไรก็ตามเรายังโชคดีอยู่บ้าง สำหรับการผลเฉลยวอร์เทคของสมการ sNLS

บทที่ 2

Variational Method

ผลการศึกษาความไม่เสถียรของโซลิตอนของสมการ ZK [4, 5, 6],

$$u_t + uu_x + u_{xxx} + u_{xyy} = 0,$$

ซึ่งเป็นรูปแบบหนึ่งของ KdV ในมิติที่สูงกว่า 1 มิติ แสดงให้เห็นว่าผลดังกล่าวให้โซลิตอน 2 หรือ 3 มิติ ซึ่งจะเรียกว่า วอร์เทค (vortex) โดยมีหลักการง่ายๆคือ การนำคลื่นมารบกวนโซลิตอนในแนวตั้งฉาก ถ้ากำหนดให้โซลิตอนเคลื่อนที่ในแนวแกน x

$$\phi(x, y, t) = \phi_0 + \epsilon(u + iv) e^{\gamma t +iky}$$

โดย u และ v เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น ϵ เป็นค่าที่มีขนาดเล็กมากๆ และ ϕ_0 คือ โซลิตอน ในแกน x อย่างเดียว k แสดงความยาวคลื่นที่จะนำมารบกวน γ คืออัตราการเพิ่ม เมื่อแทนลงใน sNLS (1.4),

$$i\phi_t + \phi_{xx} + \phi_{yy} + |\phi|^{1/2}\phi = 0$$

แล้วเก็บเทอมในอันดับ $O(\epsilon)$ เท่านั้น ซึ่งจะให้ได้สมการที่มีเทอมรวมกันอยู่

$$\begin{aligned} u_{xx} + \left(\frac{3}{2}\phi_0^{1/2} - 16\eta^2 - k^2\right)u &= \gamma v, \\ v_{xx} + \left(\phi_0^{1/2} - 16\eta^2 - k^2\right)v &= -\gamma u. \end{aligned} \quad (2.1)$$

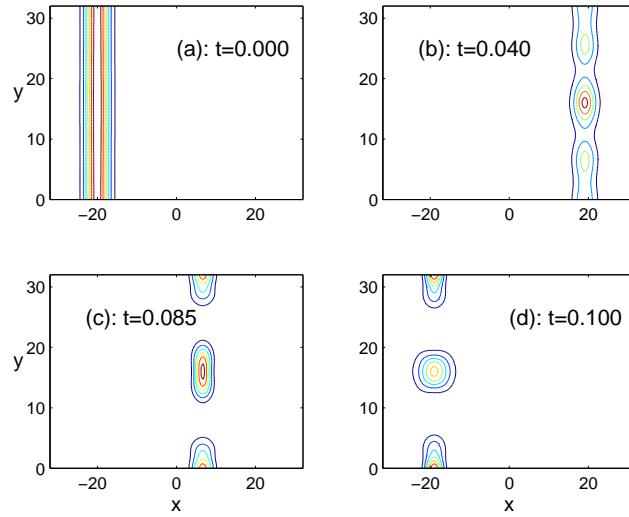
โดย

$$\phi_0(x, t) = 400\eta^4 e^{i\{\frac{1}{2}Vx + (16\eta^2 - V^2/4)t\}} \operatorname{sech}^4 \eta(x - Vt - x_0) \quad (2.2)$$

และ V แสดงอัตราเร็วของคลื่นโซลิตอน x_0 คือตำแหน่งเริ่มต้นของคลื่นโซลิตอน และ η แสดงค่าคงที่ เราต้องหาค่าอัตราการเพิ่มก่อนว่าอยู่ในช่วงไหน เพื่อที่จะบอกได้ว่าโซลิตอนจะไม่เสถียรช่วงไหน เมื่อรู้ว่าช่วงค่าอัตราการเพิ่มเราจะหาผลของการเปลี่ยนแปลงของโซลิตอนซึ่งจะนำไปสู่วอร์เทคโซลิตอน การหาอัตราการเพิ่มจะใช้วิธี variational [7]

