เอกสารประกอบการสอน

วิชา 204341

ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ (Symbolic Logic)

สกุล อ้นมา

ภาควิชาศาสนาและปรัชญา

ได้รับทุนสนับสนุนจากงบประมาณรายได้

ปีงบประมาณ 2551

คณะมนุษยศาสตร์และสังคมศาสตร์

มหาวิทยาลัยบูรพา

คำนำ

เอกสารประกอบการสอนเล่มนี้จัดทำขึ้นเพื่อใช้เป็นเอกสารประกอบการสอนตามหลักสูตรในรายวิชา 265341 ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ (Symbolic Logic) ในระดับปริญญาตรี ซึ่งเป็นรายวิชาที่อยู่ในกลุ่มเอกเลือกของภาควิชาศาสนาและปรัชญา คณะมนุษยศาสตร์และสังคมศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

เนื้อหาในเอกสารประกอบการสอนเล่มนี้ได้ใช้แนวการเขียนโดยยึดเอาขอบข่าย โครงสร้างหลักสูตร และสังเขปของวิชาเป็นหลัก ซึ่งประกอบด้วยเนื้อหาทั้งหมด 12 บท คือ

บทที่ 1 ความหมายและความเป็นมาของตรรกศาสตร์

บทที่ 2 ค่าความจริงและความสมเหตุสมผล

บทที่ 3 ตรรกศาสตร์ว่าด้วยประพจน์

บทที่ 4 ตารางความจริง

บทที่ 5 การถอดประพจน์เป็นสัญลักษณ์และการใส่วงเล็บ

บทที่ 6 วิธีพิสูจน์ประพจน์และข้ออ้างเหตุผล

บทที่ 7 วิธีพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดอ้อม

บทที่ 8 วิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยกฎการอนุมาน

บทที่ 9 วิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยกฎการแทนที่

บทที่ 10 วิธีพิสูจน์ด้วยการทำให้ขัดแย้งกัน

บทที่ 11 วิธีพิสูจน์ด้วยการสมมติเงื่อนไข

บทที่ 12 ตรรกศาสตร์ภาคขยาย

หวังว่าเอกสารประกอบการสอนนี้จะอำนวยประโยชน์ในการเรียนรู้สำหรับนิสิตวิชาเอกศาสนาและปรัชญาและผู้สนใจตามสมควร ผู้เรียบเรียงขอขอบคุณเจ้าของเอกสารข้อมูลทุกท่านที่ได้กล่าวไว้ในเอกสารนี้ที่ถ่ายทอดความรู้อันเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการค้นคว้าและเรียบเรียง

ขอบคุณ ดร. สมหวัง แก้วสุฟอง อาจารย์ประจำสาขาวิชาปรัชญาและศาสนา ภาควิชามนุษยศาสตร์ คณะมนุษยศาสตร์และสังคมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ที่ได้เสียสละเวลาช่วยตรวจสอบความถูกต้องสมบูรณ์ของเอกสารนี้ และให้คำแนะนำที่มีประโยชน์ต่อการแก้ไขให้เอกสารประกอบการสอนนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น และขอขอบคุณนางสาวนงลักษณ์ ทองเลี่ยม เจ้าหน้าที่หน่วยจัดการเรียนการสอนของคณะฯ ที่ช่วยเอาใจใส่เร่งรัดและให้คำแนะนำที่มีประโยชน์ หากมีข้อบกพร่องประการใดในเอกสารนี้ผู้เรียบเรียงยินดีน้อมรับคำแนะนำเพื่อพัฒนาปรับปรุงแก้ไขให้มีความสมบูรณ์และเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาของนิสิตต่อไป

สกุล อ้นมา

ตุลาคม 2554

สารบัญ

ประมวลรายวิชา
คณะมนุษยศาสตร์และสังคมศาสตร์
มหาวิทยาลัยบูรพา

1. คณะ/ภาควิชา	คณะมนุษยศาสตร์และสังคมศาสตร์ ภาควิชาศาสนาและปรัชญา
2. รหัสและชื่อวิชา	265341 ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ (Symbolic Logic)
3. จำนวนหน่วยกิต	3(3 – 0 – 6)
4. สถานภาพของรายวิชา	วิชาเอกเลือก
5. ผู้สอน	ดร. สกุล อ้นมา
6. สถานที่ติดต่อ	QS2 504 โทรฯ (038) 102365

7. คำอธิบายรายวิชา

การใช้สัญลักษณ์แทนข้อความ การทดสอบความสมเหตุสมผล วิธีแสดงความสมเหตุสมผลและความไม่สมเหตุสมผลของการอ้างเหตุผล กลุ่มข้อความที่สอดคล้องกัน และไม่สอดคล้องกัน โดยใช้กฎของเหตุผล

8. วัตถุประสงค์

1. เพื่อให้นิสิตเข้าใจมโนทัศน์ (Concept) ต่าง ๆ ของตรรกศาสตร์สัญลักษณ์
2. เพื่อให้นิสิตรู้จักคิดอย่างมีเหตุผล สร้างนิสัยให้เป็นคนรักในการคิด
3. เพื่อให้นิสิตใช้สัญลักษณ์ได้อย่างถูกต้อง
4. เพื่อให้นิสิตพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลด้วยวิธีทดสอบแบบต่าง ๆ

9. วิธีการเรียนการสอน

1. บรรยาย
2. อภิปราย ซักถาม
3. การศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติม
4. กิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน
5. ทำแบบฝึกหัด

10. เอกสารประกอบการศึกษา

กีรติ บุญเจือ. (2531). *ตรรกวิทยาสัญลักษณ์เบื้องต้น*. กรุงเทพฯ: ไทยวัฒนาพานิช.

จำนงค์ ทองประเสริฐ. (2530). *ตรรกศาสตร์ ศิลปะแห่งการนิยามความหมายและการใช้เหตุผล* (พิมพ์ครั้งที่ 9).กรุงเทพฯ: มหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย.

ไม้ สงวนสกุล. (2541). *ตรรกวิทยาสัญลักษณ์เบื้องต้น*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

วิทยา ศักยาภินันท์. (2554). *ตรรกศาสตร์: ศาสตร์แห่งการใช้เหตุผล* (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

โสรัจจ์ หงศ์ลดารมภ์. (2544). *ตรรกวิทยาสัญลักษณ์.* กรุงเทพฯ: โครงการเผยแพร่ผลงานทางวิชาการ คณะอักษรศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อมร โสภณวิเชษฐวงษ์. (2531). *ตรรกวิทยานิรนัย* (พิมพ์ครั้งที่ 8). กรุงเทพฯ: หจก. โรงพิมพ์อักษรไทย.

Balasubramanian, P. (1977). *An Invitation to Symbolic Logic.* Madras : Rajan & Co.(Printers).

Balasubramanian, P. (1980). *Symbolic Logic and Its Decision Procedures.* Madras: Madras University.

Basson, A.H. and O' Connor, D.J. (1953). *Introduction to Symbolic Logic.* London: University Tutorial Press.

Berkeley, Edmund Callis. (1952). *A Summary of Symbolic Logic and Its Practical Applications.* New York: Edmund C. Berkeley and Associates.

Blumberg, Albert E. L. (1976). *Logic: A First Course.* New York: Alfred A Knopf.

Bonevac. Daniel. (2003). *Deduction: Introductory Symbolic Logic* (2nd Ed.). Oxford: Blackwell Publishing Company.

Chakraborti, Chhanda. (2007). *Logic: Informal Symbolic Logic And Inductive* (2nd Ed.). New Delhi: Prentice-Hall of India Private Limited.

Carney, James Donald. (1970). *Introduction to Symbolic Logic.* New Jersey: Prentice-Hall.

Cauman, Leigh S. (1998). *First-order Logic: An Introduction.* New York: de Gruyter.

Copi, Irving M. and Cohen, Carl. (1995). *Introduction to Logic* (9th Ed.). New Delhi: Prentice-Hall of India Private Limited.

Copi, Irving M. (1997). *Symbolic Logic* (5th Ed.). New Delhi: Prentice-Hall of India Private Limited.

Forbes, Graeme. (1994). *Modern logic: A Text in Elementary Symbolic Logic.* Oxford: Oxford University Press.

Gabbay, Dov M. and Woods, John (Ed.). (2004). *Handbook of the History of Logic Vollume 3: The Rise of Modern Logic from Leibniz to Frege.* Amsterdam: Elsevier.

Gensler, Harry J. (2002). *Introduction to Logic.* London: Routledge.

Gustason, William and Ulrich, Dolph E. (1989). *Elementary Symbolic Logic* (2nd Ed.). Illinois: Waveland Press, Inc.

Guttenplan and Tamney. (1971). *Logic : A Comprehensive Introduction.* New York: Basic Books Inc.

Haaparanta, Leila (Ed.). (2009). *The Development of Modern Logic.* New York: Oxford University Press.

Hardegree, Gary M. (1994). *Symbolic logic: A First Course* (2nd Ed.). New York: McGraw-Hill.

Irving, Lewis Clarence. (2009). *A Survey of Symbolic Logic.* Charleston: Bibliobazar.

Jain, Krishna. (1998). *Logic: An Introduction.* Delhi: Ajanta Books International.

Jeffrey, Richard C. (1967). *Formal Logic : Its Scope and Limits.* New York: Mc Graw Hill Book Company.

Langer, Susanne K. (1967). *An Introduction to Symbolic Logic.* New York: Dover Publications, Inc.

Lewis, Clarence Irving. (1918). *Survey of Symbolic Logic.* Berkley: University of Califonia Press.

Lewis, Clarence Irving and Langford, Cooper Harold. (1959). *Symbolic logic Vol. 2.* New York: Dover Publications.

Klenk, Virginia. (2008). *Understanding Symbolic Logic* (5th Ed.). New Jersey: Pearson Prentice Hall.

Kneale, William and Kneale, Martha. (1984). *The Development of Logic.* New York: Oxford University Press.

Lover, Robert. (2008). *Elementary Logic for Sorfware Development.* New York: Springer.

Martin, Robert M. (2004). *Introducing Symbolic Logic.* Ontario: Broadview Press.

Mendelson, Elliott. (1997). *Introduction to mathematical logic* (4th Ed.). Florida: Chapman and Hall.

Pollock, John L. (1969). *Introduction to Symbolic Logic.* Austin: Holt, Rinehart and Winston.

Popkin, Richard H. and Stroll, Avrum. (1993). *Philosophy Made Simple.* New York: Doubleday.

Resnik, Michael D. (1970). *Elementary Logic.* New York: McGraw-Hill.

Sainsbury, Mark.(2001). *Logical forms: An Introduction to Philosophical Logic.* (2nd Ed.). Oxford: Blackwell Publisher Limited.

Simpson, R. L. (1998). *Essentials of Symbolic Logic.* Ontario: Broadview Press.

Standley, Gerald B. (1971). *New Methods in Symbolic Logic.* California: Houghton Mifflin.

Thomassi, Pual. (1999). *Logic.* London: Routledge.

Tymoczko, Tom and Henle, Jim. (1995). *Sweet Reason: A Field Guide to Modern Logic.* New York: W. H. Freeman and Company.

Venn, John. (1971). *Symbolic Logic.* New York: Chelsea Publication.

11. งานที่มอบหมาย

1. ค้นคว้าตามที่อาจารย์แนะนำ

2. ทำแบบฝึกหัด

12. การประเมินผล

1. การเข้าชั้นเรียนและความเอาใจใส่ 10 %
2. การทำแบบฝึกหัด 10 %
3. กิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน 20 %
4. สอบระหว่างภาค 30 %
5. สอบปลายภาค 30 %

13. กำหนดการเรียนการสอน

สัปดาห์	**เนื้อหาวิชา**	**กระบวนการจัดการเรียนรู้**
1	แนะนำประมวลรายวิชาและแผนการเรียนการสอน	1. อาจารย์บรรยาย 2. แบ่งกลุ่มและมอบหมายงาน
2	**บทที่ 1** ความหมายของตรรกศาสตร์และความเป็นมาของตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ 1.1 ความหมายของตรรกศาสตร์ 1.2 ประเภทของตรรกศาสตร์ 1.3 ความเป็นมาของตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ 1.4 ประโยชน์ของตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ 1.5 ขอบเขตของตรรกศาสตร์สัญลักษณ์	1. อาจารย์บรรยาย 2. นิสิตแบ่งกลุ่มทำกิจกรรมร่วมกันในห้องเรียน 3. ตัวแทนกลุ่มนำเสนอผลการทำกิจกรรม 4. อาจารย์และนิสิตร่วมกันอภิปรายและสรุปผลของกิจกรรม 5. มอบหมายนิสิตทำแบบฝึกหัดบทที่ 1
2	**บทที่ 2 ค่าความจริงและความสมเหตุสมผล** 2.1 ค่าความจริง 2.2 ความสมเหตุสมผล	1. อาจารย์แจ้งจุดประสงค์บทที่ 2 2. นิสิตแบ่งกลุ่มทำกิจ กรรมร่วมกันในห้องเรียน 3. ตัวแทนกลุ่มนำเสนอผลการทำกิจกรรม 4. อาจารย์และนิสิตร่วมกันอภิปรายและสรุปผลของกิจกรรม 5. อาจารย์มอบหมายให้นิสิตทำแบบฝึกหัดประจำบทที่ 2
1	**บทที่ 3 ตรรกศาสตร์ว่าด้วยประพจน์** 3.1 ตรรกศาสตร์ว่าด้วยประพจน์	1. อาจารย์แจ้งจุดประสงค์บทที่ 3 และบรรยาย

	3.2 ความหมายของประพจน์ 3.3 ชนิดของประพจน์ 3.4 ตัวแปรและตัวคงที่ 3.5 ตัวเชื่อมและตัวขยาย	2. นิสิตศึกษาเอกสารประกอบการสอนบทที่ 3 3. นิสิตแบ่งกลุ่มทำกิจกรรมในห้องเรียน 4. ตัวแทนกลุ่มเสนอผลการทำกิจกรรม 5. อาจารย์และนิสิตร่วมกันอภิปรายและสรุปผลการศึกษา 6. อาจารย์มอบหมายให้นิสิตทำแบบฝึกหัดบทที่ 3
3	**บทที่ 4 ตารางความจริง** 4.1 ความหมายของตารางความจริง 4.2 ชนิดของตารางความจริงพื้นฐาน	1. อาจารย์แจ้งจุดประสงค์ประจำบทและแนะนำความหมายของตารางความจริง 2. นิสิตศึกษาเอกสารประกอบการสอนบทที่ 4 3. นิสิตแบ่งกลุ่มทำกิจกรรมในห้องเรียน 4. ตัวแทนกลุ่มเสนอผลของการทำกิจกรรมกลุ่ม 5. อาจารย์และนิสิตร่วมกันอภิปรายและสรุปการศึกษา 6. อาจารย์มอบหมายให้นิสิตทำแบบฝึกหัดบทที่ 4
4	**บทที่ 5 การถอดข้อความเป็นสัญลักษณ์และการใส่วงเล็บ** 5.1 การถอดข้อความเป็นสัญลักษณ์ 5.2 การใส่วงเล็บ	1. อาจารย์แจ้งจุดประสงค์ประจำบทและแนะนำการถอดประพจน์และการใส่วงเล็บ 2. นิสิตแบ่งกลุ่มทำกิจ กรรมในห้องเรียน 3. ตัวแทนกลุ่มเสนอผลการทำกิจกรรมของกลุ่ม 4. อาจารย์และนิสิตร่วมกันอภิปรายและสรุปผลการศึกษา 5. อาจารย์มอบหมายให้นิสิตทำ

		แบบฝึกหัดบทที่ 5
5-6	**บทที่ 6 วิธีพิสูจน์ประพจน์และข้ออ้างเหตุผล** 6.1 วิธีพิสูจน์ประพจน์และข้ออ้างเหตุผลชนิดต่างๆ 6.2 วิธีพิสูจน์แบบวิเคราะห์เฉพาะกรณี 6.3 วิธีพิสูจน์ประพจน์ด้วยตารางความจริงชนิดตรง 6.4 ประพจน์สัจนิรันดร์ ประพจน์ขัดแย้งและประพจน์ไม่แน่นอน 6.5 วิธีพิสูจน์ความเป็นสมภาคของประพจน์ซ้อน	1. อาจารย์แจ้งจุดประสงค์บทที่ 6 และแนะนำวิธีพิสูจน์แบบเฉพาะกรณีและวิธีพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดตรง 2. นิสิตแบ่งกลุ่มทำกิจกรรมในห้องเรียน 3. นิสิตแต่ละกลุ่มร่วมกันหาค่าความจริงจากโจทย์ที่กลุ่มอื่นกำหนดให้ 4. นิสิตแลกเปลี่ยนกันตรวจคำตอบโดยให้กลุ่มผู้ออกโจทย์เป็นผู้ตรวจ 5. อาจารย์มอบหมายให้นิสิตทำแบบฝึกหัดบทที่ 6
7	**บทที่ 7 วิธีพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดอ้อม** 7.1ความหมายของวิธีพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดอ้อม 7.2 วิธีพิสูจน์ประพจน์ด้วยตารางความจริงชนิดอ้อม 7.3 วิธีพิสูจน์ข้ออ้างเหตุผลด้วยตารางความจริงชนิดอ้อม	1. อาจารย์แจ้งจุดประสงค์บทที่ 7 และแนะนำวิธีพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดอ้อม 2. นิสิตแบ่งกลุ่มทำกิจกรรมในห้องเรียน 3. นิสิตแต่ละกลุ่มร่วมกันหาค่าความจริงจากโจทย์ที่กลุ่มอื่นกำหนดให้ 4. นิสิตแลกเปลี่ยนกันตรวจคำตอบโดยให้กลุ่มผู้ออกโจทย์เป็นผู้ตรวจ 5. อาจารย์มอบหมายให้นิสิตทำแบบฝึกหัดบทที่ 7
8	**สอบกลางภาค**	
9-10	**บทที่ 8 วิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยกฎการอนุมาน** 8.1 ความหมายของวิธีพิสูจน์แบบนิรนัย 8.2 กฎของการอนุมาน	1. อาจารย์แจ้งจุดประสงค์บทที่ 8 และแนะนำวิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยกฎการอนุมาน

	8.3 ตัวอย่างวิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยกฎการอนุมาน	2. นิสิตแบ่งกลุ่มทำกิจกรรมในห้องเรียน 3. นิสิตแลกเปลี่ยนกันตรวจคำตอบโดยให้กลุ่มผู้ออกโจทย์เป็นผู้ตรวจ 4. อาจารย์มอบหมายให้นิสิตทำแบบฝึกหัดบทที่ 8
11-12	**บทที่ 9 วิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยกฎการแทนที่** 9.1 ความหมายของวิธีพิสูจน์ด้วยกฎการแทนที่ 9.2 กฎการแทนที่ 9.3 ข้อแตกต่างระหว่างกฎการอนุมานและกฎการแทนที่ 9.4 ตัวอย่างวิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยกฎการแทนที่	1. อาจารย์แจ้งจุดประสงค์บทที่ 9 และแนะนำวิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยกฎการแทนที่ 2. นิสิตแบ่งกลุ่มทำกิจกรรมในห้องเรียน 3. นิสิตแลกเปลี่ยนกันตรวจคำตอบโดยให้กลุ่มผู้ออกโจทย์เป็นผู้ตรวจ 4. อาจารย์มอบหมายให้นิสิตทำแบบฝึกหัดบทที่ 9
13	**บทที่ 10 วิธีพิสูจน์ด้วยการทำให้ขัดแย้งกัน** 10.ความหมายของวิธีพิสูจน์ด้วยการทำให้ขัดแย้งกัน 10.2 ตัวอย่างวิธีพิสูจน์ด้วยการทำให้ขัดแย้งกัน	1. อาจารย์แจ้งจุดประสงค์บทที่ 10 และแนะนำวิธีพิสูจน์ด้วยการทำให้ขัดแย้งกัน 2. นิสิตแบ่งกลุ่มทำกิจกรรมในห้องเรียน 3. นิสิตแลกเปลี่ยนกันตรวจคำตอบโดยให้กลุ่มผู้ออกโจทย์เป็นผู้ตรวจ 4. อาจารย์มอบหมายให้นิสิตทำแบบฝึกหัดบทที่ 10
13	**บทที่ 11 วิธีพิสูจน์ด้วยการสมมติเงื่อนไข** 11.1 ความหมายของวิธีพิสูจน์ด้วยการสมมติเงื่อนไข 11.2 ตัวอย่างวิธีพิสูจน์ด้วยการสมมติเงื่อนไข	1. อาจารย์แจ้งจุดประสงค์บทที่ 11 และแนะนำวิธีพิสูจน์ด้วยการสมมติเงื่อนไข 2. นิสิตแบ่งกลุ่มทำกิจกรรมในห้องเรียน 3. นิสิตแลกเปลี่ยนกันตรวจ

		คำตอบโดยให้กลุ่มผู้ออกโจทย์เป็นผู้ตรวจ 4. อาจารย์มอบหมายให้นิสิตทำแบบฝึกหัดบทที่ 11
14-15	**บทที่ 12 ตรรกศาสตร์ภาคขยาย** 12.1 ความหมายของตรรกศาสตร์ภาคขยาย 12.2 สัญลักษณ์ที่ใช้ในตรรกศาสตร์ภาคขยาย 12.3 ชนิดของประพจน์ 12.4 ตัวแปรอิสระและตัวแปรติด 12.5 การตีความตัวบ่งปริมาณ 12.6 กฎการถอดและการใส่ปริมาณ 12.7 ตัวอย่างการพิสูจน์ความสมเหตุสมผล	1. อาจารย์แจ้งจุดประสงค์บทที่ 12 และแนะนำตรรกศาสตร์ภาคขยาย 2. นิสิตแบ่งกลุ่มทำกิจกรรมในห้องเรียน 3. นิสิตแลกเปลี่ยนกันตรวจคำตอบโดยให้กลุ่มผู้ออกโจทย์เป็นผู้ตรวจ 4. อาจารย์มอบหมายให้นิสิตทำแบบฝึกหัดบทที่ 6
16	**สอบปลายภาค**	

แผนการจัดการเรียนรู้บทที่ 1

เรื่อง ความหมายและความเป็นมาของตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ เวลา 3 ชั่วโมง

****

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

สามารถบอกความหมายของตรรกศาสตร์และตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ได้ และสามารถบอกพัฒนาการ ประโยชน์และประเภทของตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกความหมายของตรรกศาสตร์และตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ได้
2. บอกพัฒนาการและประโยชน์ของตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ได้
3. บอกประเภทของตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ได้

2. แนวคิดหลัก (สาระสำคัญ)

ตรรกศาสตร์ คือ วิชาที่ว่าด้วยหลักเกณฑ์แห่งการใช้เหตุผลอย่างถูกต้อง

ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ คือ วิชาที่ว่าด้วยกฎเกณฑ์การใช้เหตุผลโดยใช้สัญลักษณ์แทนข้อความที่มีความหมาย เพื่อป้องกันความผิดพลาดอันเกิดจากการใช้ภาษาธรรมดาที่มีความหมายกำ กวม

3. เนื้อหาสาระ

1. ความหมายของตรรกศาสตร์
2. การพิสูจน์ตรรกศาสตร์
3. ชนิดของตรรกศาสตร์
4. พัฒนาการของตรรกศาสตร์สัญลักษณ์
5. ประโยชน์ของตรรกศาสตร์สัญลักษณ์
6. ประเภทของตรรกศาสตร์สัญลักษณ์

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. อาจารย์บรรยายเกี่ยวกับความหมายและความเป็นมาของตรรกศาสตร์และตรรกศาสตร์สัญลักษณ์
2. นิสิตแบ่งกลุ่มเป็น 3 กลุ่ม โดยให้แต่ละกลุ่มศึกษาประเด็นดังนี้
   - กลุ่มที่ 1 ศึกษาพัฒนาการของตรรกศาสตร์สัญลักษณ์
   - กลุ่มที่ 2 ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตรรกศาสตร์สัญลักษณ์กับคณิตศาสตร์
   - กลุ่มที่ 3 ศึกษาสัญลักษณ์และตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ในชีวิตประจำวัน
3. ตัวแทนของนิสิตแต่ละกลุ่มนำเสนอผลการศึกษาของกลุ่ม
4. อาจารย์และนิสิตร่วมกันอภิปรายและสรุปผลการศึกษาอีกครั้งหนึ่ง

5. นิสิตทำแบบฝึกหัดประจำบทที่ 1
6. อาจารย์และนิสิตร่วมกันเฉลยแบบฝึกหัด
7. นิสิตสรุปจดบันทึกลงในสมุดของนิสิต

5. แหล่งการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอนวิชา ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์บทที่ 1
2. แบบฝึกหัดบทที่ 1
3. Power-point

6. กระบวนการวัดผลและประเมินผล

1. การร่วมกันสรุป, อภิปรายและตอบคำถาม
2. การตอบคำถามในแบบฝึกหัด
3. การสรุปจดบันทึกของนิสิต
4. เอกสารแบบฝึกหัด

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

(..)

อาจารย์สอน

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

....

....

บทที่ 1
ความหมายและความเป็นมาของตรรกศาสตร์สัญลักษณ์

1.1 ความหมายของตรรกศาสตร์

ตรรกศาสตร์ (Logic) คือ ศาสตร์แห่งการใช้เหตุผล (Science of Reasoning) เป็นการแสวงหาความจริงด้วยการพิสูจน์ ยืนยันข้ออ้างเหตุผล เริ่มจากข้ออ้างซึ่งเป็นข้อความที่เราแน่ใจไปสู่ข้อสรุปซึ่งเรายังไม่รู้ว่าสมเหตุสมผลหรือไม่ จุดหมายของตรรกศาสตร์ก็เพื่อจะจัดหาวิธี เทคนิคและเครื่องมือที่จะช่วยแยกแยะการใช้เหตุผลที่ถูกต้องออกจากการใช้เหตุผลที่ผิด หรือการใช้เหตุผลที่ดีกับการใช้เหตุผลที่ไม่ดี แต่นั่นก็มิได้หมายความว่า เฉพาะคนที่เรียนตรรกศาสตร์เท่านั้นที่สามารถใช้เหตุผลได้อย่างถูกต้อง อย่างไรก็ตามที่แน่ๆ ก็คือ คนที่เรียนตรรกศาสตร์จะให้เหตุผลได้ดีและผิดพลาดน้อยกว่าคนที่ไม่ได้เรียน เปรียบเหมือนนักกีฬาที่ฝึกฝนจนชำชองย่อมจะเล่นได้ดีกว่านักกีฬาที่มิได้ฝึกฝนมา ทำนองเดียวกัน คนที่คุ้นเคยกับหลักการทางตรรกศาสตร์ก็มักจะให้เหตุผลได้ดีกว่า การรู้เรื่องตรรกศาสตร์จะช่วยให้เราเผชิญปัญหาในลักษณะที่เป็นระเบียบและระบบมากกว่า และในหลายๆ กรณีก็ทำให้เราแก้ปัญหาได้ง่ายกว่าและแน่นอนกว่า

คนที่รู้ตรรกศาสตร์จะใช้เหตุผลได้ดี และอ้างเหตุผลได้แจ่มแจ้ง นอกจากนั้นยังสามารถจะให้คำจำกัดความและโต้แย้งได้ดีอีกด้วย ตรรกศาสตร์จะช่วยให้เราใช้เหตุผลและตัดสินใจได้อย่างถูกต้อง คำกล่าวที่ว่า “การลงมือทำจะทำให้คนเป็นคนสมบูรณ์” ใช้ได้กับทุกศิลป์ และก็เป็นจริงสำหรับตรรกศาสตร์ด้วย

บ่อยครั้งที่นักตรรกศาสตร์จะนิยามความหมายของตรรกศาสตร์ว่า คือ การศึกษากฎแห่งความคิด (the Study of Law of Thought) โดยเฉพาะนักตรรกศาสตร์สมัยโบราณมักจะเชื่อว่า กฎที่จำเป็นสำหรับการให้เหตุผลได้อย่างถูกต้องนั้นมีอยู่ 3 ประการคือ

1. กฎของความเป็นเอกลักษณ์ (Law of Identity)
2. กฎของความไม่ขัดแย้งกัน (Law of Non-contradiction)
3. กฎของความไม่มีตัวกลาง (Law of Excluded Middle)

1. กฎความเป็นเอกลักษณ์ กฎนี้มีความหมายว่า “สรรพสิ่งย่อมเป็นอย่างที่มันเป็น” ตัวอย่าง เช่น ก คือ ก, ดอกกุหลาบคือดอกกุหลาบ, ถ้าฝนตกแล้วฝนตก เป็นต้น

กฎนี้ฟังดูแล้วจะเหมือนกับการกล่าวซ้ำความแบบว่างเปล่า คือ ใช้คำซึ่งซ้ำกับสิ่งเดิมอย่างไม่น่าปรารถนา แต่ข้อสำคัญที่กฎนี้เน้นย้ำก็คือ คำที่ใช้ในประพจน์ควรจะมีความหมายคงเดิมไปตลอดข้ออ้างเหตุผล นอกจากนั้นแล้ว ถ้าประพจน์หนึ่งเป็นจริงในข้ออ้างเหตุผลหนึ่งแล้ว ประพจน์นั้นจะต้องเป็นจริงไปตลอดข้ออ้างเหตุผลนั้น และถ้าประพจน์หนึ่งเป็นเท็จในข้ออ้างเหตุผลหนึ่งแล้ว ประพจน์นั้นก็จะต้อง

เป็นเท็จไปตลอดข้ออ้างเหตุผลนั้น หาไม่แล้วประพจน์เดียวกันก็จะเป็นได้ทั้งจริงและเท็จ ตัวอย่างเช่น คำว่า "ดอกกุหลาบ" ในในข้ออ้างจะต้องมีความหมายเดียวกันกับคำว่า "ดอกกุหลาบ"ในข้อสรุป หรือประพจน์ว่า "วันนี้เป็นวันอาทิตย์" ในข้ออ้างที่เป็นเงื่อนไขจะต้องมีความหมายเดียวกันกับประพจน์ว่า "วันนี้เป็นวันอาทิตย์" ในข้อสรุปที่เป็นผลตามมา (ข้ออ้างเหตุผลสมบูรณ์ของตัวอย่างนี้คือ

ข้ออ้างที่ 1 ถ้าวันนี้เป็นวันอาทิตย์แล้ว, พรุ่งนี้จะเป็นวันจันทร์

ข้ออ้างที่ 2 พรุ่งนี้เป็นวันจันทร์

ข้อสรุป เพราะฉะนั้น วันนี้เป็นวันอาทิตย์)

2. **กฎความไม่ขัดแย้งกัน** กฎนี้มีความหมายว่า "สิ่งๆ หนึ่งไม่สามารถที่จะทั้งเป็นและไม่เป็นสิ่งหนึ่งในขณะเดียวกัน" หรือ "สิ่งเดียวกันไม่สามารถจะเป็นทั้งจริงและเท็จในขณะเดียวกันได้"เช่น ก ไม่สามารถจะเป็น ข และไม่เป็น ข (ในขณะเดียวกัน) ได้ ดอกกุหลาบก็ไม่สามารถจะมีสีแดงและไม่มีสีแดงในขณะเดียวกัน กฎของความไม่ขัดแย้งกันนี้จะเป็นการเน้นกฎความเป็นเอกลักษณ์นั่นเอง

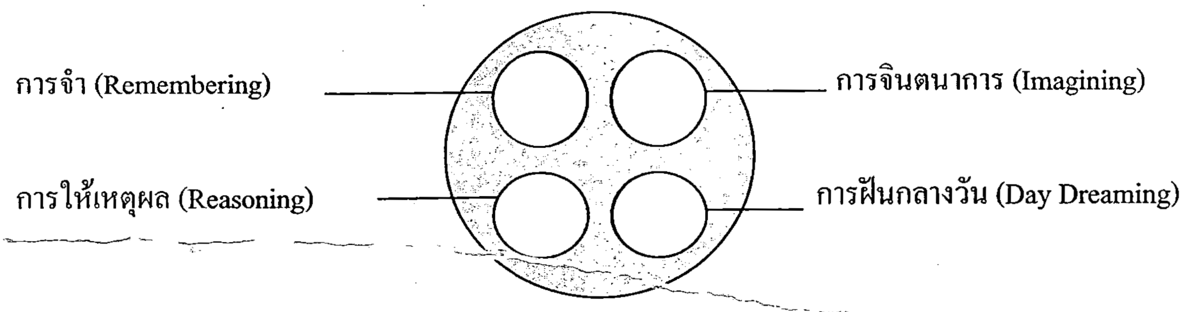
3. **กฎความไม่มีตัวกลาง** กฎนี้หมายความว่า "สิ่งๆ หนึ่งต้องเป็นหรือไม่เป็นอะไรสักอย่างหนึ่ง" เช่น ก จะต้องเป็น ข หรือ ไม่เป็น ข อย่างใดอย่างหนึ่ง ดอกกุหลาบจะต้องมีสีแดง หรือไม่มีสีแดงอย่างใดอย่างหนึ่ง กฎนี้จะยืนยันว่าไม่มีตัวกลางใดๆ แทรกระหว่างตำแหน่งที่ขัดแย้งกัน 2 ประพจน์ที่ขัดแย้งกันนั้นไม่สามารถจะผิดด้วยกันทั้งคู่ได้ ถ้าประพจน์หนึ่งผิด ประพจน์หนึ่งก็จะต้องถูก ไม่มีตัวกลางใดๆ นอกจาก 2 ประพจน์นี้ให้เลือกอีก

กฎแห่งความคิด 3 ประการนี้ถือกันว่าเป็นหลักการพื้นฐานของการสร้างตารางความจริงซึ่งเราจะศึกษาในรายละเอียดในบทต่อไป เพราะในการสร้างตารางความจริง หากเราใส่ T ภายใต้สัญลักษณ์ที่ให้มาในช่องแรกแล้ว ช่องถัดมาของสัญลักษณ์นั้นก็ใส่ T นั่นแสดงว่า เราใช้กฎของความเป็นเอกลักษณ์ หากเราใส่ T หรือ F ด้วยกัน ในช่องแรกนั่นแสดงว่า เราใช้กฎของความไม่มีตัวกลาง ในตารางความจริงนั้น เราจะไม่ใส่ T และ F ด้วยกันซึ่งเป็นการขัดแย้งกัน

แม้ว่ากฎแห่งความคิด 3 ประการนี้จะจำเป็นยิ่งยวดสำหรับการใช้เหตุผลอย่างถูกต้องก็ตาม แต่ก็ยังมีกฎอื่นๆ ที่มีความสำคัญเท่าเทียมกันต่อการใช้เหตุผลอย่างสมเหตุผล ตัวอย่างเช่น กฎของการอนุมานชนิดต่างๆ และกฎของการนิรนัยชนิดอื่นๆ

ยิ่งไปกว่านั้น ในการนิยามตรรกศาสตร์ว่าเป็นศาสตร์ว่าด้วยกฎแห่งความคิดนั้น คำว่า "ความคิด" บ่งถึงการคิด บ่งถึงกระบวนการทางจิต และกิจกรรมของจิต แม้ว่าการใช้เหตุผลจะเป็นการสะท้อนความคิด คือเป็นกิจกรรมทางจิต มิใช่กิจกรรมทางกายหรือวาจา เหมือนการเดิน การพูด เป็นต้นก็ตาม แต่กิจกรรมทางจิตทุกอย่างก็มิใช่การใช้เหตุผลไปเสียทั้งหมด กิจกรรมทางจิตนั้นมีมากมาย การใช้เหตุผลเป็นเพียงหนึ่งในหลากหลายกิจกรรมเหล่านั้นเท่านั้น กล่าวอีกนัยหนึ่ง ก็คือ การใช้เหตุผลเป็นเพียงกิจกรรมหนึ่งของกระบวนการทางจิต การใช้เหตุผลทุกครั้งเป็นกระบวนการทางจิต แต่กระบวนการทางจิตทุกอย่างมิใช่การใช้เหตุผล แผนภูมิต่อไปนี้จะช่วยให้เราเข้าใจการใช้เหตุผลและกระบวนการทางจิตได้อย่างชัดเจน

กระบวนการทางจิต (Mental Process)



ความจำ จินตนาการ และความฝัน คือ กระบวนการทางจิตชนิดต่างๆ แต่ไม่มีกระบวนการใดที่กล่าวมาเป็นการะบวนการแห่งการใช้เหตุผลเลย การใช้เหตุผลเป็นความคิดชนิดพิเศษ เป็นกิจกรรมทางจิตชนิดพิเศษ เมื่อความคิดหนึ่งสัมพันธ์กับความคิดอีกชนิดหนึ่ง การที่เราล้วงเอาบทสรุปที่ได้จากความสัมพันธ์ของความคิดทั้งสองนั้นแหละคือการใช้เหตุผล เพราะการใช้เหตุผลจะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อมีพื้นฐานหรือบทเสนอบางอย่างที่บ่งถึงบทสรุป เพราะฉะนั้น การนิยามตรรกศาสตร์ว่าคือ ศาสตร์แห่งกฎว่าด้วยความคิดจึงเป็นคำนิยามที่กว้างเกินไป

ทางที่ดีเราควรจะนิยามตรรกศาสตร์ว่า คือ ศาสตร์แห่งการใช้เหตุผลอย่างถูกต้อง อย่างไรก็ตาม นักตรรกศาสตร์จะไม่ไปเกี่ยวข้องกับการใช้เหตุผลทุกด้าน ตัวอย่างเช่น นักตรรกศาสตร์จะไม่เกี่ยวข้องกับการใช้เหตุผลที่เป็นกระบวนการทางจิตจริงๆ นักตรรกศาสตร์จะสนใจเฉพาะความถูกต้องหรือไม่ถูกต้องของการใช้เหตุผลเท่านั้น คือ จะมองการใช้เหตุผลจากมุมมองของความสมเหตุสมผลของการใช้เหตุผลเท่านั้น ส่วนนักจิตวิทยาจะศึกษาการใช้เหตุผลจากมุมมองที่แตกต่างไป นั่นคือ จะศึกษากระบวนการทางจิตทุกชนิด และในความหมายนี้ นักจิตวิทยาจะศึกษาการใช้เหตุผลในฐานะที่เป็นกระบวนการทางจิตต่างๆ แต่ความสนใจของนักจิตวิทยาจะอยู่ที่กระบวนการทางจิตจริงๆ ในขณะที่การใช้เหตุผลเกิดขึ้นที่จิตของมนุษย์ นักจิตวิทยาจะไม่ใส่ใจความถูกหรือความผิดของการใช้เหตุผลเลยแม้แต่น้อย จุดหมายของนักตรรกศาสตร์จะอยู่ที่ความถูกต้องของการอ้างเหตุผลเท่านั้น ดังนั้น มุมมองของนักตรรกศาสตร์จึงแตกต่างจากมุมมองของนักจิตวิทยา นักจิตวิทยาจะสนใจประเด็นว่า เราใช้เหตุผลจริงๆ อย่างไร ทำไมจึงใช้เหตุผลดังนั้น การศึกษาของนักจิตวิทยาจึงเป็นการศึกษาข้อเท็จจริง แต่นักตรรกศาสตร์จะสนใจประเด็นว่า เราควรจะใช้เหตุผลอย่างถูกต้องอย่างไร นักตรรกศาสตร์จะถือว่า รูปแบบมาตรฐานและกฎเกณฑ์ของการใช้เหตุผลที่ถูกต้องเป็นเรื่องสำคัญ เพราะนักตรรกศาสตร์จะสนใจการพัฒนาอุปนิสัยแห่งการใช้เหตุผลของคนมากกว่า

เพื่อที่จะแสดงให้เห็นชัดว่า การใช้เหตุผลนั้นแตกต่างจากกิจกรรมทางจิตต่างๆ อย่างไร การยกตัวอย่างในชีวิตประจำวันน่าจะเป็นประโยชน์มากในเรื่องนี้ (Richard H. Popkin and Avrum Stroll, 1993, pp. 237 – 238)

สมมติว่า เรามีนัดกับเพื่อนรักของเราอีก 1 ชั่วโมงข้างหน้าต่อจากเวลานี้ไป ณ สถานที่แห่งหนึ่ง ห่างจากจุดที่เราอยู่ประมาณ 26 กิโลเมตร เมื่อคิดทบทวนดูว่า เราจะไปยังจุดหมายได้อย่างไร เรามีทางเลือกอยู่ 2 ทาง คือ 1) เดินไป และ 2) ขึ้นรถโดยสารประจำทางไป (เนื่องจากว่าเราไม่มีรถส่วนตัว) แต่เราเคยรับราชการทหารมา พอจะรู้ว่า เราสามารถจะเดินได้เร็วที่สุดอย่างมากได้ไม่เกิน 6 กิโลเมตรต่อชั่วโมง แต่เนื่องจากจุดหมายปลายทางที่นัดพบกับเพื่อนห่างจากจุดที่เราอยู่ขณะนี้ 26 กิโลเมตร และจะต้องไปถึงที่นั่นภายในเวลา 1 ชั่วโมง หากเราตัดสินใจเดินไป ย่อมจะไปไม่ทันเวลาแน่นอน เพราะฉะนั้น หากฉันต้องการจะไปให้ถึงที่นั้นให้ทันเวลา ฉันต้องตัดสินใจเดินทางด้วยรถประจำทาง รถประจำทางเที่ยวต่อไปจะมาถึงในอีก 10 นาทีข้างหน้า และจะใช้เวลาเดินทางกว่าจะถึงสถานที่นัดหมายอีกประมาณ 50 นาที ดังนั้น ฉันจึงลงความเห็นว่า ฉันจะไปทันเวลานัดหมายเมื่อเดินทางด้วยรถโดยสารประจำทาง

ขอให้เราลองพิจารณาดูตัวอย่างดังกล่าวอย่างใกล้ชิดและละเอียดกว่านี้ เพื่อที่จะแสดงให้เห็นว่า ทำไมต้องอย่างนี้จึงเป็นการใช้เหตุผล เราเริ่มจากการตั้งปัญหาถามตัวเองว่า เราจะไปถึงจุดหมายที่นัดพบได้ภายใน 1 ชั่วโมง โดยวิธีการใดได้บ้าง? อันดับแรก เราตั้งคำถามว่า เราพอจะไปถึงที่นัดหมายทันเวลาโดยใช้วิธีเดินไปได้ไหม? เราตกลงใจว่า เราไม่สามารถจะเดินไปทันเวลาได้ เหตุผลก็คือว่า ระยะทางไกลตั้ง 26 กิโลเมตร และเราก็ต้องไปให้ถึงจุดหมายภายใน 1 ชั่วโมง แต่ฉันมาคำนวณดูแล้วรู้ว่าตัวเองมีความสามารถพอจะเดินได้ด้วยความเร็วอย่างมากไม่เกิน 6 กิโลเมตรต่อชั่วโมง นี่แหละคือหลักฐานสนับสนุนการสรุปของเราที่ว่า เราไม่สามารถจะเดินไปยังที่นัดพบได้ทันเวลา ในทางกลับกัน เราก็มีเหตุผลต่อไปนี้สนับสนุนการตัดสินใจของเราคือ รถโดยสารประจำทางเที่ยวต่อไปจะมาถึงภายใน 10 นาทีข้างหน้า และจะใช้เวลาเดินทางไปยังจุดหมายประมาณ 50 นาที เรานัดหมายเพื่อนไว้อีกประมาณ 1 ชั่วโมงข้างหน้า เพราะฉะนั้น การตัดสินใจไปด้วยรถประจำทางจึงเป็นหลักฐานที่มีเหตุผลเพียงพอสำหรับการตัดสินใจที่ถูกต้องของเรา

คำว่า ตรรกศาสตร์ เป็นคำที่มาจากภาษาสันสกฤตว่า ตรฺก (ตรึกตรอง) สมาสกับคำว่า ศาสฺตร หรือ วิทฺยา ตรงกับคำภาษาบาลีว่า ตกฺก + วิชฺชา ซึ่งแปลว่า วิชาหรือศาสตร์ที่ว่าด้วยการตรึกตรอง คำนี้เป็นศัพท์บัญญัติเพื่อให้ตรงกับคำภาษาอังกฤษว่า Logic ซึ่งมาจากรากศัพท์เดิมที่เป็นภาษากรีกว่า Logos แปลว่า คำพูด ซึ่งจริงๆ แล้วก็มีความหมายไม่ตรงกับคำว่า Logic เสียทีเดียว

1.2 ประเภทของตรรรกศาสตร์

ดังที่เราได้กล่าวเกริ่นไว้ตั้งแต่แรกว่า ตรรกศาสตร์นั้นจะเกี่ยวข้องกับเรื่องการใช้เหตุผล เหตุผลอยู่ที่ไหน? เหตุผลก็อยู่ในความคิดนั่นเอง ความคิดนั้นเกิดขึ้นมาพร้อมกับมนุษย์ เมื่อมนุษย์มีความคิดก็แสดงความคิดของตนออกมา โดยใช้ภาษาเป็นสื่อความหมายของความคิด เมื่อการพูดภาษาที่แสดงเหตุผลจำต้องมีลักษณะ 2 ประการ คือ ข้อความหนึ่งจะต้องสนับสนุนอีกข้อความหนึ่ง ข้อความที่สนับสนุนหรือส่วนที่เป็นเหตุผล เรียกว่า *ข้ออ้าง* (Premise) และข้อความที่ถูกสนับสนุน เรียกว่า *ข้อสรุป* (Conclusion) ซึ่งเป็นการใช้ภาษาให้มีข้อความหนึ่งสนับสนุนอีกข้อความหนึ่ง ซึ่งเรียกว่า การอ้างเหตุผล (Reasoning) การอ้าง

เหตุผลมี 2 ชนิด คือ การอ้างเหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) และการอ้างเหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning)

1. **การอ้างเหตุผลแบบนิรนัย** คือ การอ้างเหตุผลโดยเริ่มจากประพจน์ทั่วไปที่แน่ใจก่อนเพื่อไปสนับ สนุนประพจน์ที่ยังไม่แน่ใจทีหลัง หรือเป็นการอ้างเหตุผลที่เริ่มจากความรู้เดิมที่มีอยู่แล้ว หรือที่เราเชื่อว่าเป็นจริงอยู่แล้วไปสนับสนุนความรู้ใหม่ เรามีความรู้เดิมอยู่อย่างหนึ่ง เราก็สามารถหาความรู้ใหม่จากความรู้เดิมได้ โดยไม่ต้องอาศัยประสบการณ์เลย เช่น 10 – 7 = 3 หรือ แดงเป็นลุงของดี ดังนั้น แดงเป็นผู้ชาย การหาความรู้แบบนี้ เรียกว่า การหาความรู้แบบนิรนัย (Deduction)

2. **การอ้างเหตุผลแบบอุปนัย** คือ การพิสูจน์โดยการอ้างหลักฐานจากประสบการณ์เฉพาะหน่วยไปสู่ข้อความทั่วไปที่ยังไม่แน่ใจ เช่น เราเห็นลังไม้ลอยน้ำได้ ไม้ซุงก็ลอยน้ำได้ เราใช้ประสบการณ์เฉพาะหน่วยหลายๆ ครั้ง แล้วเราก็สรุปเป็นความรู้ทั่วไปเกี่ยวกับไม้นั้นว่า ไม้ลอยน้ำได้ หรือ เราเห็นนายทองดีตาย แล้วเห็นนางสมศรีตาย หลังจากนั้นไม่นานก็เห็นนายทองก้อนประสบอุบัติเหตุตาย และเห็นคนอื่นๆ อีกมากมายตาย เราก็เลยสรุปว่า คนทุกคนต้องตาย การอ้างเหตุผลลักษณะนี้ เรียกว่า การหาความรู้แบบอุปนัย (Induction)

การอ้างเหตุผลแบบนิรนัย	สากล	→	บางส่วน
	ความรู้เดิม	→	ความรู้ใหม่
การอ้างเหตุผลแบบอุปนัย	บางส่วน	→	สากล
	ประสบการณ์เฉพาะหน่วย	→	ข้อความทั่วไป

1.3 ความเป็นมาของตรรกศาสตร์สัญลักษณ์

ตรรกศาสตร์สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภทใหญ่ คือ

1. ตรรกศาสตร์ธรรมดาหรือตรรกศาสตร์ดั้งเดิม (Traditional Logic)
2. ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ (Symbolic Logic)

เมื่อพูดถึงตรรกศาสตร์ธรรมดาหรือดั้งเดิม อริสโตเติลได้รับยกย่องให้เป็นนักตรรกศาสตร์คนแรกที่ได้นำตรรกศาสตร์มาใช้เป็นระบบ และมีการใช้สัญลักษณ์ในตรรกศาสตร์ของท่านบ้างแล้วแต่ยังไม่แพร่หลายและเด่นชัดมากนัก ดังจะเห็นได้จากอริสโตเติลได้ใช้อักษร A, E, I, O แทนญัตติทั้ง 4 ตามลำดับต่อไปนี้

1. ประพจน์ยืนยันทั่วไป (A) ภาษาอังกฤษเรียกว่า Universal Affirmative เช่น All S is P.
2. ประพจน์ปฏิเสธทั่วไป (E) ภาษาอังกฤษเรียกว่า Universal Nagative เช่น No S is P.
3. ประพจน์ยืนยันบางส่วน (I) ภาษาอังกฤษเรียกว่า Particular Affirmative เช่น Some S is P.
4. ประพจน์ปฏิเสธบางส่วน (O) ภาษาอังกฤษเรียกว่า Particular Negative เช่น Some S is not P.

ส่วนตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ คือ วิชาที่ว่าด้วยกฎเกณฑ์การใช้เหตุผลโดยใช้สัญลักษณ์แทนข้อความที่มีความหมาย เหมือนวิชาพีชคณิตซึ่งใช้สัญลักษณ์แทนจำนวนใดก็ได้ของเลขคณิต และตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ก็จะใช้สัญลักษณ์แทนข้อความที่มีความหมายใดๆก็ได้ของตรรกศาสตร์ทั่วไป นักปรัชญาที่มีส่วนสำคัญในการพัฒนาตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ก็มี ยอร์จ บูล (George Boole: 1815-1864 A.D.) ออกัสตัส เดอ มอร์แกน (Augustus de Morgan: 1806-1871 A.D.) ชาลส์ แซนเดอร์ เพิร์ซ (Charles Sander Peirce: 1839-1914 A.D.) นักปรัชญาที่มีบทบาทสำคัญและได้รับยกย่องให้เป็นบิดาแห่งตรรกศาสตร์สัญลักษณ์คือ เบอร์ทรัลด์ รัสเซลล์ (Bertrand Russell: 1872-1970 A.D.) ชาวอังกฤษซึ่งมีชีวิตอยู่ในช่วงศตวรรษที่ 20 ท่านได้แต่งหนังสือร่วมกับนักปรัชญาอีกท่านหนึ่งมีชื่อว่าไวท์เฮด(A. N. Whitehead) หนังสือเล่มนั้นมีชื่อว่า "หลักคณิตศาสตร์" (Principia Mathematica) นอกจากนั้นก็มีนักปรัชญาอีกหลายท่านได้พัฒนาตรรกศาสตร์สัญลักษณ์มาโดยลำดับ เช่น ก็อทท์ล็อบ เฟรเก (Gottlob Frege: 1848 – 1925 A.D.) นักปรัชญาชาวเยอรมันและลุดวิก วิทท์เกนสไตน์ (Ludwig Wittgenstein: 1889 – 1951 A.D.) นักปรัชญาชาวออสเตรีย เป็นต้น

1.4 ประโยชน์ของตรรกศาสตร์สัญลักษณ์

ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ใช้ในการตัดสินความสมเหตุสมผลของคำพูดหรือความคิดนั้นก็เหมือนกันกับประโยชน์ของพีชคณิต ซึ่งใช้ในการคำนวนเลขคณิตนั่นเอง ความสมเหตุสมผลของคำพูดหรือความคิดก็ดำเนินตามกฎเกณฑ์ที่นักตรรกศาสตร์ค้นคว้ามาได้ คำพูดหรือความคิดนั้นจึงจะสมเหตุสมผล ถ้าคำพูดหรือความคิดนั้นฝ่าฝืนกฎเกณฑ์ใดกฎเกณฑ์หนึ่ง ก็จะไม่สมเหตุสมผล

ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ในฐานะที่เป็นระบบแบบนิรนัย (A Formal Deductive System) ซึ่งมีภาษาและศัพท์เป็นของตนเอง บางครั้งเรียกว่าภาษาอุดมคติ (Ideal Language) ซึ่งบรรจุกฎเกณฑ์ที่สมควรได้รับและไม่สมควรได้รับ กล่าวคือกฎเกณฑ์ที่ให้ไว้เป็นกฎเกณฑ์ที่มีประสิทธิภาพ เพื่อตัดสินว่ากฎเกณฑ์ที่ให้ไว้เป็นกฎเกณฑ์ที่สมเหตุสมผลหรือไม่ ซึ่งเรียกว่า ปัญหาของการตัดสิน เช่น การพิสูจน์แบบตารางความจริงทั้งชนิดตรงและชนิดอ้อม การพิสูจน์แบบนิรนัยโดยการใช้กฎ เป็นต้น

1.5 ขอบเขตของตรรกศาสตร์สัญลักษณ์

ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์เป็นตรรกศาสตร์นิรนัย (Deductive Logic) แบ่งออกเป็น 3 สาขาคือ

1. ตรรกศาสตร์ว่าด้วยประพจน์ (Propositional Logic) เป็นตรรกศาสตร์ที่เน้นพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์และความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผล มีกระบวนการพิสูจน์ที่นำมาใช้เพื่อหาค่าความจริงของประพจน์และความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลดังกล่าวซึ่งเรียกว่า ขบวนการการตัดสิน (Decision Procedure) มีการพิสูจน์แบบการวิเคราะห์เฉพาะกรณี การพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดตรง เป็นต้น เป็นการพิสูจน์ญัตติหรือข้ออ้างเหตุผลจากความสัมพันธ์ภายนอก

2. ตรรกศาสตร์ภาคขยาย (Predicate Logic) เป็นตรรกศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับโครงสร้างภายในของประพจน์หรือข้ออ้างเหตุผล ซึ่งถ้าเราพิสูจน์แบบตรรกศาสตร์ว่าด้วยประพจน์แล้วจะผิดพลาดได้ ดังนั้น

ตรรกศาสตร์ว่าด้วยภาคขยายจึงมีความสำคัญที่ช่วยเสริมตรรกศาสตร์ว่าด้วยญัตติเป็นอย่างมาก โดยจะเน้นที่ความสัมพันธ์ภายในของประพจน์เดี่ยวและประพจน์ซ้อน ซึ่งจะมีกฎของการพิสูจน์แตกต่างไปจากตรรกศาสตร์ว่าด้วยประพจน์บ้าง แต่ก็สามารถนำวิธีการพิสูจน์บางชนิดที่ใช้ในตรรกศาสตร์ว่าด้วยประพจน์มาพิสูจน์ได้เช่นกัน เช่น การพิสูจน์ด้วยวิธีต้นไม้ความจริง เป็นต้น

3. **ตรรกศาสตร์ว่าด้วยสัจพจน์** (Axiomatic Method) เป็นตรรกศาสตร์ที่มีวิธีการพิสูจน์โดยสัจพจน์ เพื่อหาความอิสระ (Independence) ความตรงกัน (Consistency) และความสมบูรณ์ (Completeness) ของตรรกศาสตร์ทุกระบบ

ในเอกสารประกอบการสอนนี้จะศึกษาตรรกศาสตร์สัญลักษณ์เฉพาะ 2 สาขาแรกเท่านั้น

แบบฝึกหัดบทที่ 1

1. อะไรคือตรรกศาสตร์ มีความเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันอย่างไร?

2. ตรรกศาสตร์แตกต่างจากกระบวนการทางจิตอย่างไร? จงอธิบายให้เข้าใจ

3. ตรรกศาสตร์นิรนัยแตกต่างจากตรรกศาสตร์อุปนัยอย่างไร? จงยกตัวอย่างประกอบ

4. ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์จัดอยู่ในประเภทตรรกศาสตร์นิรนัยหรืออุปนัย? จงแสดงเหตุผลพร้อมกับตัวอย่าง

5. ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์มีวิวัฒนาการมาอย่างไร? ใครที่ได้รับฉายาว่าเป็นบิดาแห่งตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ เพราะเหตุใด?

6. ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์มีประโยชน์อย่างไร? จำเป็นที่จะต้องเรียนหรือไม่?

7. กฎของความคิดมีความสำคัญต่อตรรกศาสตร์หรือไม่? จงชี้แจงด้วยเหตุผล

8. การอ้างเหตุผลที่สมบูรณ์ต้องประกอบด้วยองค์ประกอบสำคัญอะไรบ้าง?

แผนการจัดการเรียนรู้บทที่ 2

เรื่อง ค่าความจริงและความสมเหตุสมผล **เวลา 3 ชั่วโมง**

****

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นิสิตสามารถบอกค่าความจริงของประพจน์ สามารถจำแนกความแตกต่างระหว่างค่าความจริงกับความสมเหตุสมผล และสามารถบอกความสัมพันธ์ระหว่างค่าความจริงกับความสมเหตุสมผลได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกค่าความจริงของประพจน์ได้
2. จำแนกความแตกต่างระหว่างค่าความจริงกับความสมเหตุสมผลได้
3. บอกความสัมพันธ์ระหว่างค่าความจริงกับความสมเหตุสมผลได้
4. บอกได้ว่าข้ออ้างเหตุผลจะสมเหตุสมผลได้กี่กรณี

2. แนวคิดหลัก (สาระสำคัญ)

ค่าความจริง คือ ค่าที่บ่งบอกความสัมพันธ์ระหว่างประพจน์กับความจริง (ข้อเท็จจริง) และสามารถบอกได้ว่าจริงหรือเท็จ

ความสมเหตุสมผล คือ วิธีการประเมินหรือพิสูจน์ความถูกต้องของข้ออ้างเหตุผล (Argument)

3. เนื้อหาสาระ

1. ค่าความจริง
2. ความสมเหตุสมผล

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. อาจารย์แจ้งจุดประสงค์ให้นิสิตทราบ
2. นิสิตแบ่งกลุ่มเป็น 4 กลุ่ม โดยให้แต่ละกลุ่มศึกษาประเด็นดังนี้

    กลุ่มที่ 1 ช่วยกันหาตัวอย่างประพจน์ที่บ่งค่าความจริงที่เป็นจริง 10 ประพจน์ และประพจน์ที่บ่งบอกค่าความจริงที่เป็นเท็จ 10 ประพจน์

    กลุ่มที่ 2 ช่วยกันหาตัวอย่างข้อความที่ไม่บ่งบอกค่าความจริงมา 10 ข้อความ

    กลุ่มที่ 3 ช่วยกันหาตัวอย่างข้ออ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผลให้ได้ 10 ข้ออ้างเหตุผล

    กลุ่มที่ 4 ช่วยกันหาตัวอย่างข้ออ้างเหตุผลที่ไม่สมเหตุสมผลให้ได้ 10 ข้ออ้างเหตุผล

3. ตัวแทนของนิสิตแต่ละกลุ่มนำเสนอผลการศึกษาของกลุ่ม
4. อาจารย์และนิสิตร่วมกันอภิปรายและสรุปค่าความจริงและความสมเหตุสมผลอีกครั้งหนึ่ง
5. นิสิตทำแบบฝึกหัดประจำบทที่ 2
6. อาจารย์และนิสิตร่วมกันเฉลยแบบฝึกหัด

7. นิสิตสรุปจดบันทึกลงในสมุดของนิสิต

5. แหล่งการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอนวิชา ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์บทที่ 2
2. แบบฝึกหัดบทที่ 2
3. Power-point

6. กระบวนการวัดผลและประเมินผล

1. การร่วมกันสรุป, อภิปรายและตอบคำถาม
2. การตอบคำถามในแบบฝึกหัด
3. การสรุปจดบันทึกของนิสิต
4. เอกสารแบบฝึกหัด

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

(..)

อาจารย์สอน

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

....

....

บทที่ 2

ค่าความจริงและความสมเหตุสมผล

(Truth-value and Validity)

2.1 ค่าความจริง

ในตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ ค่าความจริง (Truth-value) คือ ค่าที่บ่งบอกความสัมพันธ์ระหว่างประพจน์กับความจริง (ข้อเท็จจริง) ประพจน์ (Proposition) หรือประโยคบอกเล่าในภาษาไวยากรณ์เท่านั้นที่บ่งบอกค่าความจริงได้ ประพจน์จะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อประพจน์นั้นสอดคล้องกับประสบการณ์จริงในชีวิตประจำวัน ถ้าประพจน์นั้นขัดแย้งกับประสบการณ์ ก็จะเป็นเท็จ

ประพจน์เดี่ยวแต่ละประพจน์มีค่าความจริงที่เป็นไปได้อยู่ 2 ค่า คือ ค่าความจริงที่เป็นจริงและค่าความจริงที่เป็นเท็จ ส่วนประพจน์ซ้อนนั้นจะดูที่ตัวเชื่อมระหว่างประพจน์และเงื่อนไขความจริง (Truth functional) ของตัวเชื่อมเป็นหลักจึงจะรู้ค่าความจริงของมัน (ดูรายละเอียดในบทที่ 3)

ต่อไปนี้คือตัวอย่างของประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง

ตัวอย่างที่	ประพจน์	ค่าความจริง
1	มนุษย์ทุกคนเกิดมาแล้วต้องตาย	จริง
2	สุนัขทุกตัวเป็นสัตว์ที่เลี้ยงลูกด้วยนม	จริง
3	พัทยาเป็นเมืองท่องเที่ยวที่มีชื่อเสียงของไทย	จริง
4	มหาวิทยาลัยบูรพาตั้งอยู่ที่บางแสน จังหวัดชลบุรี	จริง
3	ทีมชาติสเปนเป็นแชมป์ฟุตบอลโลก ครั้งที่ 19 ที่แอฟริกาใต้	จริง
4	นางสาวยิ่งลักษณ์ ชินวัตรเป็นนายกรัฐมนตรีคนที่ 28 ของประเทศไทย	จริง
2	เขาใหญ่ได้รับการขึ้นทะเบียนเป็นมรดกโลกทางธรรมชาติ	จริง
8	“นุ่น” วรนุช วงษ์สวรรค์ ดาราสาวชื่อดังวิกหมอชิต แต่งงานกับต๊อด ปิติ ภิรมย์ภักดี ทายาทเบียร์สิงห์	จริง
9	ญี่ปุ่นเป็นประเทศมหาอำนาจทางเศรษฐกิจประเทศหนึ่ง	จริง
10	ชาวไทยส่วนใหญ่นับถือศาสนาพุทธ	จริง
11	ปัจจุบันอุตสาหกรรมการท่องเที่ยวทำรายได้ให้ประเทศไทยมากที่สุด	จริง
12	พระธาตุพนมเป็นพระธาตุคู่บ้านคู่เมืองของชาวอีสาน	จริง
13	ประเทศไทยมี 3 ฤดูคือ ฤดูหนาว ฤดูร้อน และฤดูฝน	จริง
14	1 ปีมี 12 เดือน	จริง
15	พระภิกษุสงฆ์ในพุทธศาสนาจะอยู่จำพรรษาเป็นเวลา 3 เดือน	จริง
16	ปัจจุบันประเทศไทยใช้รัฐธรรมนูญฉบับปี 2550 ปกครองประเทศ	จริง

ประพจน์เหล่านี้เป็นจริง เพราะสอดคล้องกับความเป็นจริงในชีวิตประจำวัน

ต่อไปนี้คือตัวอย่างของประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ตัวอย่างที่	**ประพจน์**	**ค่าความจริง**
1	ทาทา ยังได้รับเกียรติให้ร้องเพลงวาก้า วาก้าในฟุตบอลโลกครั้งที่ 19 ที่แอฟริกาใต้	เท็จ
2	ปลาเป็นสัตว์ครึ่งบกครึ่งน้ำ	เท็จ
3	อ่อง ซาน ซูจีเป็นวีรสตรีของไทย	เท็จ
4	ประเพณีผีตาโขนอยู่ที่จังหวัดชลบุรี	เท็จ
5	ประเทศไทยเสนอเขาพระวิหารเป็นมรดกโลก	เท็จ
6	ประเทศไทยปกครองด้วยระบอบคอมมิวนิสต์	เท็จ
7	บั้งไฟพญานาคมักเกิดขึ้นที่จังหวัดสกลนคร	เท็จ
8	ประเพณีวันไหลที่บางแสนจัดในช่วงเทศกาลเข้าพรรษา	เท็จ
9	น้องปอย ตรีชฎา มาลยาภรณ์เป็นหญิงแท้ที่สวยที่สุด	เท็จ
10	ดอกกุหลาบเป็นสัญลักษณ์แห่งสงคราม	เท็จ
11	เทสโก้ โลตัสเป็นห้างของคนไทย	เท็จ
12	ประเทศไทยเป็นประเทศที่พัฒนาแล้ว	เท็จ
13	พระศรีสุริโยทัยเป็นกษัตริย์หญิงองค์แรกของประเทศไทย	เท็จ
14	เขาเขียวเป็นสถานที่อยู่ของหลินปิง	เท็จ
15	สุนัขออกลูกเป็นไข่	เท็จ
16	โดยธรรมชาติพังพอนเป็นเพื่อนกับงู	เท็จ
17	ผลไม้ทุกชนิดมีรสหวาน	เท็จ
18	คนไทยทุกคนเป็นชาวพุทธ	เท็จ
19	พระพุทธเจ้าเป็นคนไทย	เท็จ
20	เพชรบูรณ์เป็นเมืองหลวงของประเทศไทย	เท็จ

ประพจน์เหล่านี้เป็นเท็จ เพราะขัดแย้งกับความเป็นจริงในชีวิตประจำวัน

แต่ยังมีข้อความอีกหลายข้อความที่เราไม่สามารถจะตัดสินค่าความจริงได้ เพราะไม่จัดเป็นประพจน์ เช่น