เราจะเริ่มจากการสร้าง Lagrangian density สำหรับ (2.1)

$$\mathcal{S} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(u, u_x, v, v_x; x) dx \quad (2.3)$$



รูปที่ 2.1: การวิวัฒนาการของคลื่นโซลิตอนที่ไม่เสถียรโดยจะเปลี่ยนเป็นโซลิตอนวอร์เทคในสถานะสุดท้าย

โดย

$$\mathcal{L} = \frac{u_x^2}{2} - \frac{v_x^2}{2} + \left(16 + k^2 - \frac{3\phi_0^{1/2}}{2}\right) \frac{u^2}{2} + \left(\phi_0^{1/2} - 16\eta^2 - k^2\right) \frac{v^2}{2} + \gamma uv.$$

หลักการของวิธี variational คือ การเดาคือฟังก์ชันเริ่มต้น u และ v ที่ประกอบด้วยตัวแปรต่างๆ เพื่อนำไปหาค่าที่ดีที่สุดสำหรับ Lagrangian density นี้ สำหรับฟังก์ชันที่เราจะเดาจะมีรูปเป็น $u = \alpha \operatorname{sech}^5 x$ และ $v = \beta \operatorname{sech}^4 x$ ซึ่ง α และ β คือค่าที่จะต้องหา เมื่อแทนค่าลงใน (2.3) จะได้

$$\mathcal{S} = \frac{128}{315} \alpha^2 (k^2 - 9) - \frac{16}{35} \beta^2 k^2 + \frac{35\pi}{128} \alpha \beta \gamma.$$

การหาค่าที่ดีที่สุดสำหรับค่าคงที่ จะใช้เงื่อนไข $\delta \mathcal{S} = 0$

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \beta} = 0.$$

ซึ่งจะได้อัตราการเพิ่ม หลังจากที่กำลังค่าคงที่

$$\gamma^2 = \frac{134217728}{13505625\pi^2} k^2 (9 - k^2).$$

อัตราการเพิ่มจะขึ้นกับความยาวคลื่นที่ใช้ในการรบกวน ซึ่งจะทำให้โซลิตอนไม่เสถียร และมีโอกาสเปลี่ยนไปเป็นโซลิตอนที่มีมิติสูงกว่า 1 มิติ โดยค่าสูงสุดที่สามารถใช้ได้คือ 3 ผลของความไม่เสถียรเราจะได้วอร์เทคตามรูปที่ 2.1 โดยใช้ $\eta = 0.25$, $V = 2$ อย่างไรก็ตาม เรามีวอร์เทค 2 ตัวเกิดขึ้น ซึ่งถ้าเราต้องการวอร์เทค 1 ตัว เราจำเป็นต้องเลือกใช้ค่าคงที่ต่างๆใหม่ (η และ V)

บทที่ 3

Petviashvili method

ระเบียบวิธีของ optimization [8, 9] เป็นกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุด หรือ ค่าที่เหมาะสมที่สุดในเหตุการณ์ที่กำลังศึกษาอยู่

สำหรับการศึกษาผลเฉลยของสมการคลื่นไม่เชิงเส้นในสองมิตินั้น ส่วนใหญ่จะไม่สามารถหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ได้ โดยเฉพาะผลเฉลยในรูปของโซลิตอน หรือ คลื่นโซลิตารี ดังนั้น เราจึงต้องอาศัยกระบวนการเชิงตัวเลขในการหาคำตอบดังกล่าว และ อีกวิธีหนึ่งคือการประยุกต์ใช้ optimization แบบ iterative [9] หรือการวนซ้ำจนกว่าจะได้ คำตอบที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลง โดยนำเสนอครั้งแรกโดย Petviashvili [10] และพัฒนาต่อเพื่อให้ได้ คำตอบที่ดีและสามารถแก้สมการในรูปแบบต่างๆไปได้ [11, 12] ซึ่งต่อไปนี้จะเรียกว่า วิธี Petviashvili นอกจากนี้วิธีนี้สามารถใช้ได้กับสมการ nonlinear Schrödinger ที่มีศักย์อยู่ในรูปของ power-law nonlinearity กล่าวคือ