ลำดับที่	ข้อความ	ประเภท
1	ไข่ไก่ 2 ฟองราคาเท่าไร?	คำถาม
2	เขาเป็นนักเขียนนวนิยาย	ไม่เจาะจงประธาน
3	กรุณาแต่งกายให้เรียบร้อยก่อนเข้าห้องเรียน	ขอร้อง
4	ทำไมเธอจึงมาสาย?	คำถาม
5	โอ้โห วันนี้แต่งตัวเท่ห์จัง	อุทาน
4	ได้โปรดเมตตาต่อผมด้วยเถอะ	ขอร้อง
5	โปรดเอื้อเฟื้อแก่เด็ก สตรี และคนชรา	ขอร้อง
8	ห้ามสูบบุหรี่บนรถโดยสารประจำทาง	คำสั่ง
9	อุ๊ย! ตกใจหมดเลย	อุทาน
10	หนึ่งบวกด้วยหนึ่งได้เท่าไร	คำถาม
11	ฉันอยากมีเงินสักร้อยล้าน	แสดงความปรารถนา
12	อย่าเดินในที่เปลี่ยว	ข้อห้าม
13	ระวังสุนัขกัด	คำเตือน
14	จงช่วยกันอนุรักษ์ช้างไทย	คำขอร้อง
15	ห้ามสูบบุหรี่บนรถโดยสารประจำทาง	ข้อห้าม

2.2 ความสมเหตุสมผล

ความสมเหตุสมผล หรือความไม่สมเหตุสมผล (validity or invalidity) เป็นคุณลักษณะของข้ออ้างเหตุผล (argument) ข้ออ้างเหตุผลจะสมเหตุสมผลหรือไม่ขึ้นอยู่กับว่ามันเป็นไปตามกฎเกณฑ์หรือแบบของตรรกศาสตร์ที่กำหนดไว้หรือไม่ ดังนั้น เราจะประเมินค่าข้ออ้างเหตุผลว่า สมเหตุสมผลหรือไม่สมเหตุสมผล แต่จะไม่ประเมินค่าว่าจริงหรือเท็จ ในทางกลับกัน เราจะประเมินค่าของญัตติหรือข้อความว่าจริงหรือเท็จ แต่จะไม่ประเมินค่าญัตติหรือข้อความว่าสมเหตุสมผลหรือไม่สมเหตุสมผล

นอกจากจะคำนึงถึงรูปแบบของตรรกศาสตร์แล้ว ข้ออ้างเหตุผลนั้นจะสมเหตุสมผลได้จะต้องมีข้ออ้างที่บ่งถึงข้อสรุป นั่นคือ ข้อสรุปจะต้องสืบเนื่องมาจากข้ออ้าง หากข้อสรุปไม่เกี่ยวข้องกับข้ออ้าง ข้ออ้างเหตุผลนั้นก็ถือว่าไม่สมเหตุสมผล เฉพาะอย่างยิ่งกรณีที่ข้ออ้างเป็นจริง แต่ข้อสรุปเป็นเท็จ เราจะถือว่าข้ออ้างเหตุผลนั้นไม่สมเหตุสมผล

ข้ออ้างเหตุผลจะสมเหตุสมผลและไม่สมเหตุสมผลได้ 3 กรณี แต่จะมีเพียงกรณีเดียวเท่านั้นที่ข้ออ้างเหตุผลนั้นไม่สมเหตุสมผลอย่างเดียวคือ **ข้ออ้างจริง แต่ข้อสรุปเท็จ**

กรณีที่	ข้ออ้าง	ข้อสรุป	ข้ออ้างเหตุผล
1	จริง	จริง	สมเหตุสมผล/ไม่สมเหตุสมผล
2	เท็จ	เท็จ	สมเหตุสมผล/ไม่สมเหตุสมผล
3	เท็จ	จริง	สมเหตุสมผล/ไม่สมเหตุสมผล
4	จริง	เท็จ	ไม่สมเหตุสมผล

ข้ออ้างเหตุผลกรณีที่ 1

มนุษย์ทุกคนต้องตาย	จริง
นิสิตมหาวิทยาลัยบูรพาทุกคนเป็นมนุษย์	จริง
เพราะฉะนั้น นิสิตมหาวิทยาลัยบูรพาทุกคนต้องตาย	จริง

ข้ออ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผล เพราะเป็นไปตามกฎเกณฑ์หรือแบบของตรรก นั่นคือ มันเป็นตรรกบทเด็ดขาดที่อยู่ในรูปลักษณ์ที่ 1 (first figure) มาลา (mood) A A A (babara) ข้ออ้างเหตุผลชนิดนี้จัดได้ว่าถูกทั้งแบบ (form) และเนื้อหา (material) มาลาที่สมเหตุสมผลในรูปลักษณ์ที่ 1 นี้ มี 4 มาลา คือ A A A (Babara), E A E (Celarent), A I I (Darii), E I O (Ferio)

ดูตัวอย่างประกอบที่ 2 ต่อไปนี้

แมวทุกตัวเป็นสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนม	จริง
แมวทุกตัวกินหนูเป็นอาหาร	จริง
เพราะฉะนั้น สัตว์ที่กินหนูทุกชนิดเลี้ยงลูกด้วยนม	จริง

ข้ออ้างเหตุผลนี้ไม่สมเหตุสมผล (invalid) ทั้ง ๆ ที่บทเสนอและบทสรุปเป็นจริงหมด ที่เป็นเช่นนี้เพราะข้ออ้างเหตุผลนี้ไม่เป็นไปตามกฎเกณฑ์หรือแบบ (Form) ของตรรกบทซึ่งมันอยู่ในรูปลักษณ์ที่ 3 (third figure) มาลา (mood) A A A ข้ออ้างเหตุผลนี้จึงเป็นจริงทางเนื้อหา แต่ไม่สมเหตุสมผลตามแบบของตรรกบท มาลาที่สมเหตุสมผลในรูปลักษณ์ที่ 3 นั้นมี 4 คือ A A I (Darapti), A I I (Datisi), I A I (Disamis), E A O (Felapton), O A O (Bocado) และ E I O (Ferison)

ข้ออ้างเหตุผลกรณีที่ 2

สุนัขทุกตัวเป็นม้า	เท็จ
แมวทุกตัวเป็นสุนัข	เท็จ
เพราะฉะนั้น แมวทุกตัวเป็นม้า	เท็จ

ข้ออ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผล แม้ว่าญัตติที่ประกอบกันเข้าเป็นบทเสนอและบทสรุปจะออกมาเป็นเท็จหมดก็ตาม เพราะว่ามันเป็นไปตามกฎเกณฑ์หรือแบบของตรรกบท นั่นคือ มันเป็นตรรกบทเด็ดขาดที่อยู่ในรูปลักษณ์ที่ 1 (first figure) มาลา(mood) AAA (babara) เหมือนตัวอย่างแรกของกรณีที่ 1

แมวทุกตัวเป็นสัตว์ป่า	เท็จ
ม้าทุกตัวเป็นสัตว์ป่า	เท็จ
เพราะฉะนั้น ม้าทุกตัวเป็นแมว	เท็จ

ข้ออ้างเหตุผลนี้ไม่สมเหตุสมผล เพราะมันไม่เป็นไปตามกฎเกณฑ์หรือแบบของตรรกะ อีกทั้งเนื้อหาของญัตติที่เป็นบทเสนอและบทสรุปก็เป็นเท็จหมด ข้ออ้างเหตุผลนี้ผิดทั้งแบบและผิดทั้งเนื้อหา ข้ออ้างเหตุผลนี้อยู่ในรูปลักษณ์ที่ 2 (second figure), มาลา(mood) A A A ซึ่งไม่สมเหตุสมผล มาลาที่สมเหตุสมผลในรูปลักษณ์ที่ 2 นี้คือ A E E (Camestres), E A E (Cesare), A O O (Baroco) และ E I O (Festino)

ข้ออ้างเหตุผลที่ 3

ไม่มีเด็กชายคนใดเป็นผู้ชาย	เท็จ
ผู้หญิงทุกคนเป็นผู้ชาย	เท็จ
เพราะฉะนั้น ไม่มีผู้หญิงคนใดเป็นผู้ชาย	จริง

ข้ออ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผล เพราะเป็นไปตามกฎเกณฑ์หรือแบบของตรรกะ นั่นคือ มันเป็นตรรกบทที่อยู่ในรูปลักษณ์ที่ 2 (second figure) มาลา (mood) E A E (Cesare)

คนที่รู้หนังสือทุกคนเป็นผู้หญิง	เท็จ
นายกรัฐมนตรีไทยทุกคนเป็นผู้หญิง	เท็จ
เพราะฉะนั้น นายกรัฐมนตรีไทยทุกคนเป็นผู้รู้หนังสือ	จริง

ข้ออ้างเหตุผลนี้ไม่สมเหตุสมผล (invalid) เพราะไม่เป็นไปตามกฎเกณฑ์หรือแบบของตรรกะ ข้ออ้างเหตุผลนี้อยู่ในรูปลักษณ์ที่ 2 (second figure) และมีมาลา (mood)เป็น A A A ซึ่งไม่สมเหตุสมผลเหมือนตัวอย่างที่ 2 ข้างบน

ข้ออ้างเหตุผลกรณีที่ 4

วัวทุกตัวเป็นสัตว์สี่เท้า	จริง
ม้าทุกตัวเป็นสัตว์สี่เท้า	จริง
เพราะฉะนั้น ม้าทุกตัวเป็นวัว	เท็จ

ข้ออ้างเหตุผลนี้ไม่สมเหตุสมผล เพราะเหตุผล 2 ประการ คือ

1. ผิดแบบของตรรกบทเด็ดขาดที่อยู่ในรูปลักษณ์ที่ 2 (second figure)

2. ผิดกฎเกณฑ์ของตรรกศาสตร์นิรนัยที่ว่าข้ออ้างเหตุผลจะไม่สมเหตุสมผล ถ้ามีญัตติที่เป็นบทเสนอจริง แต่บทสรุปกลับเป็นเท็จ จะถือว่าสรุปเกินบทเสนอ เหตุที่เป็นเช่นนี้ก็เพราะตรรกศาสตร์นิรนัยซึ่งยึดแบบเป็นหลักจะถือว่า บทสรุปนั้นได้มาจากบทเสนอ คือ บทเสนอจะบ่งถึงบทสรุปเป็นนัย ๆ แล้วนั่นเอง เพราะฉะนั้น กรณีที่ 4 นี้จึงเป็นอื่นไปไม่ได้นอกจากไม่สมเหตุสมผลเพียงอย่างเดียว

แบบฝึกหัดบทที่ 2

1. จงจัดให้ถูกต้องว่าญัตติใดเป็นข้ออ้างหลัก ข้ออ้างรอง และข้อสรุปตามลำดับ

(1) ก. สมชายเป็นมนุษย์
ข. สมชายเป็นสัตว์ที่ต้องตาย
ค. มนุษย์ทุกคนเป็นสัตว์ที่ต้องตาย

(2) ก. มนุษย์ทุกคนเป็นสัตว์ที่ต้องตาย
ข. สัตว์ทุกชนิดเป็นสิ่งที่ต้องตาย
ค. มนุษย์ทุกคนเป็นสัตว์

(3) ก. ทักษิณไม่ใช่คนที่มีชื่อเสียง
ข. ถ้าทักษิณเป็นนายกรัฐมนตรีแล้ว ทักษิณจะเป็นคนที่มีชื่อเสียง
ค. ทักษิณไม่ได้เป็นนายกรัฐมนตรี

(4) ก. สัตว์ที่เลี้ยงลูกด้วยนมทุกชนิดเป็นสัตว์ที่มีปอด
ข. ค้างคาวทุกตัวเป็นสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนม
ค. ค้างคาวทุกตัวเป็นสัตว์ที่มีปอด

(5) ก. สมานเป็นคอมมิวนิสต์
ข. เพราะคอมมิวนิสต์ทุกคนเป็นอเทวนิยม
ค. สมานเป็นอเทวนิยม

2. จงบอกว่าญัตติต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นอะไร ?

(1) นักศึกษาทุกคนเป็นคนขยัน
(2) นักศึกษาบางคนเป็นคนขี้เกียจ
(3) ไม่มีนักศึกษาคนใดเป็นคนขยันเรียน
(4) มนุษย์ทุกคนเป็นสัตว์ที่รู้คิด
(5) ไม่มีกาตัวใดมีสีเหลือง
(6) ชาวไทยทุกคนเป็นชาวพุทธ
(7) ผู้แทนบางคนไม่เป็นคนซื่อสัตย์
(8) อินเดียเป็นประเทศที่มีประชากรมากที่สุดในโลก
(9) มหาตมะ คานธีเป็นชาวพุทธที่ยึดหลักอหิงสธรรม
(10) ถ้าถนนเปียกแล้ว ฝนก็ตก
(11) ถ้าที่ใดมีไฟแล้ว ที่นั่นย่อมมีควัน
(12) สุรเกียรติ เสถียรไทยเป็นรัฐมนตรีว่าการกระทรวงพานิชย์

3. จงบอกว่าข้ออ้างเหตุผลใดต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

(1) ไม่มีแมลงชนิดใดเป็นสิ่งที่มีแปดขา
ต่อเป็นแมลงชนิดหนึ่ง
เพราะฉะนั้น ต่อจึงไม่ใช่สิ่งที่มีแปดขา

(2) ไม่มีผู้หญิงอินเดียคนใดเป็นทหาร
คนที่รับใช้ประเทศชาติบางคนเป็นทหาร
เพราะฉะนั้น คนที่รับใช้ประเทศชาติบางคนจึงไม่ใช่ผู้หญิงอินเดีย

(3) พระอรหันต์ทุกคนเป็นคนสุภาพ
ไม่มีคนบาปคนใดเป็นพระอรหันต์
เพราะฉะนั้น จึงไม่มีคนบาปคนใดเป็นคนสุภาพ

(4) คนทุกคนเป็นสัตว์
สัตว์ทุกชนิดเป็นสิ่งมีชีวิต
เพราะฉะนั้น สิ่งมีชีวิตบางสิ่งเป็นคน

(5) ไม่มีสุนัขตัวใดเป็นแมว
แมวบางตัวเป็นสัตว์ที่จับหนู
เพราะฉะนั้น สัตว์ที่จับหนูบางชนิดไม่เป็นสุนัข

(6) ไม่มีสัตว์สี่เท้าตัวใดเป็นคน
สัตว์บางชนิดเป็นสัตว์สี่เท้า
เพราะฉะนั้น สัตว์บางชนิดไม่เป็นคน

แผนการจัดการเรียนรู้บทที่ 3

เรื่อง ตรรกศาสตร์ว่าด้วยประพจน์ **เวลา 3 ชั่วโมง**

****

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นิสิตสามารถบอกความหมายของตรรกศาสตร์ว่าด้วยประพจน์ ความหมายของประพจน์ และสามารถจำแนกประพจน์ ตัวแปร ตัวคงที่ ตัวเชื่อมและตัวขยายได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกความหมายของตรรกศาสตร์ว่าด้วยประพจน์ และความหมายของประพจน์ได้
2. สามารถจำแนกประพจน์ชนิดต่างๆ ได้
3. สามารถบอกตัวแปร ตัวคงที่ ตัวเชื่อมและตัวขยายได้

2. แนวคิดหลัก (สาระสำคัญ)

ตรรกศาสตร์ว่าด้วยประพจน์ คือ ตรรกศาสตร์ที่ศึกษาแนวทางการเชื่อมหรือเปลี่ยนแปลงประพจน์เพื่อสร้างประพจน์ที่มีความสลับซับซ้อนมากกว่า และศึกษาความสัมพันธ์ทางตรรกะและคุณสมบัติที่ได้จากวิธีการเชื่อมและเปลี่ยนประพจน์เหล่านี้ โดยสนใจโครงสร้างภายนอกของประพจน์เป็นหลัก

ประพจน์ คือ ประโยคหรือข้อความที่สามารถบอกได้ว่าจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น ประโยคหรือข้อความที่มีลักษณะดังกล่าวเรียกว่าประโยคหรือข้อความบอกเล่าหรือปฏิเสธ

3. เนื้อหาสาระ

1. ความหมายของตรรกศาสตร์ว่าด้วยประพจน์
2. ความหมายของประพจน์
3. ชนิดของประพจน์
4. ตัวแปรและตัวคงที่
5. ตัวเชื่อมและตัวขยาย

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. อาจารย์แจ้งจุดประสงค์ให้นิสิตทราบ
2. อาจารย์บรรยายความหมายของตรรกศาสตร์ว่าด้วยประพจน์และความหมายของประพจน์
3. นิสิตศึกษาเอกสารประกอบการสอนบทที่ 3 ในหัวข้อชนิดของประพจน์ ตัวแปรและตัวคงที่ ตัวเชื่อมและตัวขยาย
4. นิสิตแบ่งกลุ่มเป็น 4 กลุ่ม โดยให้แต่ละกลุ่มศึกษาประเด็นดังนี้

กลุ่มที่ 1 หาคำที่เป็นตัวเชื่อมในภาษาไทย พร้อมกับหาตัวอย่างบทความหรือข้อมูลที่มีตัวเชื่อมเหล่านั้นปรากฏอยู่มา 1 บทความ

กลุ่มที่ 2 ศึกษาคำที่เป็นตัวเชื่อมในภาษาอังกฤษ พร้อมทั้งจำแนกตามประเภทของตัวเชื่อม

กลุ่มที่ 3 ช่วยกันยกตัวอย่างประพจน์ที่เชื่อมด้วยตัวเชื่อมทั้ง 5 และ 1 ตัวขยาย มาอย่างละ 5 ประพจน์

กลุ่มที่ 4 ช่วยกันยกตัวอย่างประพจน์ที่เชื่อมด้วยตัวเชื่อมทั้ง 5 และ 1 ตัวขยาย มาอย่างละ 5 ประพจน์

3. ตัวแทนของนิสิตแต่ละกลุ่มนำเสนอผลการศึกษาของกลุ่ม
4. อาจารย์และนิสิตร่วมกันอภิปรายและสรุปผลการศึกษาอีกครั้งหนึ่ง
5. นิสิตทำแบบฝึกหัดประจำบทที่ 3
6. อาจารย์และนิสิตร่วมกันเฉลยแบบฝึกหัด
7. นิสิตสรุปจดบันทึกลงในสมุดของนิสิต

5. แหล่งการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอนวิชา ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์บทที่ 3
2. แบบฝึกหัดบทที่ 3
3. Power-point

6. กระบวนการวัดผลและประเมินผล

1. การร่วมกันสรุป, อภิปรายและตอบคำถาม
2. การตอบคำถามในแบบฝึกหัด
3. การสรุปจดบันทึกของนิสิต
4. เอกสารแบบฝึกหัด

7. บันทึกหลังสอน

....

....

(..)

อาจารย์สอน

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

....

....

บทที่ 3
ตรรกศาสตร์ว่าด้วยประพจน์
(Propositional Logic)

3.1 ความหมายของตรรกศาสตร์ว่าด้วยประพจน์

ตรรกศาสตร์ว่าด้วยประพจน์ คือ ตรรกศาสตร์ที่ศึกษาและพิสูจน์ความสมเหตุสมผลหรือความถูกต้องของประพจน์หรือข้ออ้างเหตุผลในลักษณะที่มิได้วิเคราะห์โครงสร้างภายใน คือ จะใช้สัญลักษณ์ที่เป็นอักษรเพียงตัวเดียวแทนประพจน์หนึ่งประพจน์ โดยไม่คำนึงถึงเนื้อหาภายใน เช่น "โสเครตีสเป็นมนุษย์" ก็จะแทนด้วยสัญลักษณ์ว่า S ซึ่งหมายถึงว่า ประพจน์แต่ละประพจน์นั้นเป็นหน่วยที่แยกจากกันไม่ได้ คือ จะไม่แยกเป็นภาคว่าเป็น "โสเครตีส" อันหนึ่ง และ "เป็นมนุษย์" อีกอันหนึ่ง

3.2 ความหมายของประพจน์

ประพจน์ (Proposition) คือ ข้อความที่อยู่ในรูปของประโยคบอกเล่า ซึ่งสามารถจะตัดสินว่าจริงหรือเท็จได้ ดังตัวอย่างที่ปรากฏในบทที่ 2

คำว่า "ประพจน์" นี้ หนังสือที่เกี่ยวกับตรรกศาสตร์สัญลักษณ์บางเล่มเรียกว่า ญัตติ หรือ ข้อความซึ่งใช้ในความหมายเดียวกับคำว่าประพจน์ ส่วนคำว่าประพจน์กับประโยคนั้นมีความหมายแตกต่างกันเพราะประพจน์หมายเอาเฉพาะประโยคบอกเล่าที่สามารถตัดสินค่าความจริงได้เท่านั้น ส่วนประโยคในทางไวยากรณ์ภาษานั้น มีมากมาย เช่น ประโยคคำสั่ง ("อย่าเดินลัดสนาม") ประโยคอุทาน ("พุทโธ่เอ๋ย") เป็นต้น (ดูตัวอย่างในบทที่ 2 ประกอบ)

3.3 ชนิดของประพจน์

นักตรรกศาสตร์สมัยปัจจุบันได้แบ่งประพจน์ออกเป็น 2 ชนิด คือ

1 ประพจน์เดี่ยว (Simple Proposition) คือ ข้อความที่มีคำพูดยืนยันเพียงเรื่องเดียวหรือครั้งเดียวเท่านั้น เช่น "ดวงตาขยันเรียน", "พีระขี้เกียจ" เป็นต้น ใช้อักษรตัวเดียวเป็นสัญลักษณ์แทน เช่น D แทนประพจน์แรก และ P แทนประพจน์ที่สอง

2 ประพจน์ซ้อน (Compound Proposition) คือ ประพจน์ที่มีการยืนยันหรือปฏิเสธมากกว่า 1 ครั้งขึ้นไป ซึ่งก็คือประพจน์เดี่ยวตั้งแต่ 2 ประพจน์ขึ้นไปมาสัมพันธ์กันด้วยตัวเชื่อมหลัก ประพจน์ซ้อนจึงสามารถแบ่งย่อยลงไปได้อีกตามตัวเชื่อม (Logical Connectives) ซึ่งมี 5 ชนิด ดังนี้

(1) ประพจน์ปฏิเสธ (Negative Compound Proposition) ประพจน์ซ้อนชนิดนี้ไม่มีสันธานเชื่อม ว่ากันตามหลักภาษาธรรมดาก็ดูประหนึ่งว่าเป็นประพจน์เดี่ยว แต่ว่ากันตามความหมายก็เป็นประพจน์ซ้อน เพราะการปฏิเสธนั้นเองเท่ากับเป็นประพจน์เดี่ยวเพิ่มขึ้นอีกประพจน์หนึ่งซึ่งมาปฏิเสธหรือ

ยืนยันประพจน์เดิม ข้อนี้จะเห็นได้ชัดเมื่อเราทำการพิสูจน์ด้วยตารางความจริง เช่น "ทองดีไม่ใช่สามีของนางสาย" มีความหมายทางตรรกศาสตร์ว่า "ไม่เป็นความจริงที่ว่าทองดีเป็นสามีของนางสาย" เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า ~ p อ่านว่า นอน พี (non-p) ใช้สัญลักษณ์ ~ แทนกริยาวิเศสที่ใช้ปฏิเสธในประโยคภาษาอังกฤษ เช่น not, never และ It is not the case that........

(2) ประพจน์รวม (Conjunctive Compound Proposition) คือ ประพจน์ซ้อนที่มีความหมายรวมเชื่อมด้วยสันธาน "และ" รวมทั้งสันธานอื่น ๆ ที่มีความหมายทำนองเดียวกัน เช่น แต่, แม้, เมื่อ เป็นต้น ในภาษาอังกฤษได้แก่สันธาน and, but, although, however, when, despite เป็นต้น เช่น "ไก่เป็นสัตว์ปีกแต่จรเข้เป็นสัตว์ครึ่งบกครึ่งน้ำ" หรือ "ฉันเรียนหนังสือและเล่นดนตรี" เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า p . q อ่านว่า พี แอนด์ คิว (p and q) ซึ่งสัญลักษณ์ที่ใช้แทนประพจน์รวมนี้เรียกว่า ด็อท "." (dot)

(3) ประพจน์เลือก (Disjunctive Compound Proposition) เป็นประพจน์ที่สามารถเลือกได้หรือมีข้อความที่ให้เลือกเกิดขึ้น เชื่อมด้วยสันธาน "หรือ" ในภาษาอังกฤษคือสันธาน "either...... or......." ประพจน์เลือกนี้แบ่งออกเป็น 2 ชนิด คือ

ก. ประพจน์ชนิดเลือกอย่างเดียวหรือทั้งสอง คือ จะเป็นจริงอย่างน้อยหนึ่งอย่าง หรือจะเป็นจริงทั้งสองก็ได้ ภาษาอังกฤษเรียกว่า Inclusive Disjunctive หรือ Inclusive Or จะนิยมใช้มากกว่าชนิดที่จะกล่าวต่อไป เช่น

"ฉันจะไปเที่ยวหัวหินหรือจะไปเที่ยวพัทยา"

"สุรชัยเป็นคนฉลาดหรือเป็นคนขยัน"

ในตัวอย่างทั้ง 2 นี้ แต่ละประพจน์อาจเป็นจริงเพียงอย่างเดียวหรือเป็นจริงทั้งสองก็ได้ เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า p v q อ่านว่า พี ออร์ คิว (p v q) ใช้สัญลักษณ์ "v" แทนคำในภาษาอังกฤษว่า "either....... or......." หรือ " or both"

ข. ประพจน์ชนิดเลือกได้เพียงอย่างเดียว คือจะเป็นจริงได้เพียงอย่างเดียวเท่านั้น จะเป็นจริง 2 อย่างไม่ได้ ภาษาอังกฤษเรียกว่า Exclusive Disjunctive หรือ Exclusive or เช่น

"วันนี้ไม่เป็นวันเสาร์ก็เป็นวันอาทิตย์"

"ปวีณาไม่เป็นสาวสวยก็ต้องเป็นสาวขี้เหร่"

ตัวอย่างทั้ง 2 นี้ บอกให้เรารู้ว่า แต่ละประพจน์จะเลือกได้เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น แต่ไม่ใช่ทั้งสอง และจะเป็นจริงได้เพียงอย่างเดียว แต่จะเป็นจริงทั้งสองไม่ได้ เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า p ʌ q ใช้สัญลักษณ์ "ʌ" แทนภาษาอังกฤษว่า "either........ or......, but not both" ประพจน์เลือกชนิดนี้ใช้น้อยมาก

(4) ประพจน์เงื่อนไข (Implicative Compound Proposition) คือ ประพจน์ซ้อนที่มีประพจน์หน้าเป็นตัวเงื่อนไข (antecedent) และประพจน์หลังเป็นผลของเงื่อนไข (consequent) เชื่อมด้วยสันธาน "ถ้า......แล้ว......" ในภาษาอังกฤษได้แก่สันธาน "If......., then......" , "in case that", "provided that", "condition for" เช่น

"ถ้าฝนตกแล้วถนนก็จะเปียก"

"ถ้าคุณขยันดูหนังสือแล้วคุณจะสอบผ่าน"

เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า $p \supset q$ อ่านว่า อิฟ พี เด็น คิว (If p, then q) ใช้สัญลักษณ์ตะขอหรือเกือกม้า "$\supset$" แทน คำว่า If….., then…..

(5) ประพจน์สมภาค (Equivalence หรือ Equivalent Compound Proposition) คือ ประพจน์ซ้อนที่มีญัตติทั้งสองมีค่าหรือมีความหมายเสมอกันหรือเหมือนกัน และต่างฝ่ายต่างก็เป็นเงื่อนไขหรือผลของกันและกันได้ จึงเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า Biconditional proposition เชื่อมด้วยสันธาน "ถ้า.......แล้ว.....และถ้า........แล้ว....." หรือ "ก็ต่อเมื่อ.......เท่านั้น" หรือ "เท่ากับว่า" ในภาษาอังกฤษได้แก่สันธาน If and only if, necessary and sufficient for เช่น

"นายทองดีจะตายก็ต่อเมื่อเขาหมดลมหายใจเท่านั้น" หรือ

"นายทองดีหมดลมหายใจก็ต่อเมื่อเขาตายเท่านั้น"

ทั้งสองประพจน์นี้มีความหมายที่เหมือนกัน จึงสามารถจะสลับตำแหน่งคือจากที่เป็นเงื่อนไขก็ไปเป็นผล และจากเป็นผลก็กลายมาเป็นเงื่อนไขได้ ส่วนตัวอย่างต่อไปนี้จะมีความหมายไม่เหมือนกัน แต่จะมีค่าเท่ากัน ต่างฝ่ายต่างก็เป็นเงื่อนไขหรือผลของอีกฝ่ายหนึ่งได้เหมือนตัวอย่างชุดแรก เช่น

"คุณทองแดงกินยาพิษเท่ากับว่าเขาจะตาย" หรือ

"คุณทองแดงจะตายเท่ากับว่าเขากินยาพิษ"

ในตัวอย่างชุดนี้ การตายและการกินยาพิษจะบอกนัย (imply) ถึงอีกฝ่ายหนึ่งได้ คือ ถ้ากินยาพิษก็บอกเป็นนัยให้รู้ว่าจะตาย ถ้าตายก็แสดงว่าต้องกินยาพิษเข้าไป

ประพจน์สมภาคเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า $p \equiv q$ อ่านว่า พี อิฟ แอนด์ โอนลี่ อิฟ คิว (p if and only if q) ใช้สัญลักษณ์สามขีด (three bars) แทนวลีว่า if and only if

ประพจน์ทั้ง 5 ชนิดที่อธิบายมานี้ เราพูดเฉพาะในแง่ที่ประพจน์ 2 ประพจน์มารวมกันด้วยการเชื่อมด้วยสันธานทั้ง 5 ชนิดนั้น แต่ประพจน์ซ้อนอาจรวมกันได้มากกว่า 2 ประพจน์ก็ได้ และเป็นการรวมประพจน์ซ้อนต่างชนิดเข้าด้วยกันก็ได้ เช่น $(p \,.\, q) \vee r$ หรือ $\sim p \supset [(p \vee q) \,.\, (p \vee r)]$ เป็นต้น

เราสามารถสรุปสัญลักษณ์ที่ใช้เชื่อมประพจน์ซ้อนที่นิยมใช้ในตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ได้ดังนี้

ลำดับที่	ชนิดของประพจน์	สัญลักษณ์ที่ใช้แทน	ความหมาย
1.	ประพจน์ปฏิเสธ	$\sim$	"ไม่ใช่…….", "ไม่เป็นความจริงที่ว่า...."
2.	ประพจน์รวม	$\cdot$	".......และ........"
3.	ประพจน์เลือกอย่างหนึ่งหรือทั้งสอง	$\vee$	"........หรือ......ทั้งสอง"
4.	ประพจน์เลือกได้เพียงอย่างเดียว	Λ	".....หรือ....เพียงอย่างเดียว"
5.	ประพจน์เงื่อนไข	$\supset$	"ถ้า.....แล้ว......"
6.	ประพจน์สมภาค	$\equiv$	".....ก็ต่อเมื่อ....."

3.4 ตัวแปรและตัวคงที่ (Variables and Constants)

นักตรรกศาสตร์ใช้อักษร P, Q, R เป็นต้น สำหรับประพจน์เชิงเดี่ยว แต่ถ้าเราใช้ P แทนข้อความว่า "สมศรีเป็นคนสูง" และ ~ P แทนข้อความว่า "สมศรีไม่เป็นคนสูง" ในทางตรรกศาสตร์นั้น อักษร P ไม่ใช่จำกัดอยู่เฉพาะข้อความว่า "สมศรีเป็นคนสูง" เท่านั้น แต่สามารถแทนข้อความอื่น ๆ ได้เหมือนกันหมด อักษร P และ Q เป็นต้น ใช้แทนประพจน์ใดๆ ก็ได้ อักษรเหล่านี้ เรียกว่า "ตัวแปร" (Variable) ตัวแปรเป็นเพียงตัวแทนหรือใช้เป็นสัญลักษณ์ของประพจน์ใดๆ ก็ได้ เช่น P, ~ P, (P ⊃ Q), (P v Q), (P ∧ Q), (P . Q), (P ≡ Q) อักษร P, Q คือ ตัวแปร ส่วนสัญลักษณ์ ~, ⊃, v, ∧, ., ≡ เป็นตัวคงที่ (constants) ตัวแปรจะเปลี่ยนแปลงจากประพจน์หนึ่งสู่อีกประพจน์หนึ่งได้ แต่ตัวคงที่จะไม่เปลี่ยนแปลงไปตามตัวแปร ข้อนี้เปรียบได้กับตัวแปรที่ใช้ในทางพีชคณิต เช่น (X + Y) และ (X – Y) + Z = 8 ในตัวอย่างนี้ อักษร X, Y, Z เป็นตัวแปร ขณะเดียวกันสัญลักษณ์ +, - เป็นต้น เป็นตัวคงที่

3.5 ตัวเชื่อมและตัวขยาย

ตัวเชื่อม ก็คือ ตัวคงที่ทุกตัวยกเว้นสัญลักษณ์ " ~" ที่ทำหน้าที่เชื่อมประพจน์ตั้งแต่ 2 ประพจน์ขึ้นไปเข้าด้วยกัน และทำให้ประพจน์มีชื่อเรียกต่างๆ กันตามตัวเชื่อมที่นำมาเชื่อมด้วย ตัวเชื่อมมีทั้งหมด 5 ตัว คือ

1. ตัวเชื่อม "และ" ใช้สัญลักษณ์จุด ".”ประพจน์ 2 ประพจน์ที่เชื่อมด้วยตัวเชื่อมนี้ เรียกว่า ประพจน์รวม (และ)

2. ตัวเชื่อม "หรืออย่างใดอย่างหนึ่ง/ทั้งสอง" ใช้สัญลักษณ์วี "v" ประพจน์ 2 ประพจน์ที่เชื่อมกันด้วยตัวเชื่อมนี้เรียกว่า ประพจน์เลือกอย่างใดอย่างหนึ่งหรือทั้งสอง(หรือ)

3. ตัวเชื่อม "หรืออย่างเดียว" ใช้สัญลักษณ์วีกลับ "∧" ประพจน์ 2 ประพจน์ที่เชื่อมกันด้วยตัวเชื่อมนี้ เรียกว่า ประพจน์เลือกอย่างใดอย่างหนึ่งแต่ไม่ใช่ทั้งสอง(หรือ)

4. ตัวเชื่อม "เงื่อนไข" ใช้สัญลักษณ์ตะขอหรือเกือกม้า " ⊃" .ประพจน์ 2 ประพจน์ที่เชื่อมกันด้วยตัวเชื่อมนี้ เรียกว่า ญัตติเงื่อนไข (ถ้า........แล้ว......)

5. ตัวเชื่อม "สมภาค" ใช้สัญลักษณ์สามขีด "≡"ประพจน์ 2 ประพจน์ที่เชื่อมกันด้วยตัวเชื่อมนี้ เรียกว่า ประพจน์สมภาค (.......ก็ต่อเมื่อ.....)

ส่วนตัวขยาย หมายถึง สัญลักษณ์ปฏิเสธ "~" ซึ่งไม่ได้ทำหน้าที่เชื่อมประพจน์ตั้งแต่ 2 ญัตติเข้าด้วยกัน แต่จะทำหน้าที่เพียงปฏิเสธประพจน์เดี่ยวที่มีอยู่แล้ว เพื่อให้ความหมายของประพจน์เดิมเปลี่ยนไปแบบตรงกันข้าม คือถ้าประพจน์เดี่ยวเดิมนั้นมีค่าความจริงเป็นจริง (T) ตัวขยายก็จะทำหน้าที่ปฏิเสธประพจน์ที่เป็นจริงนั้นให้เป็นเท็จเสีย ดังนั้น จึงเห็นว่าเราได้ประพจน์เพิ่มมาอีกประพจน์หนึ่ง ตัวขยายจึงจัดเป็นประพจน์ซ้อนอีกชนิดหนึ่ง

แบบฝึกหัดบทที่ 3

จงบอกว่าข้อความต่อไปนี้เป็นประพจน์อะไร

(1) เชื่อในสิ่งที่เฮ็ด เฮ็ดในสิ่งที่เชื่อ

(2) ความรู้คือคุณธรรม

(3) อภิสิทธิ์เป็นคนมีความรู้และซื่อสัตย์

(4) ที่ว่าสุเทพจะเป็นคนซื่อสัตย์นั้นไม่จริงเลย

(5) สุนัยยังไม่เคยแต่งงานแสดงว่าสุนัยก็ยังคงเป็นโสด

(6) ดวงดาวจะซื้อส้มหรือมะม่วงดี

(7) ถ้าระพีขยันเรียนแล้ว เขาก็จะสอบผ่าน

(8) แพนเค้กต้องเลือกระหว่างเวียร์กับวินคนใดคนหนึ่งเป็นแฟน

(9) ถ้ารถเมล์มาถึงช้า เราก็จะพลาดขบวนรถไฟ และในที่สุดเราก็พลาดขบวนรถไฟ เพราะรถเมล์มาถึงช้า

(10) เทพประทานกับสิทธิศักดิ์เป็นเพื่อนสนิทกัน แต่วิธานและสุรัตน์เป็นคู่อริของเทพประทานและสิทธิศักดิ์

(11) ถ้านิสิตที่ลงทะเบียนเรียนวิชาตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ตั้งใจเรียนก็จะสอบผ่านทุกคน

(12) ถ้าต้นทุนการผลิตสินค้าสูงขึ้น ราคาสินค้าอุปโภคบริโภคก็จะสูงตามขึ้นไปด้วย

(13) ชนกนารถจะไปดูหนังหากธเนศแฟนของเธอมาชวน

(14) กนกพรจะไม่ลงเรียนวิชาตรรกศาสตร์สัญลักษณ์เว้นแต่นุจรีเพื่อนรักจะลงด้วย

(15) นิสิตจะได้เกียรตินิยมอันดับหนึ่งก็ต่อเมื่อนิสิตสามารถสอบได้คะแนนเฉลี่ยสะสมเกิน 3.50 ขึ้นไป

แผนการจัดการเรียนรู้บทที่ 4

เรื่อง ตารางความจริง **เวลา 3 ชั่วโมง**

****

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นิสิตสามารถบอกความหมายของตารางความจริง สามารถสร้างตารางความจริงพื้นฐานของประพจน์ชนิดต่างๆ และสามารถนำเอาตารางความจริงพื้นฐานของประพจน์ชนิดต่างๆ ไปใช้พิสูจน์ในบทต่อๆ ไปได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกความหมายของตารางความจริงได้
2. สามารถสร้างตารางความจริงพื้นฐานของประพจน์ชนิดต่างๆ ได้
3. สามารถนำเอาตารางความจริงพื้นฐานของประพจน์ชนิดต่างๆ ไปใช้พิสูจน์ในบทต่อๆ ไปได้

2. แนวคิดหลัก (สาระสำคัญ)

ตารางความจริง หมายถึง ตารางที่ใช้สำหรับทดสอบหรือพิสูจน์ค่าความจริงที่เป็นไปได้ทุกๆ กรณีของประพจน์และข้ออ้างเหตุผลในตรรกศาสตร์สัญลักษณ์

3. เนื้อหาสาระ

1. ความหมายของตารางความจริง
2. ชนิดของตารางความจริงพื้นฐาน

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. อาจารย์แจ้งจุดประสงค์ให้นิสิตทราบ
2. อาจารย์แนะนำความหมายของตารางความจริง
3. นิสิตศึกษาเอกสารประกอบการสอนบทที่ 4 ในหัวข้อชนิดของตารางความจริงพื้นฐาน
4. นิสิตแบ่งกลุ่มเป็น 3 กลุ่ม โดยให้แต่ละกลุ่มศึกษาประเด็นดังนี้

กลุ่มที่ 1 หาตัวอย่างประพจน์ปฏิเสธและประพจน์รวมอย่างละ 5 ตัวอย่างพร้อมทั้งกระจายความเป็นไปได้ของค่าความจริงของประพจน์แล้วสร้างตารางความจริงพื้นฐาน

กลุ่มที่ 2 หาตัวอย่างประพจน์เลือกรวมและประพจน์เลือกเดี่ยวอย่างละ 5 ตัวอย่างพร้อมทั้งกระจายความเป็นไปได้ของค่าความจริงของประพจน์แล้วสร้างตารางความจริงพื้นฐาน

กลุ่มที่ 3 หาตัวอย่างประพจน์เงื่อนไขและประพจน์สมภาคอย่างละ 5 ตัวอย่างพร้อมทั้งกระจายความเป็นไปได้ของค่าความจริงของประพจน์แล้วสร้างตารางความจริงพื้นฐาน

3. ตัวแทนของนิสิตแต่ละกลุ่มนำเสนอผลการศึกษาของกลุ่ม

4. อาจารย์และนิสิตร่วมกันอภิปรายและสรุปผลการศึกษาอีกครั้งหนึ่ง

5. นิสิตทำแบบฝึกหัดประจำบทที่ 4

6. อาจารย์และนิสิตร่วมกันเฉลยแบบฝึกหัด

7. นิสิตสรุปจดบันทึกลงในสมุดของนิสิต

5. แหล่งการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอนวิชา ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์บทที่ 4

2. แบบฝึกหัดบทที่ 4

3. Power-point

6. กระบวนการวัดผลและประเมินผล

1. การร่วมกันสรุป, อภิปรายและตอบคำถาม

2. การตอบคำถามในแบบฝึกหัด

3. การสรุปจดบันทึกของนิสิต

4. เอกสารแบบฝึกหัด

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

(..)

อาจารย์สอน

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

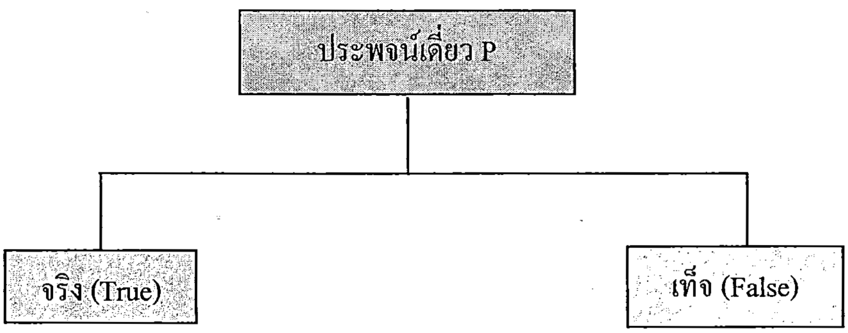
....

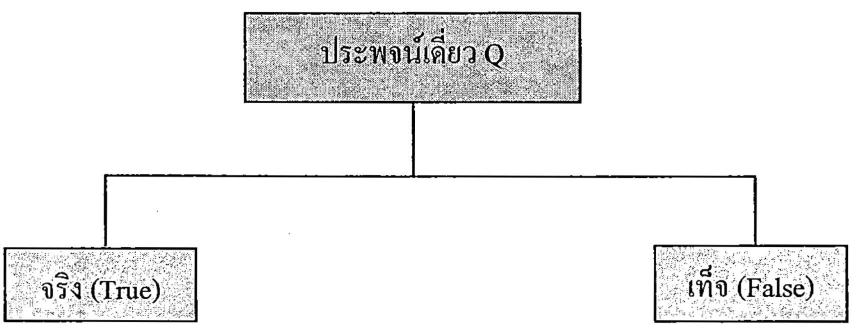
....

บทที่ 4
ตารางความจริง
(Truth Table)

4.1 ความหมายของตารางความจริง

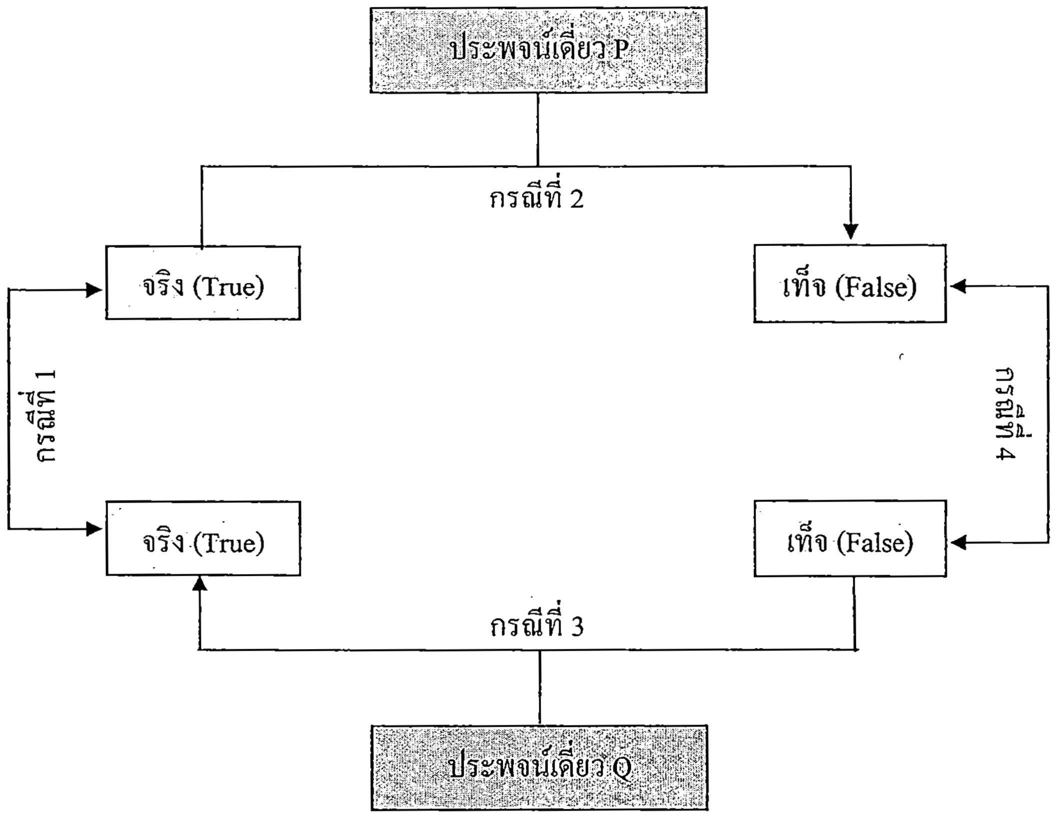
ตารางความจริง หมายถึง ตารางที่เราใช้สำหรับทดสอบหรือพิสูจน์ค่าความจริงที่เป็นไปได้ทุกๆ กรณีของญัตติและข้ออ้างเหตุผลในทางตรรกศาสตร์ โดยตารางความจริงนี้จะใช้พิสูจน์ได้ทั้งประพจน์เดี่ยวและประพจน์ซ้อน (ส่วนมากจะเป็นประพจน์ซ้อน) ประพจน์เดี่ยวนั้นจะมีค่าความจริงที่เป็นไปได้เพียง 2 กรณี คือ จริง (true) กับเท็จ (false) จะไม่มีค่าความจริงใดๆ มากกว่านี้อีก เรามักใช้สัญลักษณ์ภาษาอังกฤษ T แทนค่าความจริงที่เป็นจริง และใช้สัญลักษณ์ F แทนค่าความจริงที่เป็นเท็จ นั่นคือเราย่อเอาอักษรตัวแรกของคำว่า True แทนค่าความจริงที่เป็นจริง และย่อเอาอักษรตัวแรกของคำว่า False แทนค่าความจริงที่เป็นเท็จ เพื่อความเข้าใจยิ่งขึ้นขอให้ดูตัวอย่างค่าความจริงของประพจน์เดี่ยว P และประพจน์เดี่ยว Q ข้างล่างนี้ประกอบ





ดังนั้น ประพจน์เดี่ยวแต่ละประพจน์จะมีค่าความจริงเพียง 2 คือจริงกับเท็จเท่านั้น ต่อเมื่อใดเรานำเอาประพจน์เดี่ยวตั้งแต่ 2 ประพจน์มาสัมพันธ์กัน ค่าความจริงที่เป็นไปได้ของประพจน์ก็จะเพิ่มขึ้นตาม

จำนวนประพจน์ที่มาเชื่อมกัน โดยเราจะนำเอาค่าความจริงที่เป็นไปได้ที่ทั้ง 2 ข้อความมีมาสลับกันไปมาจนได้กรณีที่เป็นไปได้ถึง 4 กรณีดังนี้



กรณีที่เป็นไปได้ของค่าความจริง	ข้อความ P	ข้อความ Q
กรณีที่ 1	T	T
กรณีที่ 2	T	F
กรณีที่ 3	F	T
กรณีที่ 4	F	F

4.2 ชนิดของตารางความจริงพื้นฐาน

ในตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ มีตารางความจริงพื้นฐาน(Basic Truth Table) อยู่ 6 ชนิดคือ

(1) ตารางความจริงพื้นฐานของประพจน์ปฏิเสธ (Truth Table for Negative)

(2) ตารางความจริงพื้นฐานของประพจน์รวม (Truth Table for Conjunctive)

(3) ตารางความจริงพื้นฐานของประพจน์เลือกรวม (Truth Table for Disjunctive)

(4) ตารางความจริงพื้นฐานของประพจน์เลือกเดี่ยว (Truth Table for Alterative)

(5) ตารางความจริงพื้นฐานของประพจน์เงื่อนไข (Truth Table for Implicative)

(6) ตารางความจริงพื้นฐานของประพจน์สมภาค (Truth Table for Biconditional)

(1) ตารางความจริงพื้นฐานของประพจน์ปฏิเสธ

ตารางความจริงพื้นฐานของประพจน์ปฏิเสธจัดได้ว่าเป็นตารางความจริงที่ง่ายที่สุดในบรรดาประพจน์ซ้อนด้วยกัน เพราะไม่ได้เชื่อมสัมพันธ์กันระหว่างประพจน์กับประพจน์ แต่จะปฏิเสธประพจน์เดี่ยวที่มีอยู่แล้ว ค่าความจริงของประพจน์ปฏิเสธนี้จะขึ้นอยู่กับประพจน์เดี่ยวที่ตัวมันเองจะปฏิเสธ ประพจน์ปฏิเสธจะมีตัวแปรเพียงตัวเดียวแต่จะนับเป็นประพจน์เชิงซ้อน เพราะประพจน์เดี่ยวนั้นได้ถูกปฏิเสธอีกทีหนึ่งจึงเท่ากับว่ามีประพจน์เดี่ยวที่สองที่ตรงกันข้ามกับประพจน์เดี่ยวแรกเกิดขึ้นมา ค่าความจริงของประพจน์ปฏิเสธจึงมีเพียง 2 กรณีเท่านั้น คือ T (จริง) กับ F (เท็จ) เช่น สมมติให้ P แทนประพจน์ว่า “วันนี้ฝนตก” ~ P ก็จะแทนการปฏิเสธประพจน์ว่า “วันนี้ฝนตก” นั่นคือ เท่ากับ “ไม่เป็นความจริงที่ว่าวันนี้ฝนตก” จะได้ตารางความจริงดังนี้

P	~ P
T	F
F	T

ผลของการปฏิเสธประพจน์เดิมจะทำให้เราได้ค่าความจริงที่ตรงกันข้ามกับประพจน์ที่ถูกปฏิเสธเสมอ

คือ ถ้า P มีค่าความจริงเป็น T แล้ว ~ P ก็จะมีค่าเป็น F ในทางกลับกัน ถ้า P มีค่าความจริงเป็น F แล้ว ~ P ก็จะมีค่าเป็น T

(2) ตารางความจริงพื้นฐานของประพจน์รวม

ประพจน์รวมคือประพจน์ซ้อน 2 ประพจน์มาสัมพันธ์กันด้วยตัวเชื่อม “และ”, “กับ”, “แต่”, “ส่วน”, “เมื่อ” หรือ “อย่างไรก็ตาม” ซึ่งตรงกับสัญลักษณ์ที่นิยมใช้กันในตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ว่า “.” ตัวอย่างเช่น “นายทองดีเป็นคนขยัน แต่นายบุญจันทร์เป็นคนเกียจคร้าน” แปลเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า P . Q โดยที่ P แทนประพจน์ว่า”นายทองดีเป็นคนขยัน” และ Q แทนประพจน์ว่า “นายบุญจันทร์เป็นคนเกียจคร้าน” เราจะได้ตารางความจริงของประพจน์รวมดังนี้

P	Q	P . Q
T	**T**	**T**
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ความสัมพันธ์ที่เป็นไปได้ของประพจน์รวม มี 4 กรณีคือ

1. เมื่อ P เป็น จริง และ Q เป็น จริง (P . Q) ก็จะเป็น จริง
2. เมื่อ P เป็น จริง และ Q เป็น เท็จ (P . Q) ก็จะเป็น เท็จ

3. เมื่อ P เป็น เท็จ และ Q เป็น จริง (P . Q) ก็จะเป็น เท็จ
4. เมื่อ P เป็น เท็จ และ Q เป็น เท็จ (P . Q) ก็จะเป็น เท็จ

สรุปว่า

มีเพียงกรณีเดียวเท่านั้นที่ (P . Q) จะได้ผลลัพธ์เป็น T คือ เมื่อ P เป็น T และ Q เป็น T คือ T และ T เท่านั้นจึงเป็น T

(3) ตารางความจริงพื้นฐานของประพจน์เลือกรวม

ประพจน์เลือกรวมคือประพจน์ซ้อน 2 ประพจน์ที่มาสัมพันธ์กันด้วยตัวเชื่อม “หรือ” หมายถึง การเลือกอย่างใดอย่างหนึ่ง หรือทั้งสองอย่าง ซึ่งตรงกับสัญลักษณ์ที่นิยมใช้กันในตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ว่า “v” ตัวอย่างเช่น สมมติให้ P v Q แทนประพจน์เลือกรวมประพจน์ใดประพจน์หนึ่ง เช่น “นายวิชัยจะไปเรียนหนังสือหรือจะอยู่บ้าน” จะได้ตารางความจริงที่เป็นไปได้ของประพจน์ดังกล่าวนี้ดังนี้

P	Q	P v Q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	**F**	**F**

ความสัมพันธ์ที่เป็นไปได้ของประพจน์เลือกรวม มี 4 กรณีคือ
1. เมื่อ P เป็น จริง และ Q เป็น จริง (P v Q) ก็จะเป็น จริง
2. เมื่อ P เป็น จริง และ Q เป็น เท็จ (P v Q) ก็จะเป็น จริง
3. เมื่อ P เป็น เท็จ และ Q เป็น จริง (P v Q) ก็จะเป็น จริง
4. เมื่อ P เป็น เท็จ และ Q เป็น เท็จ (P v Q) ก็จะเป็น เท็จ

สรุปว่า

มีเพียงกรณีเดียวเท่านั้นที่ (P v Q) จะได้ผลลัพธ์เป็น F คือ เมื่อ P เป็น F และ Q เป็น F คือ F และ F เท่านั้นจึงเป็น F

(4) ตารางความจริงพื้นฐานของประพจน์เลือกเดี่ยว

ประพจน์เลือกเดี่ยว คือ ประพจน์ซ้อน 2 ประพจน์ที่มาสัมพันธ์กันด้วยตัวเชื่อม “หรือ” หมายถึง การเลือกอย่างใดอย่างหนึ่ง แต่ไม่ใช่ทั้งสองอย่าง เพราะหากเลือกทั้งสองอย่างถือว่าผิดวัตถุประสงค์ของการเลือกชนิดนี้ ซึ่งตรงกับสัญลักษณ์ที่นิยมใช้กันในตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ว่า “Λ” ตัวอย่างเช่น สมมติให้

P ∧ Q แทนประพจน์เลือกรวมประพจน์ใดประพจน์หนึ่ง เช่น “วันนี้เป็นวันจันทร์หรือวันอังคาร” จะได้ตารางความจริงที่เป็นไปได้ของประพจน์ดังกล่าวนี้ดังนี้

P	Q	P∧Q
T	**T**	**F**
T	F	T
F	T	T
F	**F**	**F**

ความสัมพันธ์ที่เป็นไปได้ของประพจน์เลือกรวม มี 4 กรณีคือ

1. เมื่อ P เป็น จริง และ Q เป็น จริง (P ∧ Q) ก็จะเป็น เท็จ
2. เมื่อ P เป็น จริง และ Q เป็น เท็จ (P ∧ Q) ก็จะเป็น จริง
3. เมื่อ P เป็น เท็จ และ Q เป็น จริง (P ∧ Q) ก็จะเป็น จริง
4. เมื่อ P เป็น เท็จ และ Q เป็น เท็จ (P ∧Q) ก็จะเป็น เท็จ

สรุปว่า

มีเพียง 2 กรณีเท่านั้นที่ (P ∧ Q) จะได้ผลลัพธ์เป็น F คือ
(1) เมื่อ P เป็น T และ Q เป็น T คือ T และ T จึงเป็น F
(2) เมื่อ P เป็น F และ Q เป็น F คือ F และ F จึงเป็น F

(5) ตารางความจริงพื้นฐานของประพจน์เงื่อนไข

ประพจน์เงื่อนไข คือ ประพจน์ซ้อน 2 ประพจน์ที่มาสัมพันธ์กันด้วยตัวเชื่อม “ถ้า.....แล้ว, ก็.....” หมายถึง ประพจน์หนึ่งเป็นเงื่อนไขให้เกิดอีกประพจน์หนึ่ง ประพจน์แรก เรียกว่า ประพจน์ที่เป็นสาเหตุ (antecedent) ส่วนประพจน์ที่สองที่ตามมา เรียกว่า ประพจน์ที่เป็นผล (consequent) สัญลักษณ์ที่นิยมใช้กันในตรรกศาสตร์ของประพจน์นี้ คือ เครื่องหมายเกือกม้า “ ⊃ ” ภาษาอังกฤษอ่านว่า “If......., then.......” เป็นต้น ตัวอย่างเช่น สมมติให้ P ⊃ Q แทนประพจน์เงื่อนไขชนิดใดชนิดหนึ่ง เช่น “ถ้าวันนี้เป็นวันจันทร์แล้ว, พรุ่งนี้ก็จะเป็นวันอังคาร” จะได้ตารางความจริงที่เป็นไปได้ของประพจน์ดังกล่าวนี้ดังนี้

P	Q	P⊃Q
T	T	T
T	**F**	**F**
F	T	T
F	F	T

ความสัมพันธ์ที่เป็นไปได้ของประพจน์เลือกรวม มี 4 กรณีคือ

1. เมื่อ P เป็น จริง และ Q เป็น จริง (P ⊃ Q) ก็จะเป็น จริง
2. เมื่อ P เป็น จริง และ Q เป็น เท็จ (P ⊃ Q) ก็จะเป็น เท็จ
3. เมื่อ P เป็น เท็จ และ Q เป็น จริง (P ⊃ Q) ก็จะเป็น จริง
4. เมื่อ P เป็น เท็จ และ Q เป็น เท็จ (P ⊃ Q) ก็จะเป็น จริง

สรุปว่า

มีเพียงกรณีเดียวเท่านั้นที่ (P ⊃ Q) จะได้ผลลัพธ์เป็น F คือ
เมื่อ P เป็น T แต่ Q เป็น F คือ T และ F จึงเป็น F

(6) ตารางความจริงพื้นฐานของประพจน์สมภาค

ประพจน์สมภาค คือ ประพจน์เชิงซ้อน 2 ประพจน์ที่มาสัมพันธ์กันด้วยสันธานว่า “ก็ต่อเมื่อ..... เท่านั้น” หรือ “เท่ากับว่า” เป็นต้น ประพจน์สมภาคนี้จะมีความหมายว่าทั้งประพจน์หน้าและประพจน์หลังมีค่าเท่ากันหรือเสมอกัน อีกทั้งต่างฝ่ายต่างก็สามารถเป็นเงื่อนไขหรือผลของกันและกันได้ จึงเรียกชื่อในภาษาอังกฤษว่า Biconditional Proposition สัญลักษณ์ที่นิยมใช้กันในตรรกศาสตร์ของประพจน์สมภาค คือ สัญลักษณ์ 3 ขีด (Three Bars) “ ≡ ” ตัวอย่างเช่น สมมติให้ P ≡ Q แทนญัตติสมภาคประพจน์ใดประพจน์หนึ่ง เช่น “คนตายก็ต่อเมื่อหมดลมหายใจเท่านั้น” จะได้ตารางความจริงที่เป็นไปได้ของประพจน์ดังกล่าวนี้ดังนี้

P	Q	P ≡ Q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

ความสัมพันธ์ที่เป็นไปได้ของประพจน์เลือกรวม มี 4 กรณีคือ

1. เมื่อ P เป็น จริง และ Q เป็น จริง (P ≡ Q) ก็จะเป็น จริง
2. เมื่อ P เป็น จริง และ Q เป็น เท็จ (P ≡ Q) ก็จะเป็น เท็จ
3. เมื่อ P เป็น เท็จ และ Q เป็น จริง (P ≡ Q) ก็จะเป็น เท็จ
4. เมื่อ P เป็น เท็จ และ Q เป็น เท็จ (P ≡ Q) ก็จะเป็น จริง

สรุปว่า

มีเพียง 2 กรณีเท่านั้นที่ (P ≡ Q) จะได้ผลลัพธ์เป็น T คือ
(1) เมื่อ P เป็น T และ Q เป็น T คือ T และ T จึงเป็น T
(2) เมื่อ P เป็น F และ Q เป็น F คือ F และ F จึงเป็น T

เพื่อให้เข้าใจและจดจำค่าความจริงของตารางความจริงพื้นฐานทั้งหมด เราอาจจะจดจำเนื้อเพลงค่าความจริง ซึ่งมีทำนองจิงเกิ้ลเบล ดังนี้

เพลงค่าความจริง

ทำนอง จิงเกิ้ลเบล

P เป็นจริง Q เป็นจริง	P และ Q เป็นจริง
สามวิธีอื่นไม่จริง	จงจำไว้ให้ดีนะ
P ไม่จริง Q ไม่จริง	P หรือ Q ไม่จริง
สามวิธีอื่นต้องจริง	จำไว้เถิด คนดี
ถ้า P จริง แล้ว Q ไม่จริง	ผลลัพธ์ต้องไม่จริง
สามวิธีอื่นต้องจริง	จำไว้นะคนดี
P เป็นจริง Q เป็นจริง	P iff Q เป็นจริง
P ไม่จริง Q ไม่จริง	P iff Q ก็จะจริง เอย

แบบฝึกหัดบทที่ 4

1. ตารางความจริงคืออะไร? มีความสำคัญต่อการพิสูจน์ในตรรกศาสตร์ว่าด้วยประพจน์อย่างไร? อธิบาย

2. ค่าความจริงคืออะไร? มีกี่อย่าง? อะไรบ้าง?

3. ถ้าเรามีประพจน์เดี่ยวอยู่หนึ่งประพจน์ จะมีค่าความจริงที่เป็นไปได้กี่ค่า? เพราะเหตุใด?

4. ประพจน์ว่า "ถ้ามีความกดอากาศต่ำแล้ว ฝนก็จะตกในไม่ช้า" มีค่าความเป็นจริงที่เป็นเท็จและเป็นจริงกี่กรณี? จงแจกแจงรายละเอียด

5. ประพจน์ว่า "อุษามณีทั้งสวยและเก่ง" มีค่าความจริงที่เป็นเท็จกี่กรณี เพราะเหตุใด?

6. ประพจน์ว่า "แม้ว่าปองพลหรือสนธยาได้เป็นประธานสมาคมยิงปืนแห่งประเทศไทยก็ตาม ก็ยังคงมีปัญหาภายในสมาคมอยู่ดี" มีค่าความจริงที่เป็นไปได้กี่กรณี? จงอธิบาย

7. ประพจน์ว่า "อรอุมาได้รับปริญญาเกียรตินิยมอันดับหนึ่งก็เท่ากับว่าเธอสอบได้คะแนนเฉลี่ยสะสมเกิน 3.50 ขึ้นไป" มีค่าความจริงที่เป็นไปได้กี่กรณี? เพราะเหตุใด?

8. ประพจน์ว่า "คนเราจะรู้ว่าตนเองอ้วนก็ต่อเมื่อรู้ว่าน้ำหนักของตนเองเพิ่มมากขึ้น" มีค่าความจริงอย่างไร? อธิบาย

9. ประพจน์ว่า "ที่ว่ากันว่าศิริลักษณ์เป็นนักร้องและเป็นดารานักแสดงนั้นไม่เป็นความจริงแต่อย่างใด" มีค่าความจริงอย่างไร? อธิบาย

10. ประพจน์ว่า "มหาวิทยาลัยบูรพาเป็นมหาวิทยาลัยในกำกับของรัฐหรือเป็นมหาวิทยาลัยเอกชน" มีค่าความจริงอย่างไร? อธิบาย

แผนการจัดการเรียนรู้บทที่ 5

เรื่อง การถอดประพจน์เป็นสัญลักษณ์และการใส่วงเล็บ เวลา 3 ชั่วโมง

****

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นิสิตสามารถถอดประพจน์เป็นสัญลักษณ์และใส่วงเล็บเพื่อกำหนดขอบเขตความสัมพันธ์ของประพจน์ได้อย่างถูกต้อง

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. ถอดประพจน์เป็นสัญลักษณ์ได้
2. ใส่วงเล็บเพื่อกำหนดขอบเขตความสัมพันธ์ของประพจน์ได้อย่างถูกต้อง

2. แนวคิดหลัก (สาระสำคัญ)

การถอดประพจน์เป็นสัญลักษณ์ คือ วิธีทำประพจน์ที่เป็นภาษาถ้อยคำให้เป็นสัญลักษณ์ โดยใช้ตัวแปรเฉพาะตัวใดตัวหนึ่งแทนหนึ่งประพจน์ในตรรกศาสตร์ว่าด้วยประพจน์ และใช้ตัวแปร 2 ตัวแทนหนึ่งประพจน์ในตรรกศาสตร์ภาคขยาย

การใส่วงเล็บ คือ วิธีการนำวงเล็บมาใช้เพื่อกำหนดขอบเขตความสัมพันธ์ของประพจน์ที่ถอดเป็นสัญลักษณ์แล้ว เพื่อป้องกันความสับสน

3. เนื้อหาสาระ

1. การถอดประพจน์เป็นสัญลักษณ์
2. การใส่วงเล็บ

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. อาจารย์แจ้งจุดประสงค์ให้นิสิตทราบ
2. อาจารย์แนะนำการถอดประพจน์ที่เป็นภาษาถ้อยคำเป็นสัญลักษณ์และการใส่วงเล็บ
3. นิสิตแบ่งกลุ่มเป็น 4 กลุ่ม โดยให้แต่ละกลุ่มศึกษาประเด็นดังนี้

กลุ่มที่ 1 หาตัวอย่างประพจน์ซ้อนที่เป็นภาษาถ้อยคำมา 10 ตัวอย่าง และหาตัวอย่างข้ออ้างเหตุผลที่เป็นภาษาถ้อยคำมา 5 ตัวอย่าง ช่วยกันถอดเป็นสัญลักษณ์และใส่วงเล็บกำกับ เสร็จแล้วส่งให้กลุ่มที่ 2 ตรวจความถูกต้อง

กลุ่มที่ 2 หาตัวอย่างประพจน์ซ้อนที่เป็นภาษาถ้อยคำมา 10 ตัวอย่าง และหาตัวอย่างข้ออ้างเหตุผลที่เป็นภาษาถ้อยคำมา 5 ตัวอย่าง ช่วยกันถอดเป็นสัญลักษณ์และใส่วงเล็บกำกับ เสร็จแล้วส่งให้กลุ่มที่ 1 ตรวจความถูกต้อง

กลุ่มที่ 3 หาตัวอย่างประพจน์ซ้อนที่เป็นภาษาถ้อยคำมา 10 ตัวอย่าง และหาตัวอย่างข้ออ้างเหตุผลที่เป็นภาษาถ้อยคำมา 5 ตัวอย่าง ช่วยกันถอดเป็นสัญลักษณ์และใส่วงเล็บกำกับ เสร็จแล้วส่งให้กลุ่มที่ 4 ตรวจความถูกต้อง

กลุ่มที่ 4 หาตัวอย่างประพจน์ซ้อนที่เป็นภาษาถ้อยคำมา 10 ตัวอย่าง และหาตัวอย่างข้ออ้างเหตุผลที่เป็นภาษาถ้อยคำมา 5 ตัวอย่าง ช่วยกันถอดเป็นสัญลักษณ์และใส่วงเล็บกำกับ เสร็จแล้วส่งให้กลุ่มที่ 3 ตรวจความถูกต้อง

4. ตัวแทนของนิสิตแต่ละกลุ่มนำเสนอผลการศึกษาของกลุ่ม

5. อาจารย์และนิสิตร่วมกันอภิปรายและสรุปผลการศึกษาอีกครั้งหนึ่ง

6.นิสิตทำแบบฝึกหัดประจำบทที่ 5

7.อาจารย์และนิสิตร่วมกันเฉลยแบบฝึกหัด

8. นิสิตสรุปจดบันทึกลงในสมุดของนิสิต

5. แหล่งการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอนวิชา ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์บทที่ 5
2. แบบฝึกหัดบทที่ 5
3. Power-point

6. กระบวนการวัดผลและประเมินผล

1. การร่วมกันสรุป, อภิปรายและตอบคำถาม
2. การตอบคำถามในแบบฝึกหัด
3. การสรุปจดบันทึกของนิสิต
4. เอกสารแบบฝึกหัด

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

(...)