$$i\phi_t + \nabla^2\phi + |\phi|^{n-1}\phi = 0 \quad (3.1)$$

โดย $n > 1$ สำหรับกรณีของเรา $n = 3/2$ และ ∇^2 คือตัวกระทำ Laplacian การหาผลเฉลยแบบคงตัวสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\phi(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}) e^{i\mu t} \quad (3.2)$$

ซึ่ง $u(\mathbf{x}) > 0$ และ μ คือค่าคงที่ของการเคลื่อนที่มีค่ามากกว่าศูนย์ แทน สมการ (3.2) ลงใน สมการ (1.4) จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ไม่ขึ้นกับเวลา

$$\nabla^2 u + u^{3/2} = \mu u$$

กำหนดตัวดำเนินการใหม่

$$M = \mu - \nabla^2$$

ดังนั้นเราจะได้สมการสำหรับการทำซ้ำ เพื่อหาคำตอบต่อไป

$$Mu = u^{3/2}$$

หรือ

$$u_{i+1} = M^{-1}u_i^{3/2} \quad (3.3)$$

โดย χ เป็นจำนวนครั้งของการทำซ้ำ เริ่มตั้งแต่ 0 ถึงจำนวนเต็มใดๆ อย่างไรก็ตามระหว่างการทำซ้ำผลเฉลยสามารถ ลู่เข้าสู่ ศูนย์ (0) หรือ อนันต์ (infinity) ได้ ดังนั้นพื้นฐานของวิธี Petviashvili จะกำหนดปัจจัยความเสถียร (stabilizing factor) นั้นเอง ซึ่งวัตถุประสงค์ปัจจัยนี้จะช่วยเพิ่มค่าในฟังก์ชันระหว่างการทำซ้ำที่จะนำไปสู่ศูนย์ และ จะเป็นตัวกวดค่า ของคำตอบ เมื่อมีการพุ่งขึ้นเกินไป ดังนั้น

$$u_{i+1} = S_i^\gamma M^{-1} u_i^{3/2} \quad (3.4)$$

โดย γ เป็นค่าคงที่ และ stability factor จะเขียนได้ในรูป

$$S_i = \frac{\langle u_i, M u_i \rangle}{\langle u_i, u_i^{3/2} \rangle} \quad (3.5)$$

ผลคูณภายใน (inner product) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ จะแสดงได้จาก

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^\dagger(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

โดย ตัวยก \dagger แสดงว่าเป็น Hermitian การคำนวณหาค่า γ จะพิจารณาจากอันดับ (order) ของ ผลเฉลย ในกรณีนี้เรากำหนด ให้ผลเฉลยมีอันดับเป็น 1

$$u(\mathbf{x}) = O(1)$$

หลังจากการทำซ้ำระยะหนึ่งค่าของฟังก์ชันจะมีค่าเป็น

$$u_i(\mathbf{x}) = O(\epsilon)$$

ซึ่ง $\epsilon \ll 1$ หรือ $\epsilon \gg 1$ ดังนั้นจากสมการ (3.5) เราจะได้อันดับของ S_i นั่นคือ