อาจารย์สอน

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

....

....

บทที่ 5

การถอดประพจน์เป็นสัญลักษณ์และการใส่วงเล็บ

(Symbolyzing Statements and Use of Brackets)

5.1 การถอดประพจน์เป็นสัญลักษณ์ (Symbolizing Statements)

ก่อนที่เราจะลงมือพิสูจน์ว่าประพจน์ที่ให้มานั้นมีค่าความจริงแห่งความสัมพันธ์เป็นเช่นใด หรือก่อนที่จะพิสูจน์ว่าข้ออ้างเหตุผลที่ให้มาสมเหตุสมผลหรือไม่ สิ่งแรกที่เราจะต้องทำหากประพจน์หรือข้ออ้างเหตุผลนั้นยังอยู่ในรูปของคำพูดก็คือ ต้องถอดคำพูดในประพจน์หรือข้ออ้างเหตุผลนั้นเป็นสัญลักษณ์เสียก่อน ทั้งนี้ก็เพื่อจะได้สะดวกในการพิสูจน์ ประพจน์หรือข้ออ้างเหตุผลไม่ว่าจะสลับซับซ้อนหรือไม่อย่างไร เมื่อเราถอดเป็นสัญลักษณ์แล้วจะดูสั้นและง่ายต่อการตรวจสอบ

ประพจน์หรือข้ออ้างเหตุผลที่เป็นคำพูดนั้นจะไม่มีวงเล็บกำกับเพื่อบอกขอบเขตของประพจน์ เพราะเราสามารถจะสังเกตได้จากเนื้อหาของประพจน์นั้นๆ แต่เมื่อเราถอดประพจน์ออกเป็นสัญลักษณ์แล้ว จำเป็นที่เราต้องใส่วงเล็บกำกับเพื่อบอกขอบเขตของประพจน์หรือข้ออ้างเหตุผลนั้นเสมอ เพื่อป้องกันความสับสนและเข้าใจผิด ขอให้เราดูตัวอย่างต่อไปนี้ประกอบ

ถ้าดวงตาขยันเรียนแล้ว เธอก็จะสอบได้

ดวงตาขยันเรียน

ดังนั้น เธอจึงสอบได้

ในข้ออ้างเหตุผลแต่ละชุด สิ่งหนึ่งที่เราควรคำนึงก็คือ ข้อสรุปจะต่อเนื่องมาจากข้ออ้างเสมอ จะไม่มีการสรุปเกินข้ออ้าง หากสรุปเกินข้ออ้าง ข้ออ้างเหตุผลนั้นก็จะไม่สมเหตุสมผลในทางตรรกะ เพราะเมื่อเรายอมรับข้ออ้าง เราก็ต้องยอมรับข้อสรุปของมันด้วย ดังนั้น จากตัวอย่างข้างบนซึ่งเป็นประพจน์เงื่อนไขเชิงเนื้อหา ซึ่งมีข้ออ้างเป็นสาเหตุและมีข้อสรุปเป็นผล ก็จะได้ดังนี้

ถ้า (ข้ออ้าง 1 และข้ออ้าง 2) แล้ว ข้อสรุป

ในข้ออ้างเหตุผลที่มี “ถ้า......แล้ว......” เป็นตัวเชื่อมหลัก เราจะเขียนข้ออ้างไว้ทางซ้ายมือ และเขียนข้อสรุปไว้ทางขวามือของเครื่องหมายเกือกม้าเสมอ ดังนั้น จากตัวอย่างข้างบน เราก็จะได้

(ถ้าดวงตาขยันเรียนแล้ว เธอก็จะสอบได้) และเธอก็ขยันเรียน $\supset$ ดังนั้น เธอจึงสอบได้

สิ่งที่ควรจดจำอีกประการหนึ่งดังได้กล่าวมาแล้วในเรื่องที่ว่าด้วยการใช้วงเล็บ ก็คือ ตัวเชื่อมจะใช้เชื่อมประพจน์ 2 ประพจน์เท่านั้น และเราก็ใช้วงเล็บเพื่อแสดงให้เห็นว่าประพจน์ไหนที่เชื่อมด้วยตัวเชื่อมอะไร และตัวเชื่อมหลักใช้เชื่อมระหว่างประพจน์ใดบ้าง

อันดับต่อไปจึงค่อยไปพิจารณาประพจน์สาเหตุและดูว่าตัวเชื่อมตรงนั้นคืออะไรและมีขอบเขตขนาดไหน เราพบว่าตัวเชื่อมรวมคือตัวเชื่อมระหว่างประพจน์ซ้อน “ถ้าดวงตาขยันเรียนแล้ว เธอก็จะสอบได้” กับประพจน์เดี่ยว “ดวงตาขยันเรียน” ก็จะเป็นดังนี้

(ถ้าดวงตาขยันเรียนแล้ว เธอก็จะสอบได้) . ดวงตาขยันเรียน

เมื่อมาถึงตรงนี้ เรายังไม่สามารถจะเชื่อมประพจน์ที่เป็นสาเหตุกับประพจน์ที่เป็นผลด้วยเครื่องหมายเกือกม้าได้ทันที เพราะหากเราทำเช่นนั้นแล้ว จะเกิดความกำกวมขึ้น คือเราจะกำหนดขอบเขตแห่งความสัมพันธ์ระหว่างข้ออ้างที่เป็นสาเหตุกับข้อสรุปที่เป็นผลไม่ได้เลย ดังนั้น เราต้องกำหนดให้ได้ก่อนว่า ข้ออ้างใดบ้างที่เป็นสาเหตุและเชื่อมด้วยตัวเชื่อมอะไรบ้างและมีขอบเขตกว้างแคบขนาดไหน เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างข้ออ้างที่เป็นสาเหตุได้แล้ว ก็จัดการใส่วงเล็บให้ข้ออ้างนั้นอย่างชัดเจน ว่าวงเล็บเล็กควรจะมีขอบเขตขนาดไหนและวงเล็บปีกกาควรจะมีขอบเขตกว้างคลอบคลุมความสัมพันธ์ใดบ้าง ต่อไปจึงค่อยใส่ตัวเชื่อมหลัก ดังนี้

[(ถ้าดวงตาขยันเรียนแล้ว เธอก็จะสอบได้) . ดวงตาขยันเรียน] ⊃ เธอจึงสอบได้

จะเห็นได้ว่า เราเกือบจะแทนค่าแห่งความสัมพันธ์ระหว่างข้ออ้างและข้อสรุปด้วยตัวเชื่อมได้เกือบหมดแล้ว เหลืออยู่แค่ข้ออ้างแรกคือ "ถ้าดวงตาขยันเรียนแล้ว เธอก็จะสอบได้" เมื่อมาถึงตรงนี้ เราก็ใส่ตัวเชื่อมภายในความสัมพันธ์ของข้ออ้างเหล่านี้ได้เลย ดังนี้

[(ดวงตาขยันเรียน ⊃ เธอก็จะสอบได้) . เธอขยันเรียน] ⊃ เธอจึงสอบได้

ขั้นตอนสุดท้ายของการถอดข้อความออกเป็นสัญลักษณ์ก็คือ การใช้อักษรย่อแทนประพจน์เดี่ยวทั้งหมดนั้นเสีย สมมติว่า เราใช้ A แทน "ดวงตาขยันเรียน" และใช้ C แทน "เธอก็จะสอบได้" เราก็จะได้ข้ออ้างเหตุผลที่เป็นสัญลักษณ์สมบูรณ์ดังนี้

$[(A \supset C) . A] \supset C$

ปัญหายุ่งยากอันหนึ่งที่เราพบในการถอดข้อความออกเป็นสัญลัษณ์ก็คือ ใช่ว่าข้ออ้างเหตุผลทุกข้ออ้างเหตุผลจะเรียงกันไปตามลำดับ กล่าวคือจากข้ออ้างที่ 1 ไปสู่ข้ออ้างที่ 2 และข้ออ้างที่ 3 ไปเรื่อยจนถึงข้อสรุปเป็นอันดับสุดท้ายเสมอไป บางครั้งข้ออ้างเหตุผลก็อาจจะเริ่มต้นที่ข้อสรุปก่อนเป็นอันดับแรกแล้วจึงตามมาด้วยข้ออ้างแต่ละข้ออ้างไปเรื่อยๆ ขอให้ดูตัวอย่างนี้ประกอบ

"ฝนจะตกในไม่ช้า เพราะบารอมิเตอร์ลดต่ำลงอย่างรวดเร็ว และถ้าบารอมิเตอร์ลดต่ำลงอย่างรวดเร็วแล้ว ฝนก็จะตกในไม่ช้า"

ในตัวอย่างก่อนหน้านี้ เราจะรู้ว่าประพจน์ไหนเป็นข้อสรุป เพราะสังเกตจากคำว่า "เพราะฉะนั้น" เป็นต้น แต่ในตัวอย่างนี้ ข้ออ้างจะสื่อให้รู้ด้วยคำว่า "เพราะว่า" เราจึงต้องมองหาข้อสรุปด้วยความรอบคอบและถี่ถ้วน ข้อสรุปของข้ออ้างเหตุผลนี้ก็คือประพจน์แรกนั่นเอง ส่วนที่อยู่หลังถัดมาทั้งหมดคือข้ออ้าง ดังนั้น เราพอจะเริ่มต้นถอดข้ออ้างเหตุผลนี้เป็นสัญลักษณ์ด้วยการเขียนข้ออ้างที่เป็นสาเหตุของข้อสรุปไปตามลำดับได้ดังนี้

(บารอมิเตอร์ลดต่ำลงอย่างรวดเร็ว และถ้าบารอมิเตอร์ลดต่ำลงอย่างรวดเร็ว ฝนก็จะตกในไม่ช้าเสมอ) ⊃ ฝนจะตกในไม่ช้า

เพื่อกำหนดขอบเขตแห่งความสัมพันธ์ระหว่างประพจน์ในข้ออ้างให้ชัดเจน เราก็ควรจะนำวงเล็บมาใช้กำกับอีกต่อหนึ่ง พร้อมกับกำหนดตัวเชื่อมระหว่างประพจน์ด้วยตัวเชื่อมต่อไปดังนี้

[(บารอมิเตอร์ลดต่ำลงอย่างรวดเร็ว) และ(ถ้าบารอมิเตอร์ลดต่ำลงอย่างรวดเร็ว ฝนก็จะตกในไม่ช้าเสมอ)] ⊃ ฝนจะตกในไม่ช้า

ต่อจากนี้ เราก็เริ่มถอดประพจน์ทั้งหมดเป็นสัญลักษณ์ได้เลย โดยสมมติให้ B แทนข้อความว่า "บารอมิเตอร์จะลดต่ำลงอย่างรวดเร็ว" และให้ R แทนข้อความว่า "ฝนก็จะตกในไม่ช้า" ดังนั้น เราสามารถจะถอดข้ออ้างเหตุผลข้างบนให้เป็นสัญลักษณ์ที่สมบูรณ์ได้ดังนี้

$[(B \, . \, (B \supset R)] \supset R$

มาถึงตรงนี้ เราพอจะสรุปขั้นตอนการถอดประพจน์เป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

1. มองหาตัวเชื่อมหลักของประพจน์หรือข้ออ้างเหตุผลที่ให้มา
2. ใส่วงเล็บประพจน์ 2 ประพจน์ที่มีความสัมพันธ์กันอย่างใกล้ชิดที่สุด
3. ตรวจดูประพจน์แรกที่อยู่ทางซ้ายมือสุดว่าเป็นประพจน์เดี่ยวหรือประพจน์ซ้อน
4. ถ้าประพจน์ดังกล่าวเป็นประพจน์ซ้อนก็มองหาตัวเชื่อมระหว่างประพจน์ดังกล่าว
5. ใส่วงเล็บปีกกาหรือวงเล็บใหญ่เพื่อกำหนดขอบเขตแห่งความสัมพันธ์ของประพจน์หรือข้ออ้างเหตุผลที่กว้างกว่าอีกชั้นหนึ่ง จำไว้เสมอว่า หากมีความจำเป็นก็อาจจะเพิ่มหรือเปลี่ยนวงเล็บได้
6. เปลี่ยนคำเชื่อมระหว่างประพจน์หรือข้ออ้างเหตุผลเป็นตัวเชื่อม
7. ถอดประพจน์เป็นสัญลักษณ์ด้วยการแทนค่าด้วยตัวแปรเฉพาะ
8. ตรวจดูว่าตัวแปรเฉพาะนั้นถูกต้องตามความหมายเดิมหรือไม่

5.2 การใส่วงเล็บ (Use of Brackets)

ไม่ว่าประพจน์จะซับซ้อนขนาดไหน เราก็สามารถจะมั่นใจได้ว่าจะรู้ค่าความจริงของประพจน์ดังกล่าวได้ โดยการสร้างตารางความจริง ตัวอย่างเช่น เราอาจจะมีประพจน์ซ้อน 2 ประพจน์มาเชื่อมกัน และแต่ละประพจน์ที่เชื่อมกันนั้นก็ยังเป็นประพจน์ซ้อนอีกทอดหนึ่ง แต่ถึงอย่างไรเราก็สามารถวิเคราะห์ประพจน์เหล่านั้นลงเป็นประพจน์เดี่ยว ซึ่งเป็นส่วนประกอบของมันและตัวเชื่อมที่ใช้เชื่อมประพจน์เหล่านั้นเข้าด้วยกันได้

ตัวเชื่อมแต่ละตัวจะเชื่อมประพจน์โดยเฉพาะ 2 ประพจน์เท่านั้นไม่ว่าประพจน์เหล่านี้จะเป็นประพจน์เดี่ยวหรือประพจน์ซ้อน เพราะฉะนั้น ถ้าเรามีประพจน์อยู่ประพจน์หนึ่งในลักษณะประพจน์ซ้อน 2 ประพจน์เชื่อมกัน หรือในลักษณะที่ประพจน์เดี่ยวหนึ่งประพจน์เชื่อมกับประพจน์ซ้อนหนึ่งประพจน์ สิ่งสำคัญที่เราจะต้องคำนึงก็คือเราจะต้องกำหนดให้ชัดเจนว่า ทั้ง 2 ประพจน์นั้นเชื่อมกันอย่างไร เราทำได้ด้วยการใช้วงเล็บกำกับ ตัวอย่างเช่นประพจน์ต่อไปนี้

"ถ้าอัตราเงินเฟ้อยังคงดำเนินต่อไปแล้ว ราคาสินค้าก็จะสูงขึ้นและการว่างงานก็จะเพิ่มสูงขึ้น"

ข้ออ้างนี้อาจจะถอดเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้ $I \supset (P \, . \, U)$

I = อัตราเงินเฟ้อยังดำเนินต่อไป

P = ราคาสินค้าเพิ่มขึ้น

U = การว่างงานเพิ่มสูงขึ้น

เมื่อเราใช้วงเล็บกำกับขอบเขตของประพจน์แล้ว จะทำให้เรารู้แน่ชัดว่า ในประพจน์ 2 ประพจน์นั้น ประพจน์ไหนที่เชื่อมด้วยตัวเชื่อมเงื่อนไข และ 2 ประพจน์ไหนที่เชื่อมด้วยตัวเชื่อมรวม เราจะพบว่าในประพจน์ที่สลับซับซ้อนกันมากกว่านี้ เราจำเป็นต้องใช้วงเล็บอื่นๆ เข้ามาช่วย ตัวอย่างเช่น ถ้าเราต้องการจะเชื่อมประพจน์ข้างบนทั้งหมดเข้ากับประพจน์อื่น เช่น “อัตราเงินเฟ้อยังคงดำเนินต่อไป” เราจำเป็นจะต้องปิดประพจน์ข้างบนไว้ในวงเล็บ เช่น $[I \supset (P \,.\, U)] \,.\, I$

เมื่อเราใส่วงเล็บให้กับประพจน์ที่มีอยู่เดิมในลักษณะนี้ เราย่อมจะทราบขอบเขตแห่งความสัมพันธ์ของมันได้เป็นอย่างดี นั่นคือ ประพจน์ทั้งหมดที่มีอยู่ในวงเล็บใหญ่ทั้งหมดไปเชื่อมกับ I ที่เพิ่มเข้ามาด้วยตัวเชื่อมและ ไม่ใช่ประพจน์ย่อยส่วนใดส่วนหนึ่งเท่านั้น

ถ้าเรานำประพจน์ I ที่เพิ่มเข้ามาใหม่มาเชื่อมกับประพจน์ที่มีอยู่เดิมโดยไม่ใส่วงเล็บใหญ่กำกับ เราก็จะได้ประพจน์ที่กำกวม คือ เราจะไม่สามารถกำหนดขอบเขตแห่งความสัมพันธ์ของประพจน์เหล่านี้ เช่น $I \supset P \,.\, U \,.\, I$

จากตัวอย่างนี้ เราจะไม่รู้เลยว่า เครื่องหมายเกือกม้า “ $\supset$ ” เชื่อม I และ P หรือว่า เชื่อม I กับประพจน์ซ้อน P . U แม้ในทางพีชคณิตหากว่าเราไม่เอาวงเล็บเข้าไปช่วยในการกำหนดขอบเขตแห่งความสัมพันธ์ก็จะเกิดความกำกวมขึ้นในลักษณะเดียวกัน เช่น 8 + 4 x 2 จากตัวอย่างนี้ เราไม่สามารถจะบอกได้ว่า เราควรจะเริ่มทำจากจุดไหนก่อน จาก 8 + 4 แล้วจึงคูณด้วย 2 หรือว่า คูณ 4 ด้วย 2 ก่อน แล้วจึงค่อยนำผลลัพธ์ที่ได้มาบวกกับ 8 จะเห็นได้ว่ามันไม่ชัดเจน แล้วผลลัพธ์ที่ได้ก็จะไม่เท่ากัน เพราะถ้าหากเราเลือกกรณีแรก เราจะได้ผลลัพธ์เป็น 24 แต่ถ้าเราเลือกทำกรณีหลังจะได้ผลลัพธ์เป็น 16 ซึ่งแตกต่างกันมาก ดังนั้น ในพีชคณิตจึงได้นำวงเล็บเข้ามาใช้เพื่อจะได้กำหนดขอบเขตแห่งความสัมพันธ์ของตัวเลขให้ชัดเจนลงไป จากตัวอย่าง เราก็จะได้ (8 + 4) x 2 หรือ 8 + (4 x 2) อย่างใดอย่างหนึ่ง ซึ่งก็ชัดเจนไม่กำกวมอีกต่อไป ดังนั้น วงเล็บจึงมีความสำคัญมากในการพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์หรือความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผล เพราะการกำหนดขอบเขตของประพจน์หรือข้ออ้างเหตุผลผิดก็จะทำให้การพิสูจน์พลอยผิดไปด้วย

วงเล็บที่ใช้กันในทางตรรกศาสตร์สัญลักษณ์นั้นมีดังนี้

1. ( ) เรียกว่า วงเล็บธรรมดา หรือวงเล็บเล็ก ใช้กับประพจน์ที่มีขอบเขตแห่งความสัมพันธ์กันใกล้ชิดที่สุดและแคบที่สุด

2 [ ] เรียกว่า วงเล็บใหญ่ ใช้กับประพจน์ที่มีขอบเขตแห่งความสัมพันธ์กันกว้างกว่าวงเล็บปีกกา

3. { } เรียกว่า วงเล็บปีกกา ใช้กับประพจน์ที่มีขอบเขตแห่งความสัมพันธ์กันกว้างกว่าวงเล็บเล็กออกไปอีก

4.| | เรียกว่า วงเล็บเส้นแนวดิ่ง ใช้เมื่อเรามีความต้องการจะกำหนดขอบเขตแห่งความสัมพันธ์ระหว่างประพจน์ที่มีความกว้างกว่าวงเล็บใหญ่

5. ‖ ‖ เรียกว่า วงเล็บเส้นแนวดิ่งคู่ ใช้เพื่อกำหนดขอบเขตแห่งความสัมพันธ์ของประพจน์ที่มีความกว้างมากที่สุด

ดูตัวอย่างต่อไปนี้ประกอบเพื่อจะได้เข้าใจเรื่องการใช้วงเล็บมากยิ่งขึ้น

ตัวอย่างที่ 1 $A . (B \supset C)$

วงเล็บเล็กในตัวอย่างที่หนึ่งนี้จะกำหนดขอบเขตแห่งความสัมพันธ์ของประพจน์ B กับ ประพจน์ C เท่านั้น และยังทำให้เรารู้ว่า ประพจน์ A นั้นมีความสัมพันธ์กับประพจน์ $B \supset C$ อย่างไร กล่าวคือ A จะสัมพันธ์กับ $B \supset C$ ทั้งหมด มิใช่มีความสัมพันธ์เฉพาะกับ B หรือกับ C อย่างใดอย่างหนึ่ง ถ้าไม่มีวงเล็บมากำหนดขอบเขตแห่งความสัมพันธ์ก็อาจจะทำให้เราเข้าใจผิดคิดว่า A มีความสัมพันธ์เฉพาะกับ B เท่านั้น

ตัวอย่างที่ 2 $(P \supset Q) . (Q \supset R)$

วงเล็บเล็กวงเล็บแรกในตัวอย่างที่สองนี้ จะกำหนดขอบเขตความสัมพันธ์ระหว่าง P และ Q ซึ่งเชื่อมด้วยตัวเชื่อม "ถ้า.....แล้ว......" เท่านั้น ส่วนวงเล็บเล็กวงเล็บที่สองจะกำหนดขอบเขตแห่งความสัมพันธ์ระหว่าง Q และ R ซึ่งเชื่อมด้วยตัวเชื่อม "ถ้า.....แล้ว......" เช่นกัน ส่วนตัวเชื่อมหลักคือ "และ" ในตัวอย่างนี้จะบอกให้เราทราบถึงขอบเขตแห่งความสัมพันธ์ระหว่าง $(P \supset Q)$ กับ $(Q \supset R)$

ตัวอย่างที่ 3 $[(P \supset Q) . (Q \supset R)] \supset (P \supset R)$

ในตัวอย่างที่ 3 นี้ วงเล็บเล็กแรกจะกำหนดความสัมพันธ์ระหว่าง P กับ Q เชื่อมด้วยตัวเชื่อม "ถ้า ..... แล้ว....." ส่วนวงเล็กเล็กวงเล็บที่สองจะกำหนดความสัมพันธ์ระหว่าง Q กับ R เชื่อมด้วยตัวเชื่อม "ถ้า ...... แล้ว......" และวงเล็บเล็กที่สามจะกำหนดความสันพันธ์ระหว่าง P กับ R เชื่อมด้วยตัวเชื่อม "ถ้า..... แล้ว ......" เช่นกัน ส่วนวงเล็บใหญ่จะเป็นตัวกำหนดขอบเขตแห่งความสัมพันธ์ของ $(P \supset Q) . (Q \supset R)$ กับ $(P \supset R)$ ซึ่งเชื่อมด้วยตัวเชื่อมเงื่อนไข หรือ "ถ้า ..... แล้ว ....." กล่าวคือ ทั้ง $(P \supset Q)$ กับ $(Q \supset R)$ รวมกันเป็นเงื่อนไขของ $(P \supset R)$ มิใช่เฉพาะ $(P \supset Q)$ หรือ $(Q \supset R)$ อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้นเป็นเงื่อนไข

ในประพจน์ซ้อนที่มีประพจน์ซ้อนเป็นองค์ประกอบ หนึ่งในตัวเชื่อมก็คือตัวเชื่อมหลัก ตัวเชื่อมหลักคือ ตัวเชื่อมที่มีขอบเขตแห่งความสัมพันธ์กว้างที่สุด ตัวเชื่อมหลักจะคลอบคลุมเนื้อหาทั้งหมดของประพจน์ จะเห็นว่าในตัวอย่างที่ 1 ตัวเชื่อมหลัก คือ ตัวเชื่อม "และ" และในตัวอย่างที่ 2 ก็มีตัวเชื่อม "และ" อีกเป็นตัวเชื่อมหลัก ส่วนในตัวอย่างที่ 3 มีตัวเชื่อม "ถ้า..... แล้ว....." เป็นตัวเชื่อมหลักที่เชื่อมระหว่าง $[(P \supset Q) . (Q \supset R)]$ กับ $(P \supset R)$ เมื่อประพจน์ที่มาสัมพันธ์กันมีวงเล็บกำกับอย่างชัดเจนเช่นนี้ ก็เป็นการง่ายในการพิจารณาดูขอบเขตแห่งความสัมพันธ์ของมันและจะทำให้เรารู้ว่า ประพจน์ที่ให้มานั้น มีตัวเชื่อมใดเป็นตัวเชื่อมหลัก ซึ่งจะทำให้การพิสูจน์ค่าความจริงและความสมเหตุสมผลของทั้งประพจน์และข้ออ้างเหตุผลถูกต้องไม่คลาดเคลื่อน

แบบฝึกหัดบทที่ 5

จงถอดข้อความต่อไปนี้เป็นสัญลักษณ์แล้วใส่วงเล็บให้ถูกต้อง

1. ถ้าสมชายมาแล้ว จอยก็จะมาด้วย และสมชายมา ดังนั้น จอยจึงมาด้วย (ให้ S แทน “สมชายมา” และ J แทน “จอยจะมาด้วย”)

2. ถ้ารถเมล์มาถึงช้า เราก็จะพลาดขบวนรถไฟ และเราจะพลาดขบวนรถไฟ เพราะรถเมล์มาถึงช้า (ให้ B แทน “รถเมล์มาถึงช้า” และ M แทน “เราก็จะพลาดขบวนรถไฟ”)

3. ถ้าอนุชาติไปเที่ยวพัทยาแล้ว บัวเผื่อนจะไปหัวหินและบุญตาจะไปเผาหญ้า บัวเผื่อนจะไปหัวหินและบุญตาจะไปเผาหญ้า เพราะฉะนั้น อนุชาติไปเที่ยวพัทยา (ให้ P แทน “อนุชาติไปเที่ยวพัทยา” ส่วน H แทน “บัวเผื่อนจะไปหัวหิน” และ B แทน “บุญตาจะไปเผาหญ้า”)

4. ถ้าสมปองซื้อปากกาและหนังสือ แต่ลำใยซื้อกระเป๋าและดอกไม้แล้ว สมจิตก็จะซื้อเสื้อและรองเท้า (ให้ P แทน “สมปองซื้อปากกา”, B แทน “สมปองซื้อหนังสือ”, L แทน “ลำใยซื้อกระเป๋า”, F แทน “ลำใยซื้อดอกไม้”, S แทน “สมจิตก็จะซื้อเสื้อ” และ N แทน “สมจิตก็จะซื้อรองเท้า”)

5. ไม่เป็นความจริงที่ว่า เขาซื้อสมุดบันทึกและหนังสือ

6. เขาซื้อสมุดบันทึก แต่เขาไม่ได้ซื้อหนังสือ

7. ไม่เป็นความจริงที่ว่า ถ้าสารหนูมีพิษแล้วมันจะแก้ไข้หวัดได้ (ให้ A แทน “สารหนูมีพิษ” และ C แทน “สารหนูจะแก้ไข้หวัดได้”)

8. ถ้าพยานปากเอกพูดความจริงแล้ว นายเสนาะก็จะผิด และนายเสนาะก็ผิด (ให้ C แทน “พยานปากเอกพูดความจริง” และ G แทน “นายเสนาะก็จะมีความผิด”)

9. ถ้าพยานปากเอกพูดความจริงแล้ว นายเสนาะก็จะมีความ ผิด แต่นายเสนาะไม่มีความผิด (ให้ C แทน “พยานปากเอกพูดความจริง” และ G แทน “นายเสนาะก็จะมีความผิด”)

10. ถ้าพยานปากเอกพูดความจริงแล้ว นายเสนาะก็จะมีความผิด แต่นายเสนาะไม่มีความผิด เพราะ ฉะนั้น พยานปากเอกจึงไม่ได้บอกความจริง

11. ถ้าก่อแก้ว พิกุลทองได้เป็นส.ส. เขาก็จะเป็นฝ่ายค้าน แต่ความจริงปรากฏว่าเขาไม่ได้เป็นส.ส. นั่นก็หมายความว่าเขาจะไม่ได้เป็นฝ่ายค้าน

12. ถ้าสุวิทย์ได้เป็นนายกรัฐมนตรี เขาก็จะเร่งสร้างความปรองดองให้แก่ชาติเป็นอันดับแรก ถ้าเขาเร่งสร้างความปรองดองให้แก่ชาติแล้ว เขาก็จะได้รับเลือกอีกครั้งในสมัยหน้า เพราะฉะนั้น ถ้าสุวิทย์เป็นนายกรัฐมนตรี เขาก็จะได้รับเลือกอีกครั้งในสมัยหน้า

13. ถ้าหากแดงอ่านหนังสือและดำออกกำลังกาย หรือเดือนทำกับข้าว ก็เป็นอันว่าแดง ดำ และเดือนต่างคนต่างทำกิจกรรม

14. ไม่เป็นความจริงเลยที่ว่าผู้ชายจะกลายเป็นเพศแม่ ส่วนผู้หญิงจะกลายเป็นเพศพ่อในยุคโลกาภิวัตน์ จะเป็นเช่นนั้นได้ก็ต่อเมื่อเพศพ่อเป็นผู้หญิงหรือเพศแม่เป็นผู้ชายตามธรรมชาติเท่านั้น

15. ถ้าอิ่มขยันทำงานก็จะได้เงินใช้ ถ้าอิ่มไม่ทำงานก็จะต้องลำบาก อิ่มจะต้องเลือกเอาเองว่าจะลำบากหรืออยากมีเงินใช้

16. ถ้าหากว่าวิชัยผู้เป็นหัวหน้าเป็นคนใจดีต่อวิชิตผู้เป็นลูกน้อง วิชิตก็จะเคารพนับถือวิชัยตลอดไป แต่ปรากฏว่าไม่เป็นความจริงเลยที่วิชิตเคารพนับถือวิชัย จึงเป็นอันว่าที่บอกว่าวิชัยเป็นหัวหน้าใจดีนั้นไม่เป็นความจริงเลย

17. ถ้าเปิดโอกาสให้คาเฟ่เปิดตลอดคืนแล้วทำให้อาชญากรรมลดลงได้และถ้าประชาชนส่วนใหญ่มีรายได้เพิ่มขึ้นด้วย ก็น่าจะอนุญาตให้เปิดได้ แต่บ้านเมืองเราขณะนี้อาชญากรรมไม่ได้ลดลงและประชาชนส่วนใหญ่ยังยากจนอยู่ (ไม่มีรายได้เพิ่มขึ้น) จึงไม่ควรเปิดคาเฟ่ตลอดคืน

18. ถ้าคนไทยรักบ้านเมืองกันแล้วก็จะต้องทำหน้าที่ของตัวให้ดีที่สุดและถ้าคนไทยทำหน้าที่ดีที่สุดแล้ว พวกเขาก็รักบ้านเมืองของพวกเขา

19. ถ้าเอมอรกำลังศึกษาอยู่ที่มหาวิทยาลัยบูรพา ก็แสดงว่า เธอเป็นนิสิตบูรพาแน่นอน และถ้าเอมอรไม่ได้ศึกษาอยู่ในมหาวิทยาลัยบูรพาเลย ก็แสดงว่า เธอไม่ได้เป็นนิสิตบูรพาอย่างแน่นอน ซึ่งเท่ากับว่าเอมอรกำลังศึกษาอยู่ที่มหาวิทยาลัยบูรพาและเธอก็เป็นนิสิตบูรพาด้วย หรือเธอไม่ได้กำลังศึกษาอยู่ในมหาวิทยาลัยบูรพาหรือไม่ได้เป็นนิสิตบูรพาอย่างใดอย่างหนึ่งแต่อย่างใด

20. ถ้าประเทศไทยไม่ปฏิรูปการศึกษาก็แสดงว่า เยาวชนของชาติจะด้อยคุณภาพกว่าประเทศเพื่อนบ้านอย่างไม่ต้องสงสัย ซึ่งก็เท่ากับว่าบ้านเมืองจะพัฒนาไปอย่างมีประสิทธิภาพไม่ได้เลย ประเทศไทยต้องปฏิรูปการศึกษา มิฉะนั้น เยาวชนของชาติจะด้อยคุณภาพกว่าประเทศเพื่อนบ้านอย่างไม่ต้องสงสัย อีกทั้งบ้านเมืองก็จะพัฒนาไปอย่างไร้ประสิทธิภาพ หากประเทศไทยปฏิรูปการศึกษาแล้ว ก็จะทำให้เยาวชนของชาติมีคุณภาพมากกว่าประเทศเพื่อนบ้านและบ้านเมืองก็จะพัฒนาไปอย่างมีประสิทธิภาพอย่างแน่นอน

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. อาจารย์แจ้งจุดประสงค์ให้นิสิตทราบ

2. อาจารย์แนะนำวิธีพิสูจน์แบบวิเคราะห์เฉพาะกรณีและวิธีพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดตรง

3. นิสิตแบ่งกลุ่มเป็น 4 กลุ่ม โดยให้แต่ละกลุ่มร่วมกันตั้งโจทย์และกำหนดค่าความจริงให้ประพจน์หรือข้ออ้างเหตุผลที่มีตัวแปรเฉพาะได้ไม่เกิน 4 ตัว จะมีกี่ตัวเชื่อมก็ได้ กลุ่มละ 5 ข้อ

4. นิสิตแต่ละกลุ่มร่วมกันหาค่าความจริงจากโจทย์ที่นิสิตกลุ่มอื่นกำหนด โดยสับเปลี่ยนกันทำ

5. นิสิตแลกเปลี่ยนกันตรวจคำตอบโดยให้กลุ่มผู้ออกโจทย์เป็นผู้ตรวจ หากข้อใดผิด ให้แจ้งกลุ่มที่ทำโจทย์เพื่อแก้ไขความถูกต้อง

6. นิสิตทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติมจากเอกสารประกอบการสอนบทที่ 6

7. อาจารย์และนิสิตร่วมกันเฉลยแบบฝึกหัด

8. นิสิตสรุปจดบันทึกลงในสมุดของนิสิต

5. แหล่งการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอนวิชา ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์บทที่ 6

2. แบบฝึกหัดบทที่ 6

3. Power-point

6. กระบวนการวัดผลและประเมินผล

1. การร่วมกันสรุป, อภิปรายและตอบคำถาม

2. การตอบคำถามในแบบฝึกหัด

3. การสรุปจดบันทึกของนิสิต

4. เอกสารแบบฝึกหัด

5. ตรวจผลงานการสร้างโจทย์ของแต่ละกลุ่ม และผลการทำโจทย์ที่กลุ่มเพื่อนกำหนด

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

(..)

อาจารย์สอน

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

....

....

บทที่ 6

วิธีพิสูจน์ประพจน์และข้ออ้างเหตุผล

(Proof of Propositions and Arguments)

6.1 วิธีพิสูจน์ประพจน์และข้ออ้างเหตุผลชนิดต่างๆ

ในตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ภาคที่ว่าด้วยประพจน์นี้ มีวิธีการพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์และวิธีพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลที่เรียกว่า กระบวนการตัดสิน (Decision Procedure) อยู่หลายวิธี แต่ละวิธีก็มีข้อดีและข้อด้อยแตกต่างกันออกไป ตัวอย่างเช่น วิธีพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดตรงเป็นวิธีพิสูจน์ประพจน์และข้ออ้างเหตุผลได้ด้วยการสร้างตารางและตรวจสอบความถูกต้องได้อย่างชัดเจน แต่ข้อด้อยก็คือถ้ามีตัวแปรจำนวนมากก็จะยุ่งยากในการกำหนดค่าความจริง ส่วนวิธีพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดอ้อมก็เหมาะสำหรับประพจน์หรือข้ออ้างเหตุผลที่สลับซับซ้อนและมีตัวแปรจำนวนมาก แต่ก็มีข้อเสียตรงที่อาจจะพลาดได้ง่าย ดังนั้นวิธีพิสูจน์แต่ละอย่างจึงเหมาะกับการพิสูจน์เฉพาะอย่างที่แตกต่างกัน วิธีพิสูจน์ประพจน์และข้ออ้างเหตุผล ในตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ภาคที่ว่าด้วยประพจน์มีทั้งหมด 9 วิธีดังนี้

(1) วิธีพิสูจน์แบบวิเคราะห์เฉพาะกรณี (Case Analysis)

(2) วิธีพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดตรง (Direct Truth Table)

(3) วิธีพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดอ้อม (Indirect Truth Table)

(4) วิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยกฎการอนุมาน (The Method of Deduction by Inference Rules)

(5) วิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยกฎการแทนที่ (The Method of Deduction by Replacement Rules)

(6) วิธีพิสูจน์ด้วยการทำให้ขัดแย้งกัน (The Method of Reductio Ad Absurdum)

(7) วิธีพิสูจน์ด้วยการสมมติเงื่อนไข (Conditional Proof)

6.2 วิธีพิสูจน์แบบวิเคราะห์เฉพาะกรณี (Case Analysis)

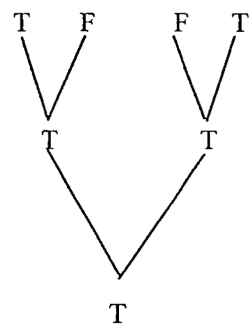
การวิเคราะห์เฉพาะกรณี หรือการวิเคราะห์ตารางความจริงจะใช้ตัดสินค่าความจริง (Truth-value) ของญัตติเชิงซ้อนซึ่งเราสร้างขึ้นมาในภาษาสัญลักษณ์ ค่าความจริงของญัตติเชิงซ้อนไม่ว่าจะมีความสลับซับซ้อนมากน้อยเท่าใดก็ตาม สามารถจะพิสูจน์ได้โดยการใช้วิธีการนี้

ข้อสำคัญที่ควรจดจำก็คือ การวิเคราะห์เฉพาะกรณีนี้จะสมมติค่าความจริงให้กับตัวแปรที่ให้มาเสมอ

ตัวอย่างที่ 1 $(A \vee B) \supset (B \vee A)$

สมมติให้ A เป็น T (True = จริง) B เป็น F (false = เท็จ) เมื่อสมมติค่าตัวแปรเช่นนั้นแล้ว เราสามารถจะพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์ที่ให้มาด้วยแผนภูมิได้ดังนี้

(A v B) ⊃ (B v A)



แผนผังข้างบนนี้แสดงให้เห็นว่า เมื่อ A จริง (True) และ B เท็จ (False) แล้ว (A v B) ⊃ (B v A) จะต้องจริง เราอาจจะอธิบายขั้นตอนของการตัดสินค่าความจริงของประพจน์ดังกล่าวนี้ ได้โดยละเอียดดังนี้

ขั้นที่ 1 เนื่องจากวงเล็บจะเป็นตัวกำหนดขอบเขตของเครื่องหมายคงที่หรือตัวเชื่อม ไม่ว่าจะอยู่ในระเบียบที่เพิ่มขึ้นหรือลดลง การสังเกตวงเล็บจะช่วยให้เรามองออกว่าสัญลักษณ์ใดคือตัวเชื่อมหลักของประพจน์ที่กำหนดให้ ดังนั้น สัญลักษณ์ ⊃ คือ ตัวเชื่อมหลักของประพจน์ซ้อน (A v B) ⊃ (B v A)

ขั้นที่ 2 เขียนค่าความจริงสมมติของประพจน์ลงไปตามความเหมาะสมจนครบทุกตัว ดังนั้น เราก็จะได้

(A v B) ⊃ (B v A)

T F F T

ขั้นที่ 3 ตัดสินค่าความจริงของตัวเชื่อมในประพจน์ซึ่งมีขอบเขตต่ำสุดเป็นอันดับแรก โดยใช้ตารางความจริงพื้นฐานที่เหมาะสม

(A v B) ⊃ (B v A)

T T F F T

ขั้นที่ 4 ตัดสินค่าความจริงของตัวเชื่อมที่มีขอบเขตสูงขึ้นถัดไป

(A v B) ⊃ (B v A)

T T F F T T

ขั้นที่ 5 ตัดสินตัวเชื่อมหลักเป็นอันดับสุดท้าย โดยการนำเอาค่าของประพจน์ที่เป็นองค์ประกอบของตัวเชื่อมหลักนั้นมาใช้

(A v B) ⊃ (B v A)

T T F T F T T

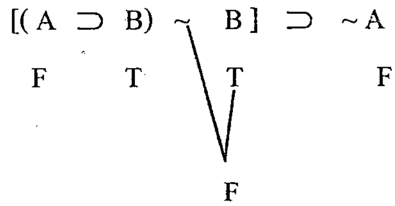
ตัวอย่างที่ 2 [(A ⊃ B) . ~B] ⊃ ~A สมมติให้ A เป็นเท็จ (false) แต่ B เป็นจริง (true)

วิธีทำ

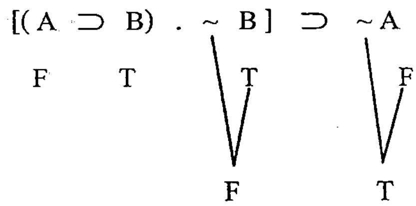
ขั้นที่ 1 $[(A \supset B) . \sim B] \supset \sim A$

F T T F

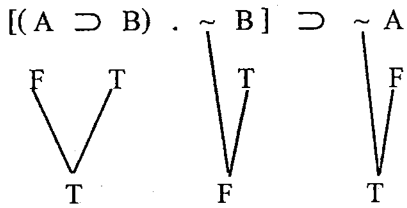
ขั้นที่ 2



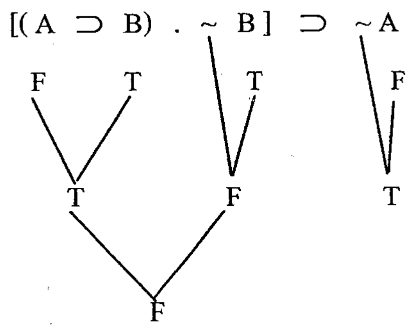
ขั้นที่ 3



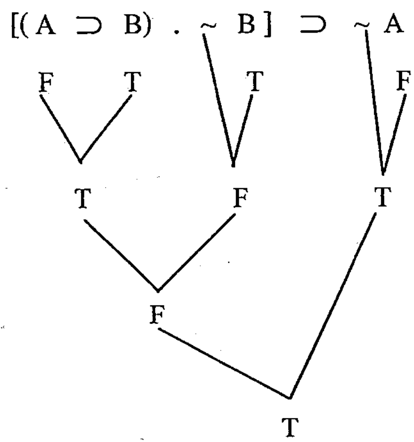
ขั้นที่ 4



ขั้นที่ 5



ขั้นที่ 6



ขั้นที่ 6 จะให้แผนภูมิขั้นสุดท้าย ซึ่งจะบอกเราว่า ประพจน์ที่ให้มานั้นเป็นประพจน์สัจนิรันดร์ (Tautology) หรือไม่ ภายใต้ข้อสมมติฐานที่ว่า A เป็นเท็จ และ B เป็นจริง

สำหรับประพจน์ซ้อนที่ประกอบด้วยตัวแปร 2 ตัว จะมีค่าความจริงที่เป็นไปได้ 4 กรณีด้วยกัน ดูตัวอย่างข้างล่างประกอบ

p	q
T	T
T	F
F	T
F	F

เมื่อเรานำเอาวิธีการวิเคราะห์เฉพาะกรณีมาช่วย จะทำให้เราสามารถตัดสินค่าความจริงที่เป็นไปได้ทั้งหมดของประพจน์ได้ง่ายขึ้น ขอให้เราพิจารณาสาเหตุที่มีความเป็นไปได้ 2 กรณีของตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3 $(M \vee N) \supset \sim(\sim N \vee \sim M)$

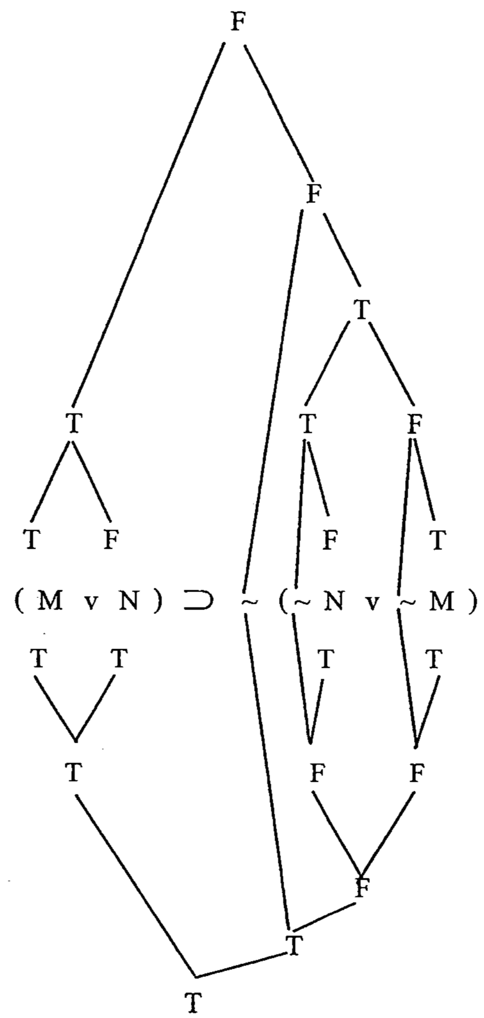
วิธีทำ ตัวอย่างที่ 3 นี้ ไม่ได้กำหนดค่าความจริงใดๆ เลย ก่อนลงมือพิสูจน์ เราจำเป็นต้องสมมติค่าความจริงที่เป็นไปได้ให้กับตัวแปรที่ให้มาเสียก่อน ซึ่งตัวอย่างนี้มีตัวแปร 2 ตัว จะมีความเป็นไปได้ 4 กรณี คือ

กรณีที่ 1 ทั้ง M และ N เป็นจริงทั้งคู่

กรณีที่ 2 M เป็นจริง แต่ N เป็นเท็จ

กรณีที่ 3 M เป็นเท็จ แต่ N เป็นจริง

กรณีที่ 4 ทั้ง M และ N เป็นเท็จทั้งคู่



ข้อสังเกต: ประพจนที่ให้มานี้จะเป็นจริงเมื่อทั้ง M และ N มีค่าเป็นจริง แต่จะเป็นเท็จ เมื่อ M มีค่าเป็นจริง แต่ N มีค่าเป็นเท็จ แผนภูมิส่วนบนแสดงให้เห็นถึงประพจน์มีค่าเป็นเท็จ แต่แผนภูมิส่วนล่างแสดงให้เห็นว่าประพจน์ดังกล่าวภายใต้ข้อสมมติฐานที่แตกต่างกันกลับมีค่าเป็นจริง ส่วนแผนภูมิที่เป็นไป

ได้อีก 2 กรณีของประพจน์ที่ให้มา คือ “M มีค่าเป็นเท็จ ส่วน N มีค่าเป็นจริง” และ “ทั้ง M และ N มีค่าเป็นเท็จทั้งคู่” การพิสูจน์ประพจน์ที่ให้มาในทุกกรณีที่เป็นไปได้จะช่วยทำให้เราทราบค่าความจริงของประพจน์ดังกล่าวได้อย่างสมบูรณ์ การพิสูจน์แบบวิธีวิเคราะห์เฉพาะกรณีนี้จะมีแผนภูมิเข้ามาเกี่ยวข้อง เราสามารถจะตัดแผนภูมิออกแล้วพิสูจน์ไปตามค่าที่เขาสมมติมาให้ก็ได้ ซึ่งวิธีนี้จะคล้ายกับการพิสูจน์ตารางความจริงชนิดอ้อมมาก จะต่างกันตรงที่การพิสูจน์ชนิดอ้อมจะสมมติให้บทสรุปเป็นเท็จเสมอเท่านั้น

6.3 วิธีพิสูจน์ประพจน์ด้วยตารางความจริงชนิดตรง (Direct Truth Table Method)

การพิสูจน์ด้วยตารางความจริงเป็นวิธีที่ใช้ตัดสินค่าความจริงของประพจน์ ความเป็นสมภาคของประพจน์และความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผล ถ้าประพจน์ที่ให้มานั้นมีค่าความจริงแห่งความสัมพันธ์กันเป็นจริงทั้งหมดแล้ว ประพจน์ที่ให้มานั้นก็จะเป็นสัจนิรันดร์ (tautology) และมีความเป็นสมภาคในกรณีที่เป็นประพจน์สมภาค (equivalent) นอกจากนี้ถ้าผลลัพธ์ของข้ออ้างเหตุผลที่ให้มานั้นเป็นจริงทั้งหมด ข้ออ้างเหตุผลนั้นก็สมเหตุสมผล (valid)

ขอให้เราพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ประกอบ $[(P \supset Q) . P] \supset Q$ เพื่อจะตัดสินว่าประพจน์ที่ให้มานี้จะเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ เราใช้กระบวนการดังต่อไปนี้

1. นับบนจำนวนตัวแปรทั้งหมดในประพจน์ที่ให้มา ในกรณีของ $[(P \supset Q) . P] \supset Q$ มีตัวแปรอยู่ 2 คือ P และ Q แม้ตัวแปรแต่ละตัวจะปรากฏถึง 2 ครั้ง ก็ไม่นับเป็นอย่างละ 2 เพราะเป็นตัวแปรเดียวกัน

2. ตัดสินค่าความจริงที่เป็นไปได้ทั้งหมดของตัวแปรว่ามีค่าความจริงที่เป็นไปได้จำนวนเท่าใด ในกรณีตัวอย่างของ $[(P \supset Q) . P] \supset Q$ ซึ่งมีตัวแปร 2 ตัว ค่าความจริงที่เป็นไปได้จะมี 4 โดยทั่วไปเราสามารถคำนวณค่าความจริงที่ความเป็นไปได้ของตัวแปรโดยใช้สูตร 2 โดยที่ 2 ในสูตรนี้หมายถึงค่าความจริงพื้นฐานที่เป็นไปได้ 2 ค่าคือ ถูก (True) และผิด (False) ส่วน n หมายถึง จำนวนตัวแปร จากตัวอย่างที่ให้มานั้น เราจะได้ 2 = 2 x 2 = 4 อันดับต่อไปก็แจกค่าความจริงให้กับตัวแปรทั้ง P และ Q เรียงตามลำดับเป็น 4 แถวที่สอดคล้องกับค่าความจริงที่เป็นไปได้ 4 กรณี ดังนั้น ตารางความจริงของ $[(P \supset Q) . P] \supset Q$ จะได้

1	2	3	4	5
P	Q	$[(P \supset Q)$	$. P]$	$\supset Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T
		$1 \supset 2$	$3 . 1$	$4 \supset 2$

จากตารางความจริงข้างบนจะเห็นว่า 2 แถวแรกคือ P ที่อยู่คอลัมน์แรก และ Q ซึ่งอยู่คอลัมน์ที่ 2 จัดเป็นแถวพื้นฐานและทั้ง P และ Q จะบอกถึงความเป็นไปได้ 4 กรณีใน 4 แถว ส่วนคอลัมน์ที่เหลือคือ

ส่วนประกอบต่างๆ ของประพจน์ที่ให้มาโดยนับจากตัวเชื่อมที่ขอบเขตต่ำที่สุดไปหาตัวเชื่อมหลัก แถวสุดท้ายจะให้ค่าความจริงของประพจน์ซ้อน $[(P \supset Q) . P] \supset Q$

ตารางข้างบนสามารถจะตัดให้สั้นลงได้ดังนี้

[(P	⊃	Q)	.	P]	⊃	Q
T	T	T	T	T	**T**	T
T	F	F	F	T	**T**	F
F	T	T	F	F	**T**	T
F	T	F	F	F	**T**	F

เมื่อปรากฏผลออกมาว่าตัวเชื่อมหลักมีค่าความจริงเป็นจริงหมด เพราะฉะนั้น ประพนจน์ที่ให้มาจึงเป็นประพจน์สัจนิรันดร์ (Tautology) ข้อควรจำประการหนึ่งสำหรับตารางความจริงชนิดสั้นนี้ก็คือ เราควรจะเขียนค่าความจริงให้กับตัวแปรที่ปรากฏทั้งหมดก่อนเป็นอันดับแรก ต่อจากนั้นจึงไปพิสูจน์ตัวเชื่อมที่มีขอบเขตต่ำที่สุดตามลำดับไปหาตัวเชื่อมที่มีขอบเขตมากที่สุดนั่นคือตัวเชื่อมหลัก และเมื่อจะสร้างตารางความจริงของประพจน์ที่ให้มาใดๆ ก็ตาม ควรที่จะใช้หลักการต่อไปนี้ช่วยจะทำให้ไม่เกิดข้อผิดพลาด

(1) เขียนประพจน์ที่ให้มาลงไป แล้วพิจารณาว่า ตัวเชื่อมหลักอยู่ที่ตำหน่างใด การกำหนดขอบเขตของวงเล็บจะช่วยให้เราตัดสินได้ว่าตัวเชื่อมไหนเป็นอย่างไร เพื่อให้ง่ายยิ่งขึ้น เราอาจจะกำหนดตัวเลขกำกับตัวเชื่อมนั้นๆ โดยนับจากตัวเชื่อมที่มีขอบเขตต่ำที่สุดไปหาตัวเชื่อมสูงสุดคือตัวเชื่อมหลัก ตัวอย่างเช่น

$$[(A \overset{1}{\supset} B) \overset{3}{.} (B \overset{2}{\supset} C)] \overset{5}{\supset} (A \overset{4}{\supset} C)$$

(2) นับจำนวนตัวแปรในประพจน์ที่ให้มา กรณีตัวอย่างข้างบนมีตัวแปรทั้งสิ้น 3 ตัวคือ A, B และ C

(3) ตรวจดูว่าค่าความจริงที่เป็นไปได้ของตัวแปรเหล่านี้มีเท่าไหร่ โดยใช้สูตร 2^n ก็จะได้ $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ (2 = ค่าความจริง n = จำนวนตัวแปร)

(4) กระจายค่า T (จริง) และ F (เท็จ) ให้กับตัวแปรในประพจน์ โดยใช้สูตร $\frac{2^n}{2}$ สำหรับตัวแปรตัวแรก และ $\frac{2^n}{2 \times 2}$ สำหรับตัวแปรตัวที่สอง ส่วนตัวแปรตัวที่สามจะได้ $\frac{2^n}{2 \times 2 \times 2}$ และตัวแปรตัวต่อ ๆ ไป ก็จะได้เท่ากับ 2^n หารด้วย 2 x 2 x 2 x 2 ……………..

ดังนั้น กรณีตัวอย่างข้างบนก็จะได้ ดังนี้

ตัวแปรตัวที่ 1 คือ A = $\frac{2^n}{2} = \frac{2^3}{2} = \frac{8}{2} = 4$

ตัวแปรตัวที่ 2 คือ B = $\frac{2^n}{2 \times 2} = \frac{2^3}{4} = \frac{8}{4} = 2$

ตัวแปรตัวที่ 3 คือ $C = \frac{2^n}{2 \times 2 \times 2} = \frac{2^3}{8} = \frac{8}{8} = 1$

เรารู้แล้วว่าค่าความจริงที่เป็นไปได้ทั้งหมดมี 8 กรณี เพราะฉะนั้น จากการที่ A ได้ผลลัพธ์เป็น 4 หมายถึงว่า เราสามารถจะกระจายค่า T (จริง) 4 ครั้ง และค่า F (เท็จ) อีก 4 ครั้งให้กับ A, จากการที่ B ได้ผลลัพธ์เป็น 2 ก็หมายความว่า เราสามารถจะกระจายค่า T (จริง) 2 ครั้ง และค่า F (เท็จ) 2 ครั้ง สลับกันไปให้กับ B จนกว่าจะครบ 8 ครั้ง และจากการที่ C ได้ผลลัพธ์เป็น 1 นั่นหมายถึงว่า เราสามารถจะกระจายค่า T (จริง) 1 ครั้ง และค่า F (เท็จ) 1 ครั้งให้กับ C สลับกันไปจนกว่าจะครบ 8 ครั้ง

ดังนั้น เราจะได้รูปแบบการหาค่าความจริงของตัวอย่างข้างบนที่สมบูรณ์ดังนี้

	1		3		2		5		4	
[(A	⊃	B)		(B	⊃	C)]	⊃	(A	⊃	C)
T		T		T		T		T		T
T		T		T		F		T		F
T		F		F		T		T		T
T		F		F		F		T		F
F		T		T		T		F		T
F		T		T		F		F		F
F		F		F		T		F		T
F		F		F		F		F		F

(5) หลังจากได้จัดสรรหรือกระจายค่าความจริงให้กับตัวแปรทั้ง 3 ตัวอย่างครบถ้วนแล้ว ขั้นต่อไปเราก็จะทำการพิสูจน์ค่าความจริงของตัวเชื่อม โดยเริ่มจากตัวเชื่อมที่มีขอบเขตต่ำที่สุดไปเรื่อย ๆ

	1		3		2		5		4	
[(A	⊃	B)		(B	⊃	C)]	⊃	(A	⊃	C)
T	**T**	T	T	T	**T**	T		T	**T**	T
T	**T**	T	F	T	**F**	F		T	**F**	F
T	**F**	F	F	F	**T**	T		T	**T**	T
T	**F**	F	F	F	**T**	F		T	**F**	F
F	**T**	T	T	T	**T**	T		F	**T**	T
F	**T**	T	F	T	**F**	F		F	**T**	F
F	**T**	F	T	F	**T**	T		F	**T**	T
F	**T**	F	T	F	**T**	F		F	**T**	F

(6) ขั้นตอนสุดท้ายจะเป็นการพิสูจน์ค่าความจริงของตัวเชื่อมหลักดังนี้

	1		3		2		5		4	
[(A	⊃	B)		(B	⊃	C)]	⊃	(A	⊃	C)
T	**T**	T	***T***	T	**T**	T	**T**	T	***T***	T
T	**T**	T	***F***	T	**F**	F	**T**	T	***F***	F
T	**F**	F	***F***	F	**T**	T	**T**	T	***T***	T
T	**F**	F	***F***	F	**T**	F	**T**	T	***F***	F
F	**T**	T	***T***	T	**T**	T	**T**	F	***T***	T
F	**T**	T	***F***	T	**F**	F	**T**	F	***T***	F
F	**T**	F	***T***	F	**T**	T	**T**	F	***T***	T
F	**T**	F	***T***	F	**T**	F	**T**	F	***T***	F

จากตัวอย่างข้างบน จะพบว่าค่าความจริงของตัวเชื่อมหลักเป็น T (จริง) ทั้งหมด เพราะฉะนั้น ประพจน์ที่ให้มาจึงเป็นสัจนิรันดร์

6.4 ประพจน์สัจนิรันดร์ ประพจน์ขัดแย้งกัน และประพจน์ไม่แน่นอน

เมื่อเราใช้ตารางความจริงพิสูจน์ประพจน์ที่ให้มาแล้วได้ผลลัพธ์ออกมาว่า ตัวเชื่อมหลักมีค่าเป็น T (จริง) ทั้งหมด เราเรียกประพจน์นั้นว่า "ประพจน์สัจนิรันดร์" (Tautology) ประพจน์สัจนิรันดร์จะมีค่าเป็นจริงทั้งหมดเสมอไม่ว่าเราจะเปลี่ยนตัวแปรอื่นๆ ลงใส่แทนก็ตาม แต่ผลลัพธ์ที่ได้จะเหมือนเดิม ไม่เปลี่ยนเป็นอย่างอื่น ดังนั้น จะเห็นได้ว่า จากตัวอย่าง [(A ⊃ B) . (B ⊃ C)] ⊃ (A ⊃ C) นั้น เป็นประพจน์สัจนิรันดร์ เพราะตัวเชื่อมหลักมีค่าเป็น T (จริง) ทั้งหมด

ในทางกลับกัน หากพิสูจน์ถึงขั้นสุดท้ายแล้วพบว่าตัวเชื่อมหลักของประพจน์ที่ให้มาได้ผลลัพธ์เป็น F (เท็จ) ทั้งหมด เราเรียกประพจน์ชนิดนี้ว่า "ประพจน์ขัดแย้งกัน" (Contradictory) ขอให้ดูตัวอย่างต่อไปนี้ประกอบ

~(P v Q) . ~(~P . ~Q)

F T T T **F** T FT F FT

F T T F **F** T FT F TF

F F T T **F** F TF F FT

T F F F **F** F TF T TF

ถ้าเราพิสูจน์ประพจน์ที่ให้มาแล้วได้ผลลัพธ์ออกมาว่า ตัวเชื่อมหลักมีค่าเป็นทั้ง T (จริง) และ F (เท็จ) คละเคล้ากันไป ไม่ว่าจะมีค่า F เพียงตัวเดียวนอกนั้นเป็น T ทั้งหมด หรือผลลัพธ์มีค่า T ตัวเดียวนอกนั้นเป็น F ทั้งหมดก็ตาม เราเรียกประพจน์ชนิดนี้ว่า "ประพจน์ไม่แน่นอน" (Contingent) ตัวอย่างเช่น

[(P v Q) . P] ⊃ ~ Q

T T T T T **F** F T

T T F T T **T** T F

F T T F F **T** F T

F F F F F **T** T F

ดังนั้น เราจึงสรุปได้ว่า ประพจน์ใดๆ ที่ให้มาจะมีผลสลัพธ์ของค่าความจริงเป็นสัจนิรันดร์ (Tautology) ขัดแย้งกัน (Contradictory) หรือไม่แน่นอน (Contingent) อย่างใดอย่างหนึ่ง ขึ้นอยู่กับผลลัพธ์ของตัวเชื่อมหลัก ถ้าผลลัพธ์ออกมาเป็น T (จริง) หมด ประพจน์นั้นก็จัดเป็น ประพจน์สัจนิรันดร์ (Tautology) หรือในกรณีที่เป็นข้ออ้างเหตุผล ถ้าตัวเชื่อมหลักได้ค่าความจริงเป็นจริงทั้งหมด ข้ออ้างเหตุผลนั้นก็จะสมเหตุสมผล (Valid) ถ้าออกมาเป็น F (เท็จ) หมด ประพจน์นั้นก็จัดเป็น ประพจน์ที่ขัดแย้งกัน (Contradictory) แต่ถ้าผลลัพธ์ออกมาเป็นทั้ง T (จริง) และ F (เท็จ) คละเคล้ากันไปมากบ้างน้อยบ้าง ประพจน์นั้นก็เป็นประพจน์ไม่แน่นอน (Contingent) ในทางตรรกศาสตร์นั้น เราเรียกประพจน์สัจนิรันดร์ว่า "ประพจน์วิเคราะห์" (Analytic) และเรียกประพจน์ไม่แน่นอนว่า "ประพจน์สังเคราะห์" (Synthetic) (Reichenbach, 1966, p. 36).