$$S_i = O(\epsilon^{-1/2})$$

และจะทำให้อันดับของผลลัพธ์ของฟังก์ชันทำซ้ำมีค่าเป็น

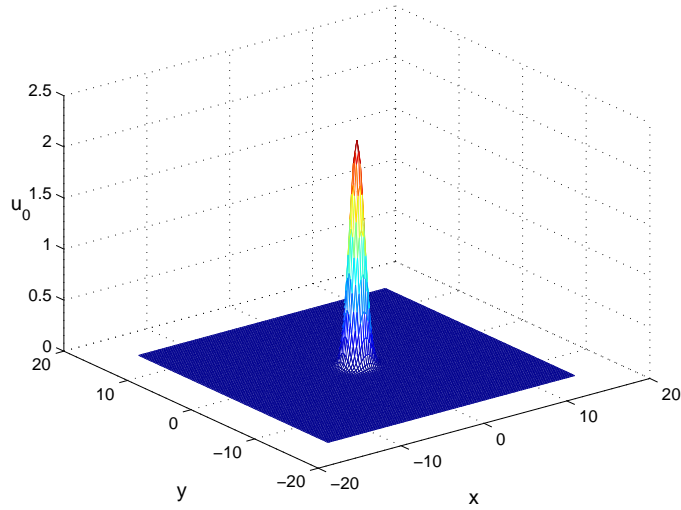
$$u_{i+1} = O(\epsilon^{\frac{3-\gamma}{2}})$$

ฉะนั้นถ้าเราต้องการให้การทำซ้ำให้คำตอบที่ถูกต้อง เราจะต้องให้อันดับมีค่าเป็น 1 นั่นคือค่าของ γ จะต้อง เท่ากับ $3/2$ การพิสูจน์การลู่เข้าสู่คำตอบโดยวิธี Petviashvili สามารถดูได้จากเอกสารอ้างอิงที่ [11]

โดยกระบวนการดังกล่าว จะทำให้เราสามารถเขียนโปรแกรมในการคำนวณโดยวิธี Petviashvili เพื่อคำนวณหาผลเฉลย วอร์เทค ซึ่งจะเริ่มจากแปลงฟูเรียร์กันแกนอวกาศ (spatial coordinates)

$$\Phi_{p,q} = F(\phi_{l,m}) = \sum_{l=0}^{N_x-1} \sum_{m=0}^{N_y-1} \phi_{l,m} e^{i(\xi_p x_l + \chi_q y_m)}$$

โดย N_x และ N_y คือจำนวนกริดในแกน x และ y . $(x_l, y_m) = (lL_x/N_x, mL_y/N_y)$, ซึ่ง L_x และ L_y คือความยาวในขอบเขตแกน x และ y ตามลำดับ $(\xi_p, \chi_q) = 2\pi(p/L_x, q/L_y)$ สำหรับ $p = 0, \dots, N_x -$



รูปที่ 3.1: โครงสร้างของ Gaussian

1 และ $q = 0, \dots, N_y - 1$ การแปลงฟูเรียร์ในกรณีนี้ทำให้การคำนวณง่ายขึ้น เพราะไม่ต้องคำนึงถึงตัวกระทำ เนื่องจากได้ย้ายพิกัดไปอยู่ใน พิกัดของฟูเรียร์นั่นเอง ดังนั้น

$$Mu = FT^{-1}((\mu + (\xi^2 + \chi^2))FT(u))$$

โดย FT^{-1} คือ ส่วนกลับของการแปลงฟูเรียร์ และ $FT(u)$ คือการแปลงฟูเรียร์ของ u และ

$$M^{-1}u^{3/2} = FT^{-1}\left(\frac{FT(u^{3/2})}{\mu + \xi^2 + \chi^2}\right)$$

ดังนั้นฟังก์ชันสำหรับการคำนวณจะเขียนได้เป็น

$$u_{i+1} = S_i^\gamma FT^{-1}\left(\frac{FT(u^{3/2})}{\mu + \xi^2 + \chi^2}\right)$$

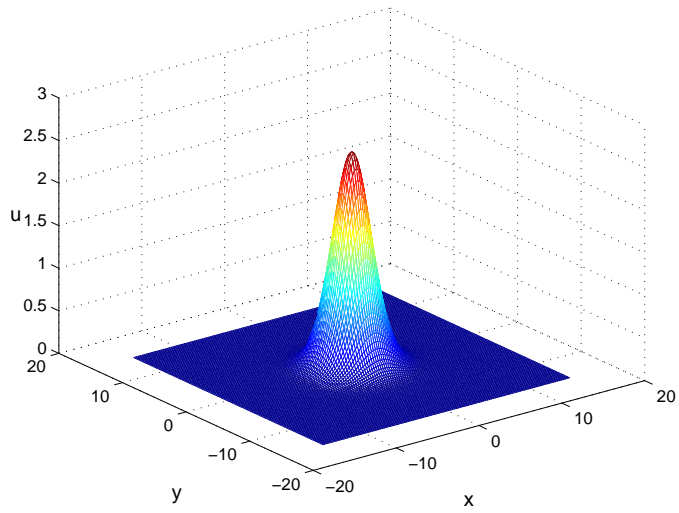
โดย

$$S_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u \cdot Mu}{u \cdot u^{3/2}} dx dy$$

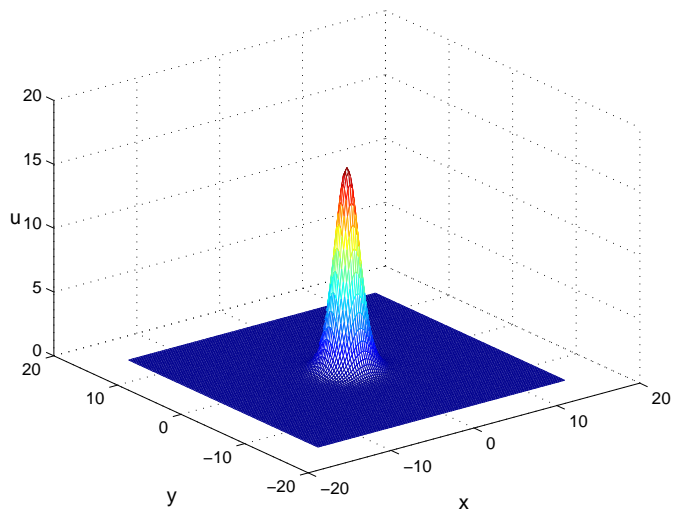
เราจะพิจารณา $\mu = 1$ และใช้ฟังก์ชัน Gaussian เป็นค่าเริ่มต้น

$$u_0 = 2.2 e^{-(x^2+y^2)}$$

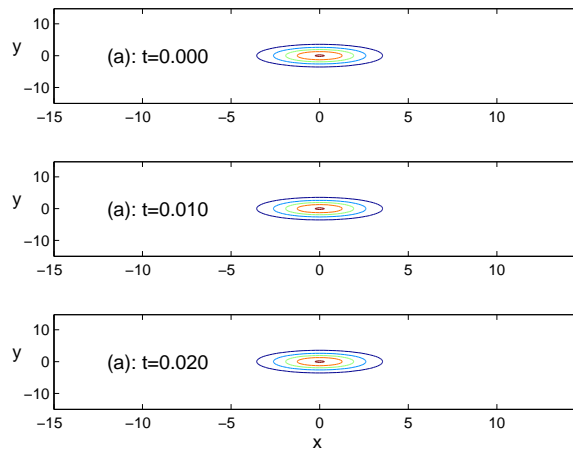
โครงสร้างของฟังก์ชัน Gaussian แสดงตามรูปที่ 3.1 นอกจากนี้กำหนดให้ $L_x = [-30, 30], L_y = [-30, 30], N_x = N_y = 128$ ผลเฉลยวอร์เทคแบบคงตัว ในกรณี $\mu = 1$ จะแสดงในรูปที่ 3.2 ถ้าเรากำหนดให้ $\mu = 2.5$ ผลการคำนวณจะแสดงในรูปที่ 3.3 ผลลัพธ์ทั้งสองแสดงผลเฉลยวอร์เทคแบบคงตัวของสมการชเวดิงเงอร์แบบไม่เชิงเส้นที่มี ศักย์อันดับเศษสามส่วนสอง (snls) ที่มีค่าคงที่ของการเคลื่อนที่ที่แตกต่างกัน เราสามารถตรวจสอบผลการคำนวณได้โดยการแทน