ข้อสังเกตอีกประการหนึ่งก็คือ เมื่อเราได้ผลลัพธ์ออกมาเป็นประพจน์สัจนิรันดร์ หากเรานำเอาประพจน์สัจนิรันดร์นี้มาทำการปฏิเสธ เราก็จะได้ผลลัพธ์เป็นประพจน์ที่ขัดแย้งกันทันที และในทางกลับกัน เมื่อเราได้ผลลัพธ์ออกมาเป็นประพจน์ที่ขัดแย้งกัน หากเรานำเอาประพจน์ที่ขัดแย้งกันนี้มาทำการปฏิเสธ เราก็จะได้ผลลัพธ์เป็นประพจน์สัจนิรันดร์ทันทีเช่นกัน ตัวอย่างเช่น

กรณีที่ 1 [P ⊃ (P v Q)] ได้ผลลัพธ์เป็นประพจน์สัจนิรันดร์ ดังนี้

[P ⊃ (P v Q)]

T **T** T T T

T **T** T T F

F **T** F T T

F **T** F F F

แล้วนำประพจน์นี้มาทำการปฏิเสธก็จะได้ประพจน์ขัดแย้ง ดังนี้

~ [P ⊃ (P v Q)]

F T T T T T

F T T T T F

F F T F T T

F F T F F F

กรณีที่ 2 [(P ⊃ Q) . ~(~P v Q)] ได้ผลลัพธ์เป็นประพจน์ขัดแย้งกัน ดังนี้

[(P ⊃ Q) . ~ (~ P v Q)]

T T T **F** F F T T T

T F F **F** T F T F F

F T T **F** F T F T T

F T F **F** F T F T F

แล้วนำประพจน์นี้มาทำการปฏิเสธก็จะได้ประพจน์สัจนิรันดร์ ดังนี้

~ [(P ⊃ Q) . ~ (~ P v Q)]

T T T T F F F T T T

T T F F F T F T F F

T F T T F F T F T T

T F T F F F T F T F

6.5 วิธีพิสูจน์ความเป็นสมภาคของประพจน์ซ้อน

ในประพจน์ซ้อนที่มีสันธานที่เป็นสมภาค (≡) เป็นตัวเชื่อมหลักซึ่งเรียกง่ายๆ ว่าเป็นประพจน์ซ้อนสมภาค จะมีลักษณะที่พิเศษแตกต่างจากประพจน์ซ้อนชนิดอื่นเล็กน้อย นักตรรกศาสตร์นิยมแยกออกมาต่างหากจากประพจน์ชนิดอื่น คือ ในขณะที่เราพิสูจน์ประพจน์ซ้อนชนิดอื่นเพื่อให้รู้ว่า เป็นประพจน์สัจนิรันดร์ (Tautology), เป็นประพจน์ขัดแย้ง (Contradiction) หรือเป็นประพจน์ไม่แน่นอน (Contingency) แต่สำหรับประพจน์สมภาค เราจะพิสูจน์ว่ามันเป็นสมภาคหรือไม่ เรียกว่า พิสูจน์ความเป็นสมภาค (Logical Equivalence) เป็นการพิสูจน์ว่า ประพจน์ 2 ชุดจะมีค่าความจริงเสมอกันหรือไม่นั่นเอง ถ้ามีค่าความจริงเสมอกันทุกกรณี ผลสรุปจะออกมาเป็น T หมด แสดงว่าประพจน์ซ้อนนั้นมีความเป็นสมภาคกันจริง ต่างฝ่ายต่างก็เป็นเงื่อนไขของกันและกันได้

วิธีพิสูจน์ก็ใช้แบบเดียวกับวิธีที่ใช้กับประพจน์ซ้อนชนิดอื่น คือ สร้างตารางความจริงโดยการเขียนค่าความจริงไปตามลำดับจนถึงตัวเชื่อมหลัก สำหรับตัวเชื่อมหลักจะใช้กฎของสมภาคคือ T T F F จึงจะเป็น T หมายความว่า ประพจน์ชนิดนี้จะต้องจริง และเท็จเหมือนกันเสมอ จึงจะมีค่าเสมอกัน และผลที่ออกมาจะเป็น T หมด ถ้าประพจน์ทั้ง 2 ชุด มีค่าเป็นจริงหรือเท็จเหมือนกันหมดทุกกรณี สรุปว่า ถ้าค่าความจริงออกมาเป็น T หมดทุกกรณี ประพจน์ซ้อนอันนั้นก็จะมีความเป็นสมภาคจริง ซึ่งจะเรียกว่าสมเหตุสมผลก็พอได้ ถ้ามีกรณีเป็นเท็จแม้เพียงกรณีเดียว ก็จะไม่เป็นประพจน์สมภาค

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ความเป็นสมภาคของประพจน์ซ้อน (P ⊃ Q) ≡ (~P v Q)

วิธีทำ

P	Q	(P⊃ Q)	≡	(~P	v Q)
T	T	T	**T**	F	T
T	F	F	**T**	F	F
F	T	T	**T**	T	T
F	F	T	**T**	T	T
1	2	3	6	4	5
		(1 ⊃ 2)	(3 ≡ 5)		(4 v 2)

ตอบ มีความเป็นสมภาค

หมายเหตุ: ทำไปตามลำดับหมายเลขที่กำกับก็จะได้ผลลัพธ์เป็นคำตอบ

ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์ความเป็นสมภาคของ (B ⊃ C) ≡ ~(B . ~C)

วิธีทำ

B	C	(B ⊃ C)	≡	~	(B .	~C)
T	T	T	**T**	F	T	F
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	**T**	T	T	F
F	F	T	**T**	T	T	T
1	2	3	7	6	5	4
		(1 ⊃ 2)	(3 ≡ 6)	~5	(1 . 4)	~2

ตอบ มีความเป็นสมภาค

แบบฝึกหัดบทที่ 6

ก. จงใช้วิธีการวิเคราะห์เฉพาะกรณี (Case Analysis) มาพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้ โดยสมมติให้ C และ D เป็น T (จริง) แต่ M และ N เป็น F (เท็จ)

1. $\sim(C \vee M)$
2. $\sim C \vee \sim M$
3. $\sim N \cdot \sim D$
4. $\sim(D \cdot N)$
5. $C \vee (M \cdot N)$
6. $(C \vee M) \cdot N$
7. $(C \vee D) \cdot (M \vee N)$
8. $(C \cdot D) \vee (M \cdot N)$
9. $(C \cdot M) \vee (D \cdot N)$
10. $C \cdot [M \vee (D \cdot N)]$
11. $C \vee [M \cdot (D \vee N)]$
12. $M \vee [C \cdot (N \vee D)]$
13. $\sim[\sim\{(\sim C \cdot \sim M) \cdot \sim C\} \cdot \sim M]$
14. $\sim[\sim\{(\sim C \cdot \sim D) \cdot \sim C\} \cdot \sim C]$
15. $[(C \cdot M) \vee \sim D] \cdot \sim[(C \cdot M) \vee \sim D]$
16. $[(M \cdot C) \vee \sim N] \vee \sim[(M \cdot C) \vee \sim N]$
17. $[C \cdot (M \vee N)] \vee \sim[(C \cdot M) \vee (C \cdot N)]$
18. $[M \vee (C \cdot N)] \vee \sim[(M \vee C) \cdot (M \vee N)]$
19. $[M \cdot (C \cdot D)] \vee \sim[(M \vee C) \cdot (M \vee D)]$
20. $[M \vee (C \cdot N)] \vee \sim[(M \vee C) \vee (M \vee N)]$

ข. ถ้ากำหนดให้ P และ Q เป็น T (จริง) แต่ V และ W เป็น F (เท็จ) จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. $Q \vee V$
2. $Q \vee W$
3. $P \supset (\sim W \supset Q)$
4. $(P \supset Q) \supset W$
5. $(P \vee V) \supset (W \cdot Q)$
6. $P \supset (V \supset Q)$

7. $(V \supset P) \supset (Q \supset W)$

8. $(P \supset V) \supset (W \supset Q)$

9. $(P \supset Q) \supset (\sim P \supset \sim Q)$

10. $(V \supset W) \supset (\sim V \supset \sim W)$

11. $[(P \supset W) \supset P] \supset P$

12. $[(P \supset V) \supset P] \supset V$

13. $[(W \,.\, V) \supset W] \supset (W \supset V)$

14. $[(V \,.\, W) \supset P] \supset [V \supset (W \supset P)]$

15. $[(P \,.\, Q) \supset P] \supset [P \supset (Q \supset P)]$

16. $\sim(P \vee Q) \supset (\sim W \,.\, V)$

17. $\sim[(P \,.\, Q) \vee (W \,.\, \sim V)$

18. $\sim[(Q \,.\, P) \supset (W \supset V)$

19. $[(P \,.\, W) \,.\, (Q \,.\, V)]$

20. $[\sim(P \supset V) \vee (\sim V \vee \sim Q)]$

ค. กำหนดให้ P และ Q เป็น T (จริง) และกำหนดให้ R กับ S เป็น F (เท็จ) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. $(P \,.\, R) \vee (Q \,.\, R)$

2. $\sim(P \,.\, R) \vee S$

3. $(P \vee \sim R) \,.\, \sim(P \,.\, Q)$

4. $P \supset [Q \,.\, \sim(R \vee S)]$

5. $R \supset (P \,.\, Q)$

6. $\sim R \supset (P \,.\, Q)$

7. $(R \vee P) \vee [\sim(P \,.\, S) \vee (Q \,.\, S)]$

8. $(\sim R \,.\, P) \supset [\sim P \,.\, (Q \vee S)]$

9. $(P \,.\, Q) \vee (R \,.\, S)$

10. $(P \,.\, R) \vee (Q \,.\, S)$

11. $\sim[\sim(P \,.\, R) \,.\, \sim(Q \,.\, S)]$

12. $[(P \,.\, \sim R) \,.\, \sim\{Q \,.\, (P \,.\, S)\}] \,.\, \sim(P \,.\, R)$

ง. จงใช้ตารางความจริงชนิดตรงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. $\sim P \supset Q$

2. $\sim(P \,.\, Q)$

3. $P \supset \sim Q$

4. $\sim P \cdot \sim Q$
5. $(P \cdot Q) \cdot (\sim Q \supset P)$
6. $(\sim P \cdot Q) \supset (P \cdot \sim Q)$
7. $\sim(\sim P \supset Q) \cdot \sim(P \sim Q)$
8. $\sim[(\sim P \cdot \sim Q) \supset (Q \supset P)]$
9. $\sim[(P \supset Q) \supset (\sim Q \supset \sim P)]$
10. $\sim[\sim(\sim P \cdot Q) \supset (\sim Q \cdot \sim P)]$
11. $(A \cdot B) \supset (B \cdot R)$
12. $(\sim A \cdot B) \supset (\sim B \cdot C)]$
13. $[(A \supset B) \supset C] \supset [(A \cdot B) \supset C]$
14. $[(\sim A \supset \sim B) \supset C] \supset [\sim C \supset (A \cdot B)]$
15. $[(A \supset B) \cdot (B \supset C)] \supset (A \cdot C)$
16. $[(\sim A \cdot B) \supset \sim C] \supset [(C \cdot \sim B) \supset \sim A]$
17. $[\sim(A \cdot B) \supset \sim C] \vee [C \cdot \sim A) \supset \sim B]$
18. $[\sim(A \supset B) \vee C] \cdot [C \vee (A \cdot B)]$
19. $(A \cdot B) \vee [(C \supset \sim B) \cdot (\sim A \vee B)]$
20. $A \supset [(B \vee C) \cdot (\sim C \supset \sim A)]$
21. $(A \supset B) \equiv \sim(A \cdot \sim B)$
22. $\sim (P \vee Q) \equiv (P \supset Q)$
23. $(A \cdot B) \equiv (\sim B \vee \sim A)$
24. $(A \cdot B) \equiv \sim(\sim A \vee \sim B)$
25. $(A \equiv B) \vee (C \vee \sim B)$

จ. ใช้ตารางความจริงชนิดตรง (Direct Truth Table Method) พิสูจน์ว่าประพจน์ต่อไปนี้ ประพจน์ใดเป็นประพจน์สัจนิรันดร์ (Tautology) เป็นประพจน์ขัดแย้งกัน (Contradictory) หรือเป็นประพจน์ไม่แน่นอน (Contingent)

1. $P \supset \sim P$
2. $(P \supset \sim P) \cdot (\sim P \supset P)$
3. $P \supset (P \supset P)$
4. $(P \supset P) \supset P$
5. $P \supset (P \cdot P)$
6. $(P \cdot Q) \supset P$

7. $(P \supset Q) \supset [\sim(Q \,.\, R) \supset \sim(R \,.\, P)]$

8. $(\sim P \,.\, Q) \,.\, (Q \supset P)$

9. $[(P \supset Q) \supset Q] \supset Q$

10. $[(P \supset Q) \supset P] \supset P$

11. $P \supset (Q \supset P)$

12. $(P \vee Q) \,.\, (\sim P \vee \sim Q)$

13. $\sim[P \supset (P \vee Q)]$

14. $(P \equiv \sim Q) \vee (\sim P \equiv \sim Q)$

15. $[(P \supset Q) \,.\, (Q \supset P)] \supset (P \vee Q)$

16. $(P \equiv Q) \equiv (P \equiv \sim Q)$

17. $[(P \,.\, Q) \vee R] \equiv [(P \,.\, Q) \vee (P \,.\, R)]$

18. $[(P \vee R) \supset Q] \,.\, \sim(\sim Q \supset \sim R)$

19. $[(P \vee Q) \vee \sim R] \supset [P \vee (Q \vee \sim R)]$

20. $[P \,.\, (Q \vee \sim R)] \equiv (P \supset R)$

ฉ. จงพิสูจน์ประพจน์ซ้อนต่อไปนี้ด้วยตารางความจริงชนิดตรง แล้วบอกว่าเป็นประพจน์ชนิดใด

1. $(A \,.\, B) \supset (A \vee B)$

2. $(\sim M \supset M) \,.\, (M \supset \sim M)$

3. $(X \vee Y) \supset (X \,.\, Y)$

4. $\sim(A \,.\, B) \,.\, (A \vee B)$

5. $C \supset (D \supset C)$

6. $\sim[A \,.\, \sim(A \vee B] \supset [B \,.\, \sim(B \vee A)]$

7. $(B \,.\, C) \supset [(B \vee A) \,.\, (C \vee \sim A)]$

8. $\sim[\sim X \vee Y) \vee \sim Y] \,.\, [(\sim W \vee \sim Y) \vee R]$

ช. จงใช้ตารางความจริงชนิดตรงพิสูจน์ความเป็นสมภาคของประพจน์ซ้อนต่อไปนี้

1. $P \equiv (P \,.\, Q)$

2. $A \vee B \equiv A$

3. $H \equiv (H \vee H)$

4. $B \equiv (B \vee \sim B)$

5. $I \equiv (\sim I \supset G)$

6. $(M \,.\, \sim M) \equiv (M \equiv \sim M)$

7. $(X \vee \sim Y) \equiv (X \,.\, \sim Y)$

8. $(D \,.\, \sim E) \equiv [(D \vee F) \vee \sim F]$

10. $\sim(A \supset \sim A) \equiv (B \vee A)$

11. $(H \vee I) \equiv [H \vee (I \supset I)$

13. $(K \vee L) \equiv [K \vee (L \supset L)$

14. $[(J \vee \sim H) \cdot (J \vee H)] \equiv J$

15. $[(O \cdot \sim P) \supset (O \cdot P)] \equiv (O \cdot P)$

16. $[(O \cdot \sim P) \vee (O \vee P)] \equiv O$

17. $\sim(A \cdot \sim B) \equiv [(\sim A \cdot B) \vee \sim B]$

18. $\sim(O \cdot \sim P) \equiv [(\sim O \cdot \sim P) \vee (O \vee P)]$

19. $\{[(C \cdot D) \supset E] \cdot (D \supset \sim E)\} \equiv (C \supset E)$

20. $[(C \cdot D) \vee (D \cdot E)] \equiv [(\sim C \cdot \sim D) \vee (\sim D \cdot \sim E)]$

แผนการจัดการเรียนรู้บทที่ 7

เรื่อง วิธีพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดอ้อม **เวลา 3 ชั่วโมง**

****

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นิสิตสามารถใช้วิธีพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดอ้อมหาค่าความจริงของประพจน์และความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. พิสูจน์ค่าของประพจน์และความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลได้ด้วยวิธีพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดอ้อม

2. บอกได้ว่าผลลัพธ์ของการพิสูจน์นั้นเป็นสัจนิรันดร์ หรือไม่เป็นสัจนิรันดร์

2. แนวคิดหลัก (สาระสำคัญ)

วิธีพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดอ้อม คือ วิธีพิสูจน์โดยการสมมติให้ตัวเชื่อมหลักของประพจน์ซ้อนหรือข้ออ้างเหตุผลมีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อพิสูจน์ไปตามลำดับแล้วถ้าขัดแย้งกฎของตารางความจริงพื้นฐานในช่วงใดช่วงหนึ่งของการพิสูจน์ แสดงว่าประพจน์ซ้อนนั้นเป็นสัจนิรันดร์หรือข้ออ้างเหตุผลนั้นสมเหตุสมผล

3. เนื้อหาสาระ

1. ความหมายของวิธีพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดอ้อม

2 วิธีพิสูจน์ประพจน์ด้วยตารางความจริงชนิดอ้อม

3. วิธีพิสูจน์ข้ออ้างเหตุผลด้วยตารางความจริงชนิดอ้อม

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. อาจารย์แจ้งจุดประสงค์ให้นิสิตทราบ

2. อาจารย์แนะนำวิธีพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดอ้อม

3. นิสิตแบ่งกลุ่มเป็น 4 กลุ่ม โดยให้แต่ละกลุ่มร่วมกันตั้งโจทย์ประพจน์หรือข้ออ้างเหตุผลที่มีตัวแปรเฉพาะได้ไม่เกิน 4 ตัว จะมีกี่ตัวเชื่อมก็ได้ กลุ่มละ 5 ข้อ

4. นิสิตแต่ละกลุ่มร่วมกันหาค่าความจริงด้วยวิธีพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดอ้อมจากโจทย์ที่นิสิตกลุ่มอื่นกำหนด โดยสับเปลี่ยนกันทำ

5. นิสิตแลกเปลี่ยนกันตรวจคำตอบโดยให้กลุ่มผู้ออกโจทย์เป็นผู้ตรวจ หากข้อใดผิด ให้แจ้งกลุ่มที่ทำโจทย์เพื่อแก้ไขความถูกต้อง

6. นิสิตทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติมจากเอกสารประกอบการสอนบทที่ 7

7. อาจารย์และนิสิตร่วมกันเฉลยแบบฝึกหัด

8. นิสิตสรุปจดบันทึกลงในสมุดของนิสิต

5. แหล่งการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอนวิชา ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์บทที่ 7
2. แบบฝึกหัดบทที่ 7
3. Power-point

6. กระบวนการวัดผลและประเมินผล

1. การร่วมกันสรุป, อภิปรายและตอบคำถาม
2. การตอบคำถามในแบบฝึกหัด
3. การสรุปจดบันทึกของนิสิต
4. เอกสารแบบฝึกหัด
5. ตรวจผลงานการสร้างโจทย์ของแต่ละกลุ่ม และผลการทำโจทย์ที่กลุ่มเพื่อนกำหนด

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

(..)

อาจารย์สอน

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

....

....

บทที่ 7
วิธีพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดอ้อม
(Indirect Truth Table Proof)

7.1 ความหมายของวิธีพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดอ้อม

การพิสูจน์ของประพจน์ว่ามีค่าความจริงเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ หรือการพิสูจน์ข้ออ้างเหตุผลว่าสมเหตุสมผลหรือไม่ดังที่กล่าวมาในบทที่ 6 นั้น เป็นการพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดตรง (Direct Truth Table Proof) ซึ่งเหมาะสำหรับประพจน์ที่มีตัวแปรไม่เกิน 3 ตัว แต่ถ้าประพจน์ที่ให้มามีตัวแปรมากกว่า 3 ตัวขึ้นไป จำนวนแถวที่จะกระจายค่า T และ F ของตัวแปรอาจจะเกิน 1 หน้ากระดาษ ซึ่งจะไม่สะดวกในการคำนวณ เช่น สมมติว่าประพจน์ที่ให้มามีตัวแปรถึง 5 ตัว เราก็จะต้องสร้างแถวให้ตัวแปรถึง 32 แถว ซึ่งเป็นการยุ่งยาก สิ้นเปลืองหน้ากระดาษ และเสียเวลาในการเขียนค่า T และ F ของตัวแปร นอกจากนี้แล้วยังอาจทำให้สับสนจนเกิดข้อผิดพลาดในการพิสูจน์ประพจน์ที่ให้มาอีกด้วย ดังนั้น การพิสูจน์ตารางความจริงทางอ้อมจะทำให้เราหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวแปรจำนวนมากๆ ได้รวดเร็วและง่ายดาย และสามารถรู้ได้ทันทีว่าประพจน์ดังกล่าวสมเหตุสมผลหรือไม่ การพิสูจน์ตารางความจริงทางอ้อมนี้ มีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า “การพิสูจน์ตารางความจริงอย่างสั้น” (Shorter Truth Table Technique) เป็นการพิสูจน์ที่สวนทางหรือกลับกันกับการพิสูจน์ตารางความจริงชนิดตรง เพราะวิธีนี้จะเริ่มต้นด้วยการสมมติให้ตัวเชื่อมหลักของประพจน์ที่ให้มาเป็น F (เท็จ) หรือเป็นประพจน์ที่ไม่สมเหตุสมผล (Invalid) เพราะดังที่เรารู้มาแล้วว่า ประพจน์ที่ได้ผลลัพธ์ออกมาเป็นประพจน์สัจนิรันดร์หรือข้ออ้างเหตุผลที่ได้ผลลัพธ์ออกมาสมเหตุสมผล เมื่อถูกปฏิเสธก็จะกลายเป็นประพจน์ขัดแย้งทันที เราก็ใช้หลักการนี้มาสมมติให้ค่าความจริงของประพจน์ที่ให้มาเป็นเท็จ แต่ในทางกลับกันถ้าเราพิสูจน์ไปตามลำดับแล้วไม่เกิดความขัดแย้งขึ้นในระหว่างขั้นตอนการพิสูจน์เลยแม้แต่น้อย นั่นแสดงว่าประพจน์ที่ให้มาต้องไม่เป็นสัจนิรันดร์หรือถ้าเป็นข้ออ้างเหตุผลก็ย่อมไม่สมเหตุสมผลแน่นอน เพราะทั้งๆ ที่เราสมมติให้ผลลัพธ์ออกมาเป็นเท็จแล้ว ก็ยังไม่ขัดแย้งอีก

ดังนั้น เราสามารถจะนิยามความหมายของวิธีพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดอ้อมได้ว่า คือ วิธีพิสูจน์โดยการสมมติค่าความจริงที่เป็นเท็จให้ตัวเชื่อมหลักของประพจน์ซ้อนหรือข้ออ้างเหตุผล เมื่อพิสูจน์ไปตามลำดับถ้าเกิดความขัดแย้งขึ้นในระหว่างขั้นตอนการพิสูจน์ แสดงว่าประพจน์ซ้อนนั้นเป็นสัจนิรันดร์หรือข้ออ้างเหตุผลนั้นสมเหตุสมผล

7.2 วิธีพิสูจน์ประพจน์ด้วยตารางความจริงชนิดอ้อม

การพิสูจน์ประพจน์ด้วยวิธีนี้มีขั้นตอนปฏิบัติดังนี้

(1) สมมติตัวเชื่อมหลักของประพจน์ที่เรากำลังทำการพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดอ้อมให้เป็นเท็จ (F)

(2) กำหนดค่าความจริงให้กับตัวแปรและตัวคงที่ในประพจน์ที่กำลังพิสูจน์ โดยคำนึงถึงกฎมูลฐานทั้ง 5 ข้อ เพื่อตรวจสอบความสมเหตุสมผลไปตามลำดับ โดยเริ่มจากบทสรุปแล้วไล่ขึ้นไปสู่บทเสนอที่ 2 และหนึ่งตามลำดับ ซึ่งเป็นลักษณะทวนกระแสกับการพิสูจน์ตารางความจริงชนิดตรง ซึ่งจะเริ่มต้นที่ข้อเสนอแรก ตามด้วยข้อเสนอที่ 2 แล้วจึงตบท้ายด้วยการหาค่าความจริงของบทสรุป

(4) หลังจากพิสูจน์จนครบหมดแล้ว ปรากฏว่าไม่มีช่วงใดของการพิสูจน์ขัดแย้งกับกฎค่าความจริงพื้นฐานทั้ง 6 ชนิดที่กล่าวมาในบทที่ 4 ถือว่าประพจน์ที่ให้มาไม่เป็นประพจน์สัจนิรันดร์หรือข้ออ้างเหตุผลนั้นไม่สมเหตุสมผล แต่ถ้าผลของการพิสูจน์ออกมาแล้วมีการขัดแย้งกฎของตารางความจริงพื้นฐานทั้ง 6 กฎ ณ ช่วงใดช่วงหนึ่งหรือไม่สอดคล้องกันในระหว่าง ถือว่าประพจน์นั้นเป็นสัจนิรันดร์หรือข้ออ้างเหตุผลนั้นสมเหตุสมผล

ตัวอย่างที่ 1 $(A . B) \supset A$

ขั้นที่ 1 สมมติให้ตัวเชื่อมหลักมีค่าความจริงเป็น F (เท็จ) ก็จะได้

$$\begin{array}{ccccccc} (& A & . & B &) & \supset & A \\ & & & & & F & \end{array}$$

ขั้นที่ 2 ตามกฎค่าความจริงพื้นฐานของ $\supset$ มีว่า T กับ F เท่านั้นจึงจะได้ผลลัพธ์เป็น F เพราะฉะนั้น (A . B) จะต้องเป็น T และ A จะต้องเป็น F เราก็จะได้

$$\begin{array}{ccccccc} (& A & . & B &) & \supset & A \\ & & T & & & F & F \end{array}$$

ขั้นที่ 3 ถ้า (A . B) เป็น T แล้ว A และ B จะต้องเป็น T ทั้งคู่ เพราะตารางความจริงพื้นฐานของ . มีว่า T และ T เท่านั้นจึงจะได้ผลลัพธ์เป็น T ดังนั้น เราก็จะได้

$$\begin{array}{ccccccc} (& A & . & B &) & \supset & A \\ & \underline{\mathbf{F}} & \underline{T} & \underline{T} & & F & \mathbf{F} \end{array}$$

ขั้นที่ 4 ตรวจดูว่า ข้อสมมติที่ให้มานั้นลงรอยกัน (consistent) หรือไม่ ? พบว่าข้อสมมติที่ให้มานั้นไม่ลงรอยกัน (inconsistent) เพราะตัวแปร A ใน (A . B) มีค่าเป็น T (จริง) แต่ A ที่เป็นผล มีค่าเป็น F (เท็จ) นี้หมายความว่า เราไม่สามารถจะเขียนค่า F ลงที่ตัวเชื่อมหลักของ (A . B) $\supset$ A โดยไม่มีความไม่ลงรอยกันได้ ดังนั้น ประพจน์ที่ให้มาจะต้องเป็นประพจน์สัจนิรันดร์ (tautology) คือสมเหตุสมผล (valid)

ตัวอย่างที่ 2 $[(H \vee I) . \sim I] \supset H$

ขั้นที่ 1 สมมติให้ตัวเชื่อมหลักเป็น F ก็จะได้

$$\begin{array}{cc} [(H \vee I) . \sim I] & \supset \; H \\ & F \end{array}$$

ขั้นที่ 2 ตามกฎค่าความจริงพื้นฐานของ $\supset$ มีว่า T กับ F เท่านั้นจึงจะได้ผลลัพธ์เป็น F เพราะฉะนั้น

$[(H \vee I) \cdot \sim I]$ จะต้องเป็น T และ H จะต้องเป็น F เราก็จะได้

$$[(H \vee I) \cdot \sim I] \supset H$$

T F F

ขั้นที่ 3 ถ้า $[(H \vee I) \cdot \sim I]$ เป็น T แล้ว $(H \vee I)$ และ ~I จะต้องเป็น T ทั้งคู่ เพราะตารางความจริงพื้นฐานของ . มีว่า T และ T เท่านั้นจึงจะได้ผลลัพธ์เป็น T นอกจากนั้นเรายังรู้ค่าของ I ว่าเป็น F เพราะเมื่อถูกปฏิเสธแล้วมีค่าความจริงเป็น T ดังนั้น เราก็จะได้

$$[(H \vee I) \cdot \sim I] \supset H$$

T T T F F F

ขั้นตอนที่ 4 เมื่อเรารู้ค่าของ $(H \vee I)$ ว่าเป็น T แล้ว และรู้ว่า H นั้นมีค่าเป็น F ดังที่ปรากฏในบทสรุป เพราฉะนั้น I จะต้องเป็น T อย่างเดียว เพราะกฎความจริงพื้นฐานของ v มีว่า เมื่อตัวแปรหน้าเป็น F แล้ว ตัวแปรหลังจะต้องเป็น T เท่านั้นตัวเชื่อม v จึงจะมีค่าเป็น T แต่ I ก็มีค่าเป็น F ด้วย จึงขัดแย้งกับกฎพื้นฐานของ v ว่า ค่าของตัวยืนยันหน้าเป็น F และค่าของตัวตามเป็น F ผลลัพธ์จะต้องเป็น F แต่ปรากฏว่าเราได้ผลลัพธ์เป็น T นั่นแสดงว่าประพจน์ที่ให้มานี้เกิดความขัดแย้งขึ้นภายใน เราขีดเส้นใต้ภายใต้ความขัดแย้งกัน เพราะข้อสมมติไม่ลงรอยกัน ประพจน์นี้จึงเป็นประพจน์สัจนิรันดร์หรือสมเหตุสมผล

$$[(H \vee I) \cdot \sim I] \supset H$$

<u>**F T F**</u> T T F F F

ตัวอย่างที่ 3 $[(C \supset D) \supset (C \supset D)] \vee (C \vee D)$

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 $[(C \supset D) \supset (C \supset D)] \vee (C \vee D)$

F

ขั้นที่ 2 $[(C \supset D) \supset (C \supset D)] \vee (C \vee D)$

F F F

ขั้นที่ 3 $[(C \supset D) \supset (C \supset D)] \vee (C \vee D)$

F F F F F

ขั้นที่ 4 $[(C \supset D) \supset (C \supset D)] \vee (C \vee D)$

T F F F F F F

ขั้นที่ 5 $[(C \supset D) \supset (C \supset D)] \vee (C \vee D)$

F T F F F F F F F

ขั้นที่ 6 $[(C \supset D) \supset (C \supset D)] \vee (C \vee D)$

F T F F <u>**F F F**</u> F F F F

เนื่องจากข้อสมมตินำไปสู่ความขัดแย้งกัน ประพจน์ที่ให้มาจะต้องเป็นประพจน์สัจนิรันดร์ คือ สมเหตุสมผล (Valid)

ตัวอย่างที่ 4 $[(M \supset N) \,.\, (M \supset O)] \supset (N \supset O)$

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 $[(M \supset N) \,.\, (M \supset O)] \supset (N \supset O)$

T T T F F

เมื่อเราสมมติค่า F ลงที่ตัวเชื่อมหลักแล้ว ดำเนินการพิสูจน์ไปตามลำดับ จนกระทั่งได้ค่าความจริงของ (M $\supset$ N) เป็น T ได้ค่าความจริงของ (M $\supset$ O) เป็น T และค่าความจริงของ (N $\supset$ O) เป็น F แต่เรายังไม่รู้ค่าของ M, N และ O ใน (M $\supset$ N), (M $\supset$ O) และ (N $\supset$ O) ได้ทันที เพราะประพจน์เงื่อนไขที่มีผลลัพธ์เป็น T มีความเป็นไปได้ถึง 3 กรณี ให้หยุดการพิสูจน์ไว้แค่นั้นก่อน เราพบว่าประพจน์ที่เป็นผล คือ (N $\supset$ O) มีผลลัพธ์เป็น F ดังนั้นเราก็สามารถพิสูจน์จาก (N $\supset$ O) นี้เองต่อไปได้

ขั้นที่ 2 $[(M \supset N) \,.\, (M \supset O)] \supset (N \supset O)$

T T T F T F F

เมื่อเรารู้ค่าของ N และ O แล้ว ต่อไปเราก็สามารถใส่ค่าของ N และ O ลงไปในส่วนที่เหลือได้เลย เพราะฉะนั้น เราก็จะได้

ขั้นที่ 3 $[(M \supset N) \,.\, (M \supset O)] \supset (N \supset O)$

T T T T F F T F F

ค่าของ M เรายังไม่รู้ แต่ผลของข้อสมมติดังกล่าวออกมาเป็น T จึงทำให้เรารู้ว่า M จะต้องเป็น F เท่านั้นจึงจะทำให้ผลลัพธ์ของ (M $\supset$ O) เป็น T ดังกล่าว ดังนั้น เราจะได้

ขั้นที่ 4 $[(M \supset N) \,.\, (M \supset O)] \supset (N \supset O)$

T T T F T F F T F F

ขั้นที่ 5 $[(M \supset N) \,.\, (M \supset O)] \supset (N \supset O)$

F T T T F T F F T F F

เมื่อเราพิสูจน์มาถึงขั้นสุดท้ายแล้ว ปรากฏว่าข้อสมมติของเราไม่มีความขัดแย้งใดๆ ในระหว่าง ดังนั้น ประพจน์ที่ให้มานี้ จึงไม่เป็นประพจน์สัจนิรันดร์ นั่นหมายถึงว่าเป็นประพจน์ที่ไม่สมเหตุสมผล (invalid)

จากตัวอย่างทั้ง 4 ข้างต้น เราพบว่าตัวเชื่อมหลักเป็นประพจน์เงื่อนไขและประพจน์เลือก จึงไม่พบข้อยุ่งยากในการพิสูจน์ใดๆ เลย เพราะประพจน์เงื่อนไข ($\supset$) ได้ผลลัพธ์เป็น F เฉพาะในกรณีเดียวเท่านั้น คือ เมื่อตัวแปรหน้าเป็น T และตัวแปรตามเป็น F เท่านั้นจึงจะเป็น F และสำหรับประพจน์เลือก (v) จะได้ผลลัพธ์เป็น F ในกรณีเดียวเท่านั้นคือ เมื่อตัวแปรหน้าเป็น F และตัวแปรตามก็เป็น F เหมือนกัน