รูปที่ 3.2: โครงสร้างของผลเฉลยโซลิตอนวอร์เทคที่ $\mu = 1$



รูปที่ 3.3: โครงสร้างของผลเฉลยโซลิตอนวอร์เทคที่ $\mu = 2.5$



รูปที่ 3.4: การวิวัฒน์ของวอร์เทคโซลิตอนผลการคำนวณโดยวิธี Petviashvili

ค่าคำตอบ กลับไปในสมการ แล้วดูการวิวัฒน์ของผลเฉลยนี้ ถ้าตอบของเราถูกต้องเราจะไม่เห็นการเปลี่ยนแปลงใดๆเกิดขึ้น เพราะ ผลเฉลยของเราเป็นแบบคงตัว จากสมการ snls เราแปลงฟูเรียร์อีกครั้งจะได้

$$\frac{d\phi}{dt} = -i \left(FT^{-1} \left((\xi^2 + \chi^2) FT(\phi) \right) - |\phi|^{1/2} \phi \right) = \varphi(\phi, t)$$

ผลดังกล่าวแสดงจากรูปที่ 3.4 ซึ่งผลเฉลยไม่มีการเปลี่ยนตามเวลาซึ่งสามารถสรุปได้ว่าเป็น วอร์เทคโซลิตอนแบบคงตัว

บทที่ 4

สรุป และ วิเคราะห์ผล

วอร์เทคโซลิตอนที่ได้จากสมการชเรอดิงเงอร์ไม่เชิงเส้นที่มีศักย์กำลังสามส่วนสองที่ได้จากการรบกวนโซลิตอนใน 1 มิติ จำเป็นต้องเลือกเงื่อนไขในการรบกวน เพื่อให้ได้การเปลี่ยนรูปร่างจาก 1 มิติ เป็น 2 มิติ โดยสมบูรณ์ แต่สำหรับการใช้วิธีของ Petviashvili เราจะได้วอร์เทคที่สมบูรณ์ แต่ก็มาเงื่อนไขจำกัดคือ ต้องขึ้นกับเงื่อนไขเริ่มต้น เพราะถ้าใช้เงื่อนไขที่ไกลจากผลเฉลยมากเกินไปจะทำให้การคำนวณช้า หรือ อาจได้ผลเฉลยในรูปอื่นแทน ในกรณีที่สมการมีหลายคำตอบ

การหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ตรงๆ โดยไม่ต้องอาศัยวิธีทางอ้อมเป็นสิ่งที่ดี แต่สำหรับสมการที่ไม่สามารถหาได้ (non-integral equations) เราอาจต้องพัฒนาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อให้ได้คำตอบที่เราต้องการ โดยเฉพาะการหาผลเฉลยของสมการที่มีหลายคำตอบ

บรรณานุกรม

- [1] E. Infeld and G. Rowlands, *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos*, 2nd edn. (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [2] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, 4th edn. (Academic Press, New York, 2007).
- [3] S. Phibanchon and M. A. Allen, in *The 34th Congress on Science and Technology of Thailand*, p. D0029 (King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, 2008).
- [4] P. Frycz and E. Infeld, *Phys. Rev. Lett.* 63, 384 (1989).
- [5] P. Frycz, E. Infeld, and J. C. Samson, *Phys. Rev. Lett.* 69, 1057 (1992).
- [6] E. Infeld and A. A. Skorupski, *J. Plasma Phys.* 66, 295 (2001).
- [7] D. Anderson, M. Lisak, and A. Berntson, *Pramana J. Phys.* 57, 917 (2001).
- [8] J. Nocedal and S. Wright, *Numerical Optimization* (Springer, 1999).
- [9] C. Kelley, *Iterative methods for optimization* (SIAM, 1999).
- [10] V. I. Petviashvili, *Sov. J. Plasma Phys.* 2, 257 (1976).
- [11] D. E. Pelinovsky and Y. A. Stepanyants, *SIAM J. Numer. Anal.* 42, 1110 (2004).
- [12] T. Lakoba and J. Yang, *JCP* 226, 1668 (2007).