แต่ถ้าตัวเชื่อมหลักเป็นประพจน์รวม (.) แล้ว จะมีผลลัพธ์ที่เป็น F ได้ถึง 3 กรณี นั่นคือ T กับ F ก็เป็น F, F กับ T ก็เป็น F, และ F กับ F ก็เป็น F ถ้าตัวเชื่อมหลักเป็นประพจน์สมภาค ($\equiv$) เราก็จะได้ผลลัพธ์เป็น F ที่เป็นไปได้ถึง 2 กรณีด้วยกัน นั่นคือ T กับ F ก็เป็น F และ F กับ T ก็เป็น F โปรดดูตัวอย่างข้างล่างประกอบ

ตัวอย่างที่ 5 $(A \supset B) \cdot (\sim A \supset \sim B)$

ในกรณีนี้ ตัวเชื่อมหลักเป็นประพจน์รวม จะมีผลลัพธ์ที่เป็น F ได้ถึง 3 กรณี นั่นคือ

(1) ผลลัพธ์จะเป็น F ถ้า $(A \supset B)$ เป็น T แต่ $(\sim A \supset \sim B)$ เป็น F

(2) ผลลัพธ์จะเป็น F ถ้า $(A \supset B)$ เป็น F แต่ $(\sim A \supset \sim B)$ เป็น T

(3) ผลลัพธ์จะเป็น F ถ้าทั้ง $(A \supset B)$ และ $(\sim A \supset \sim B)$ เป็น F ทั้งคู่

กรณีที่ 1
$$\begin{array}{ccccccccc} (A & \supset & B) & . & (\sim A & \supset & \sim B) \\ & T & & F & & F & \end{array}$$

กรณีที่ 2
$$\begin{array}{ccccccccc} (A & \supset & B) & . & (\sim A & \supset & \sim B) \\ & F & & F & & T & \end{array}$$

กรณีที่ 3
$$\begin{array}{ccccccccc} (A & \supset & B) & . & (\sim A & \supset & \sim B) \\ & F & & F & & F & \end{array}$$

ใน 3 กรณีเหล่านี้ เราลองเลือกสักกรณีมาพิสูจน์ดูก่อน สมมติว่าเราเลือกกรณีที่ 3 มาพิสูจน์ก็แล้วกัน ก็จะได้ดังนี้

กรณีที่ 3
$$\begin{array}{ccccccccc} (A & \supset & B) & . & (\sim & A & \supset & \sim & B) \\ \underline{F} & \underline{F} & \underline{T} & F & T & F & F & F & T \end{array}$$

จากการพิสูจน์พบว่า ข้อสมมติของเราขัดแย้งกันที่ผลลัพธ์ของ $(A \supset B)$ เพราะถ้า $(A \supset B)$ เป็น F แล้ว A จะต้องเป็น T และ B จะต้องเป็น F เท่านั้น แต่เราได้ค่า A เป็น F และ B เป็น T จากการพิสูจน์ของ $(\sim A \supset \sim B)$ ดังนั้น ประพจน์ที่ให้มานี้จึงไม่ลงรอยกัน (inconsistent)

แม้ว่าเราจะได้ผลลัพธ์ออกมาเป็นความขัดแย้งกันก็จริง แต่เราก็ยังบอกไม่ได้ว่า ประพจน์นี้เป็นประพจน์สันจนิรันดร์หรือไม่ เพราะเรายังเหลือกรณีที่เป็นไปได้อีก 2 กรณี ซึ่งกรณีใดกรณีหนึ่งอาจจะได้ผลลัพธ์ออกมาไม่เป็นการขัดแย้งกันก็ได้ นั่นหมายถึงว่ากรณีดังกล่าวไม่เป็นสัจนิรันดร์ คือไม่สมเหตุสมผลนั่นเอง ลองดูกรณีที่ 2 ดังต่อไปนี้

กรณีที่ 2
$$\begin{array}{ccccccccc} (A & \supset & B) & . & (\sim & A & \supset & \sim & B) \\ T & F & F & F & F & T & T & T & F \end{array}$$

กรณีที่ 2 นี้ ปรากฏผลลัพธ์ออกมาว่าไม่มีข้อขัดแย้งใด ๆ ในระหว่างเลย ประพจน์ที่ให้มาจึงไม่เป็นประพจน์สันจนิรันดร์ เมื่อผลลัพธ์เป็นเช่นนี้แล้ว เราจะตอบอย่างไร? ประพจน์นี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ ? ตอบว่าประพจน์นี้ไม่เป็นสัจนิรันดร์ เพราะยังมีที่ว่างพอที่จะให้เราเขียน F อย่างน้อย 1 ตัวลงในตัวเชื่อมหลักได้ ประพจน์นี้จึงน่าจะเป็นประพจน์ไม่แน่นอน (Contingent) เพราะมีทั้งความขัดแย้งและไม่ขัดแย้งในระหว่าง เพื่อให้แน่ใจว่าข้อสันนิษฐานของเราถูกต้องหรือไม่ เราสามารถนำเอาประพจน์นี้ไปพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดตรงได้ดังนี้

$$
\begin{array}{cccccccc}
(A & \supset & B) & . & (\sim A & \supset & \sim & B) \\
T & T & T & \mathbf{T} & F\ T & T & F & T \\
T & F & F & \mathbf{F} & F\ T & T & T & F \\
F & T & T & \mathbf{F} & T\ F & F & F & T \\
F & T & F & \mathbf{T} & T\ F & T & T & F
\end{array}
$$

จะเห็นว่าข้อสมมติฐานของเราที่ว่าประพจน์ที่ให้มานี้เป็นประพจน์ไม่แน่นอนนั้นถูกต้อง เพราะเราได้ผล ลัพธ์ที่เป็นทั้ง T และ F ในตัวเชื่อมหลัก

ตัวอย่างที่ 6 $(S \supset T) \equiv (\sim S \supset \sim T)$

ในกรณีนี้ตัวเชื่อมหลักเป็นประพจน์สมภาค ซึ่งมีค่าความจริงที่เป็น F ถึง 2 กรณีด้วยกันคือ

(1) ผลลัพธ์จะเป็น F ถ้า $(S \supset T)$ เป็น T แต่ $(\sim S \supset \sim T)$ เป็น F

(2) ผลลัพธ์จะเป็น F ถ้า $(S \supset T)$ เป็น F แต่ $(\sim S \supset \sim T)$ เป็น T

กรณีที่ 1 $(S \supset T) \equiv (\sim S \supset \sim T)$

$$
\begin{array}{ccccccc}
(S & \supset & T) & \equiv & (\sim S & \supset & \sim T) \\
 & T & & F & & F &
\end{array}
$$

กรณีที่ 2 $(S \supset T) \equiv (\sim S \supset \sim T)$

$$
\begin{array}{ccccccc}
(S & \supset & T) & \equiv & (\sim S & \supset & \sim T) \\
 & F & & F & & T &
\end{array}
$$

สมมติว่าเราเลือกเอากรณีที่ 1 มาพิสูจน์ก่อน ก็จะได้

$$
\begin{array}{cccccccc}
(S & \supset & T) & \equiv & (\sim S & \supset & \sim & T) \\
F & T & T & F & T\ F & F & F & T
\end{array}
$$

จากการพิสูจน์พบว่า ข้อสมมติของเราไม่มีความขัดแย้งใดๆ เลยในระหว่าง ประพจน์ที่ให้มาจึงไม่เป็นสัจนิรันดร์ ประพจน์นี้อาจจะเป็นประพจน์ขัดแย้ง (Contradictory) หรือประพจน์ไม่แน่นอน (Contingent) อย่างใดอย่างหนึ่ง ถ้าเราต้องการอยากจะทราบให้แน่ชัด เราก็สามารถทำการพิสูจน์ให้เห็นจริงด้วยตารางความจริงชนิดตรงได้ดังนี้

$$
\begin{array}{cccccccc}
(S & \supset & T) & \equiv & (\sim S & \supset & \sim & T \\
T & T & T & \mathbf{T} & F\ T & T & F & T \\
T & F & F & \mathbf{F} & F\ T & T & T & F \\
F & T & T & \mathbf{F} & T\ F & F & F & T \\
F & T & F & \mathbf{T} & T\ F & T & T & F
\end{array}
$$

จะเห็นว่าข้อสมมติฐานของเราที่ว่าประพจน์ที่ให้มานี้เป็นประพจน์ไม่แน่นอน เพราะเราได้ผลลัพธ์ที่เป็นทั้ง T และ F ในตัวเชื่อมหลัก

ดังนั้น เราจึงได้ข้อสรุปว่า

(1) เมื่อเราพบว่า ประพจน์ที่ให้มามีความเป็นไปได้ในการสมมติค่า F ที่ตัวเชื่อมหลักได้มากกว่า 1 กรณี ให้เราเลือกเอากรณีใดกรณีหนึ่งมาทดลองพิสูจน์

(2) ถ้ากรณีที่เราเลือกมาพิสูจน์นั้น ได้ผลลัพธ์ออกมาเป็นประพจน์ที่ไม่เป็นสัจนิรันดร์ (Non-tautology) กรณีอื่นๆ ก็ไม่จำเป็นที่จะต้องพิสูจน์

(3) ในทางกลับกัน หากในกรณีที่เรานำมาพิสูจน์แล้วได้ผลลัพธ์ออกมาเป็นประพจน์สัจนิรันดร์ (Tautology) เราจะต้องนำเอากรณีที่เหลือมาพิสูจน์ด้วย เพราะประพจน์ที่จะเป็นสัจนิรันดร์ได้จะต้องพิสูจน์ให้เห็นว่ามีความขัดแย้งกันในทุกกรณีเท่านั้น

(4) หากผลของการพิสูจน์ออกมาไม่เป็นประพจน์สัจนิรันดร์ เพื่อให้แน่ใจว่าประพจน์ดังกล่าวจะเป็นประพจน์ขัดแย้งหรือประพจน์ไม่แน่นอน เราสามารถนำเอาการพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดตรงมาช่วยเพื่อจะได้รู้ชัดลงไปว่าเป็นประพจน์อะไรกันแน่ใน 2 ประพจน์นั้น

ตัวอย่างที่ 7 $(A \supset B) \equiv (\sim B \supset \sim A)$

กรณีที่ 1 $(A \supset B) \equiv (\sim B \supset \sim A)$

$\underline{\mathbf{T}\ \mathbf{T}\ \mathbf{F}}$ F T F F F T

กรณีที่ 2 $(A \supset B) \equiv (\sim B \supset \sim A)$

T F F F $\underline{\mathbf{T}\ \mathbf{F}\ \mathbf{T}\ \ \mathbf{F}\ \mathbf{T}}$

จากตัวอย่างที่ 7 พิสูจน์แล้วทั้ง 2 กรณีได้ผลลัพธ์ออกมาเหมือนกันคือ มีความขัดแย้งเกิดขึ้นในระหว่างทั้ง 2 กรณี ดังนั้น ประพจน์ที่ให้มานี้จึงเป็นสัจนิรันดร์ คือมีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณีและมีความเป็นสมภาคกัน

7.3 วิธีพิสูจน์ข้ออ้างเหตุผลด้วยตารางความจริงชนิดอ้อม

เราได้เรียนเรื่องข้ออ้างเหตุผล (Arguments) มาแล้วในตรรกศาสตร์ดั้งเดิม (Traditional Logic) ในข้ออ้างเหตุผลจะมีส่วนประกอบที่สำคัญอยู่ 2 ส่วนคือ ส่วนที่เป็นข้ออ้างและส่วนที่เป็นข้อสรุป ข้ออ้างจะเป็นเงื่อนไขของข้อสรุปเสมอ ข้ออ้างเหตุผลจะมีรูปลักษณ์เหมือน $P \supset Q$ ซึ่ง P คือข้ออ้าง และ Q คือข้อสรุป ดังนั้น ความสัมพันธ์ระหว่างข้ออ้างกับข้อสรุปของข้ออ้างเหตุผลจะมีผลลัพธ์ตรงกับตารางความจริงของประพจน์เงื่อน ไขคือ

ข้ออ้าง (Premise)	ข้อสรุป (Conclusion)	ความสมเหตุสมผล (Validity)
T	T	สมเหตุสมผล
T	F	ไม่สมเหตุสมผล
F	T	สมเหตุสมผล
F	F	สมเหตุสมผล

ข้ออ้างเหตุผลจะไม่สมเหตุสมผล (Invalid) ในกรณีเดียวเท่านั้นคือ เมื่อข้ออ้างเป็น T แต่ข้อสรุปเป็น F นอกนั้นจะสมเหตุสมผลทั้งหมด

ต่อไปขอให้เราพิจารณาข้ออ้างเหตุผล (Arguments) ในภาษาคำพูดตามตัวอย่างข้างล่างนี้

ตัวอย่างที่ 8 เขาจะไปตลาด หรือ เขาจะดูหนังสือ (He will either go to market or he will study.) เขาไม่ไปตลาด (He will not go to market.) เพราะฉะนั้น เขาจะดูหนังสือ (Therefore, he will study.)

วิธีทำ ก่อนอื่นเราจะต้องถอดข้อความในข้ออ้างเหตุผลที่ให้มานี้เป็นสัญลักษณ์เสียก่อน โดยแทนค่าดังนี้

เขาจะไปตลาด (He will go to market.) แทนค่าด้วย M

เขาจะดูหนังสือ (He will study.) แทนค่าด้วย S

ดังนั้น ข้ออ้างเหตุผลนี้ก็จะแปลงเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$\begin{array}{l} M \vee S \\ \underline{\sim M} \\ \underline{\;\;S\;\;} \end{array}$$

ทีนี้เราจะพิสูจน์ข้ออ้างเหตุผลนี้ด้วยตารางความจริงได้อย่างไร? คำตอบมีว่า

(1) เนื่องจากข้ออ้างเหตุผลที่อยู่ในรูปภาษาคำพูดนั้น ประกอบด้วยข้ออ้างและข้อสรุป ข้ออ้างเหตุผลเหล่านั้นจะแสดงออกในรูปของประพจน์ที่เป็นเงื่อนไข (Hypothetical Proposition)

(2) ข้ออ้างจะบ่งถึงหรือเป็นเงื่อนไขของข้อสรุปเสมอ

(3) ข้อสรุปในข้ออ้างเหตุผลจะเกิดมาจากการเอาข้ออ้างทั้งหมดมารวมกัน (Conjunction of premises) ดังนั้น เราจะได้สูตรแห่งข้ออ้างเหตุผลดังนี้

ถ้าข้ออ้าง (1) . ข้ออ้าง (2) . ข้ออ้าง (3) . ข้ออ้าง (4)..............แล้ว ก็จะได้ข้อสรุป

$[P(1) \,.\, P(2) \,.\, P(3) \,.\, P(4) \ldots\ldots\ldots\ldots P(n)] \supset C$

ข้ออ้างเหตุผลที่เป็นตัวอย่างข้างบนนั้น สามารถเขียนให้อยู่ในรูปที่จะพิสูจน์ด้วยตารางความจริงได้ตามสูตรดังกล่าวได้ดังนี้ $[(M \vee S) \,.\, {\sim M}] \supset S$

ขั้นต่อไปก็แจกแจงด้วยตารางความจริง

$$\begin{array}{cccccccc} [(M & v & S) & . & \sim & M] & \supset & S \\ T & T & T & F & F & T & \mathbf{T} & T \\ T & T & F & F & F & T & \mathbf{T} & F \\ F & T & T & T & T & F & \mathbf{T} & T \\ F & F & F & F & T & F & \underline{\mathbf{T}} & F \end{array}$$

ข้ออ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผล (valid) เพราะได้ผลลัพธ์ออกมาเป็น T ทั้งหมดในตัวเชื่อมหลัก

ตัวอย่างที่ 9 ถ้านายแดงเป็นคนไทยแล้ว นายคลินตันก็จะเป็นคนสหรัฐอเมริกา (If Mr. Daeng is a Thai, then Mr. Clinton is an American.) นายแดงเป็นคนไทย (Mr. Daeng is a Thai.) ดังนั้น นายคลินตันเป็นคนสหรัฐอเมริกา (Therefore, Mr. Clinton is an American.)

วิธีทำ ถอดข้อความในข้ออ้างเหตุผลเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

ถ้านายแดงเป็นคนไทย (Mr. Daeng is a Thai.) แทนค่าด้วย T

นายคลินตันก็จะเป็นคนสหรัฐอเมริกา (Mr. Clinton is an American.) แทนค่าด้วย A

เพราะฉะนั้น ข้ออ้างเหตุผลนี้จะเป็น

$$\begin{array}{c} T \supset A \\ T \\ \hline A \\ \hline \end{array}$$

จัดให้อยู่ในรูปที่จะพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดตรงได้ดังนี้

$$[(T \supset A) . T] \supset A$$

พิสูจน์ด้วยตารางความจริงได้ดังนี้

[(T	⊃	A)	.	T]	⊃	A
T	T	T	T	T	**T**	T
T	F	F	F	T	**T**	F
F	T	T	F	F	**T**	T
F	T	F	F	F	**T**	F

เมื่อผลลัพธ์ของตัวเชื่อมหลักออกมาเป็น T ทั้งหมด ข้ออ้างเหตุผลนี้จึงสมเหตุสมผล (Valid)

นอกจากนี้แล้ว เรายังสามารถพิสูจน์ข้ออ้างเหตุผล (Arguments) ด้วยวิธีพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดอ้อม (Indirect Truth-Table Method) ได้ด้วย โดยมีวิธีและขั้นตอนการทำเหมือนกับวิธีพิสูจน์ข้ออ้างเหตุผลด้วยตารางความจริงชนิดตรงที่กล่าวมาข้างต้น ดูตัวอย่างต่อไปนี้ประกอบ

ตัวอย่างที่ 10 ถ้าฝนตกพรุ่งนี้ หรือ ฝนไม่ตกพรุ่งนี้แล้ว การพยากรณ์อากาศก็จะเป็นศาสตร์ที่เที่ยงตรง (If either it will rain tomorrow or it won't rain tomorrow, then weather predicting is an exact science.) เพราะฉะนั้น การพยากรณ์อากาศเป็นศาสตร์ที่เที่ยงตรง (Therefore, weather predicting is an exact science.)

วิธีทำ ถอดเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

ฝนตกพรุ่งนี้ ถอดเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า R

การพยากรณ์อากาศเป็นศาสตร์ที่เที่ยงตรง ถอดเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า W

เพราะฉะนั้น ข้ออ้างเหตุผลนี้จะเป็น

$$\begin{array}{c} (R \vee \sim R) \supset W \\ \hline W \\ \hline \end{array}$$

จัดให้อยู่ในรูปที่จะพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดอ้อมได้ดังนี้

[(R v ~ R) ⊃ W] ⊃ W

พิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดอ้อมได้ดังนี้

[(R v ~ R) ⊃ W] ⊃ W

<u>**F F T**</u>F T F F F

เนื่องจากข้อสมมติมีความขัดแย้งเกิดขึ้นตรงจุดที่ขีดเส้นใต้ ดังนั้น ข้ออ้างเหตุผลนี้ จึงสมเหตุสมผล (Valid)

นอกจากนี้แล้ว เรายังสามารถพิสูจน์ข้ออ้างเหตุผลด้วยวิธีพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดอ้อมอีกแบบหนึ่ง โดยไม่ต้องเปลี่ยนข้ออ้างเหตุผลนั้นให้อยู่ในรูปของเงื่อนไขก็ได้ ดูตัวอย่างต่อไปนี้ประกอบ

ตัวอย่างที่ 11 ~(E . D)

E

~ D

ขั้นที่ 1 สมมติค่า F ให้แก่ข้อสรุป

~(E . D)

E

F

~ D

ขั้นที่ 2 ผลของข้อสมมติดังกล่าวทำให้ D มีค่าความจริงเป็น T

~(E . D)

E

F T

~ D

ขั้นที่ 3 ใส่ค่า T ให้กับข้ออ้างที่ 2 คือ E เพราะตามหลักการของการพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดอ้อมจะพยายามทำให้ข้ออ้างทั้งหมดเป็น T (จริง) แต่ข้อสรุปเป็น F (เท็จ)

~(E . D)

T

E

F T

~ D

ขั้นที่ 4 ค่าความจริงของ E และ D ได้จากข้อสมมติแล้ว จึงใส่ค่าของตัวแปรทั้งสองลงที่ข้ออ้างที่ 1 ได้เลย

T T
~(E . D)
T
E
———————
F T
~ D
———————

ขั้นที่ 5 เมื่อ E เป็น T และ D ก็เป็น T แล้ว (E . D) จึงจำเป็นต้องเป็น T ตามกฎค่าความจริงพื้นฐานของประพจน์รวม (.)

T T T
~(E . D)
T
E
———————
F T
~ D
———————

ขั้นที่ 6 เมื่อข้ออ้างที่ 1 คือ (E . D) ซึ่งเป็น T ถูกปฏิเสธ ก็กลายเป็น F ทันที ดังนั้น จึงไม่มีขอบเขตที่จะทำให้ข้ออ้างที่ 1 เป็น T ได้ภายใต้ข้อสมมติที่ว่า ข้อสรุปเป็น F ก็ต่อเมื่อข้ออ้างทั้งสองต้องเป็น T

F T T T
~(E . D)
T
E
———————
F T
~ D
———————

เมื่อพิสูจน์จนถึงที่สุดแล้ว จะพบข้อขัดแย้งกับข้อสมมติฐานที่ว่า ข้อสรุปเป็น F ก็ต่อเมื่อข้ออ้างที่ 1 และข้ออ้างที่ 2 เป็น T แต่ข้ออ้างที่ 1 มีค่าเป็น F จึงขัดแย้งกับข้อสมมติ เพราะฉะนั้น ข้ออ้างเหตุผลที่ให้มานี้ จึงสมเหตุสมผล (valid)

เพื่อความมั่นใจ เราอาจต้องใช้ตารางความจริงชนิดตรงพิสูจน์ดูอีกครั้งดังนี้

[~ (E . D) . E] ⊃ ~ D
F T T T F T **T** F T
T T F F T T **T** T F
T F F T F F **T** F T
T F F F F F **T** T F

ตัวเชื่อมหลักเป็น T ทั้งหมด เพราะฉะนั้น จึงเป็นอันมั่นใจได้ว่าข้ออ้างเหตุผลที่ให้มาสมเหตุสมผลแน่นอน

ตัวอย่างที่ 12 $(M \supset (M \vee N)$

$\underline{(M \vee N) \supset M}$

วิธีทำ

F T F T T

$(M \supset (M \vee N)$

F T T F F

$\underline{(M \vee N) \supset M}$

ตอบ ข้ออ้างเหตุผลนี้ไม่สมเหตุสมผล (invalid) เพราะข้ออ้างทั้งหมดเป็น T แต่ข้อสรุปเป็น F คือไม่มีข้อขัดแย้งใดๆ ในระหว่างการพิสูจน์

เพื่อให้แน่ใจว่าเป็นจริงตามที่เราสรุปหรือไม่ เราก็สามารถนำการพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดตรงมาทำการตรวจสอบได้ดังนี้

[(M	⊃	(M	v	N)]	⊃	[(M	v	N)	⊃	M]
T	T	T	T	T	**T**	T	T	T	T	T
T	T	T	T	F	**T**	T	T	F	T	T
F	T	F	T	T	**F**	T	T	T	F	F
F	T	F	F	F	**F**	T	T	F	F	F

ตัวเชื่อมหลักของข้ออ้างเหตุผลนี้มีค่าเป็นทั้ง T และ F เพราะฉะนั้น จึงเป็นข้ออ้างเหตุผลที่ไม่สมเหตุสมผล (Invalid)

ตัวอย่างที่ 13 $P \vee \sim Q$

$\sim (R \,.\, \sim S)$

$\underline{R \vee P}$

$\underline{Q \vee S}$

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 ใส่ค่า F ให้กับข้อสรุป แล้วใส่ค่า T ให้กับข้ออ้างทั้งหมดดังนี้

T

$P \vee \sim Q$

T

$\sim (R \,.\, \sim S)$

T

$\underline{R \vee P}$

F

$\underline{Q \vee S}$

ขั้นที่ 2 เนื่องจาก Q v S เป็น F (เท็จ) ค่าความจริงของ R และ S จะต้องเป็น F (เท็จ) ทั้งคู่ เพราะ Q v S จะเป็นเท็จได้กรณีเดียวเท่านั้นคือ Q และ S เป็น F ทั้งคู่

T
P v ~ Q
T
~ (R . ~ S)
T
R v P
F F F
Q v S

ขั้นที่ 3 ระหว่างข้ออ้างทั้ง 3 นั้น ให้เราเลือกดูข้ออ้างที่ 2 ก่อน เพราะตัวเชื่อมหลักของข้ออ้างที่ 1 และที่ 3 เป็นประพจน์เลือก (v) ซึ่งมีทางที่ผลลัพธ์จะออกมาเป็น T (จริง) ได้ถึง 3 กรณี ในข้ออ้างที่ 2 นี้ เราใส่ค่า T ให้กับการปฏิเสธ (R . ~ S) ได้ทันที เพราะถือว่าเป็นตัวเชื่อมที่มีขอบเขตกว้างที่สุดในข้ออ้างนี้ ซึ่งตามที่เราสมมติไว้ข้ออ้างทั้งหมดจะมีค่าเป็น T ดังนั้น ผลลัพธ์ของ (R . ~ S) จะต้องเป็น F (เท็จ) ดังนี้

T
P v ~ Q
T F
~ (R . ~ S)
T
R v P
F F F
Q v S

ขั้นที่ 4 เพราะเรารู้ค่าของ S แล้วว่าเป็น F จากข้อสรุป ดังนั้น เราจึงสามารถใส่ค่า S ลงไปในข้ออ้างที่ 2 ได้เลย และเมื่อ S ถูกปฏิเสธก็จะกลายเป็น T เมื่อเรารู้แล้วว่าตัวหลังถูกปฏิเสธแล้วเป็น T การที่จะทำให้ (R . ~ S) เป็น F ได้ จึงมีกรณีเดียวคือ R จะต้องเป็น F เท่านั้น เพราะฉะนั้น R จึงเป็น F

T
P v ~ Q
T F F T F
~ (R . ~ S)
T
R v P
F F F
Q v S

ขั้นที่ 5 เราทราบค่าของ R จากข้ออ้างที่ 2 แล้วว่าเป็น F เพราะฉะนั้น จึงใส่ F ให้กับ R ในข้ออ้างที่ 3 ได้เลย เมื่อ (R v P) เป็น T แล้ว R เป็น F ส่วน P จะต้องเป็น T เท่านั้น เพราะถูกกฎค่าความจริงพื้นฐานบังคับ เราจึงได้ผลลัพธ์ดังนี้

T

P v ~ Q

T F F T F

~ (R . ~ S)

F T T

R v P

F F F

Q v S

ขั้นที่ 6 เราทราบค่า P จากข้ออ้างที่ 3 ว่าเป็น T ดังนั้น จึงใส่ค่า T ให้กับ P ที่ข้ออ้างที่ 1 ได้เลย และเราก็รู้ค่า Q แล้วเช่นกันว่าเป็น F จากข้อสรุป ดังนั้น เราก็ใส่ค่า F ให้กับ Q ที่ข้ออ้างที่ 1ได้เลย เมื่อ Q ถูกปฏิเสธก็จะได้ T เมื่อได้ค่าหมดแล้ว ผลก็ปรากฏว่า ข้อสมมติดังกล่าวไม่มีข้อขัดแย้งในระหว่างใดๆ เลย ดังนั้น ข้ออ้างเหตุผลนี้จึงไม่สมเหตุสมผล (invalid)

T T T F

P v ~Q

T F F T F

~ (R . ~ S)

F T T

R v P

F F F

Q v S

ตัวอย่างที่ 14 (A . B) ⊃ C

(A ⊃ C) ⊃ D

B ⊃ E

B ⊃ (D . E)

ขั้นที่ 1

```
          T
( A . B ) ⊃ C
            T
( A ⊃ C ) ⊃ D
     T
  B ⊃ E
-------------
    F
B ⊃ (D . E)
-------------
```

ขั้นที่ 2

```
          T
( A . B ) ⊃ C
            T
( A ⊃ C ) ⊃ D
  T T T
  B ⊃ E
-------------
T F     F
B ⊃ (D . E)
-------------
```

ขั้นที่ 3

```
          T
( A . B ) ⊃ C
            T
( A ⊃ C ) ⊃ D
  T T T
  B ⊃ E
-------------
T F    F F T
B ⊃ ( D . E )
-------------
```

ขั้นที่ 4

```
          T
( A . B ) ⊃ C
 T F F  T  F
( A ⊃ C ) ⊃ D
  T T T
  B ⊃ E
-------------
T F   F F T
B ⊃ ( D . E )
-------------
```

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathbf{T\,T\,T\;\;T\;\;F} \\
\text{ขั้นที่ 5} & (A\,.\,B) \supset C \\
 & T\;\;F\;\;F\;\;T\;\;F \\
 & (A \supset C) \supset D \\
 & T\;\;T\;\;T \\
 & B \supset E \\
\hline
 & T\;\;F\;\;\;F\;F\;T \\
 & B \supset (D\,.\,E) \\
\hline
\end{array}
$$

เมื่อพิสูจน์จนครบทุกขั้นตอนแล้ว ผลปรากฏว่า ข้ออ้างที่ 1 เกิดความขัดแย้งกันขึ้น นั่นคือ (A . B) มีค่าเป็น T และ C มีค่าเป็น F ที่ถูกนั้น ตัวเชื่อมหลักของ(A . B) ⊃ C คือ ⊃ จะต้องมีค่าเป็น F แต่เราสมมติไว้ก่อนแล้วว่า บทเสนอจะต้องเป็น T ทั้งหมด ดังนั้น มันจึงขัดแย้งกัน ข้ออ้างเหตุผลนี้จึงสมเหตุสมผล (valid)

แบบฝึกหัดบทที่ 7

ก. จงใช้ตารางความจริงชนิดอ้อม (Indirect Truth Table Method) พิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. $[(A \vee B) \,.\, A] \supset B$
2. $[(P \supset Q) \supset R] \supset [(P \,.\, Q) \supset R]$
3. $[(P \supset Q) \,.\, (Q \supset P)] \supset (P \supset P)$
4. $[(P \supset Q) \,.\, Q] \supset P$
5. $[(A \supset B) \,.\, A] \supset A$
6. $[(P \supset Q) \,.\, (Q \supset R)] \supset (P \supset R)$
7. $[(Q \supset P) \,.\, (R \supset Q)] \supset (Q \supset R)$
8. $[(P \supset Q) \,.\, P] \supset (Q \vee R)$
9. $[(P \supset Q) \supset R] \supset [(R \supset P) \supset (J \supset P)]$
10. $[\{(Q \vee R) \supset P\} \,.\, Q] \supset P$
11. $[\{(Q \vee R) \supset P\} \,.\, R] \supset (P \supset J)$
12. $[\{(A \vee B) \supset C\} \,.\, \{(C \vee D) \supset E\}] \supset (B \supset E)$

ข. จงเปลี่ยนข้ออ้างเหตุผลต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของเงื่อนไข แล้วพิสูจน์ความสมเหตุสมผลด้วยวิธีพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดอ้อม

1. O

   P

   $\therefore$ O . P

2. $E \supset F$

   $F \supset E$

   $\therefore$ $E \vee F$

3. $H \supset I$

   $H \vee I$

   $\therefore$ I

4. $S \supset (T \supset U)$

   $S \supset T$

   $\therefore$ $S \supset U$

5. $(A \supset B) \,.\, (A \supset C)$

   $A \vee C$

∴ B v C

6. G ⊃ (H v I)

G ⊃ ~H

∴ G v I

7. (J ⊃ K) . (L ⊃ M)

J v M

∴ K v S

8. P ⊃ Q

Q ⊃ R

~S ⊃ ~R

∴ P ⊃ S

9. P ⊃ Q

~P ⊃ R

∴ ~Q ⊃ R

10. P ⊃ Q

R ⊃ P

∴ P ⊃ (Q ⊃ R)

11. (~D ⊃ ~E) ⊃ ~F
T

∴ F ⊃ (~E ⊃ ~D)
F

12. P ⊃ (Q ⊃ R)
T T T F F

T F F T F
(P ⊃ R) ⊃ S

T F T
Q ⊃ T

T F F F T
∴ Q ⊃ (S . T)

แผนการจัดการเรียนรู้บทที่ 8

เรื่อง วิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยกฎการอนุมาน **เวลา 6 ชั่วโมง**

****

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นิสิตมีความเข้าใจหลักการและขั้นตอนการพิสูจน์ข้ออ้างเหตุผลแบบนิรนัยโดยการอนุมานและสามารถ พิสูจน์ความสมเหตุ สมผลของข้ออ้างเหตุผลด้วยการใช้กฎการอนุมานได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกหลักการและขั้นตอนวิธีพิสูจน์แบบนิรนัยได้
2. พิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลด้วยการใช้กฎการอนุมานได้

2. แนวคิดหลัก (สาระสำคัญ)

วิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยการใช้กฎการอนุมาน คือ วิธีพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลแบบนิรนัย โดยการเชื่อมโยงเหตุไปหาผลให้สอดคล้องกันด้วยการใช้กฎการอนุมาน

3. เนื้อหาสาระ

1. ความหมายของวิธีพิสูจน์แบบนิรนัย
2. กฎของการอนุมาน
3. ตัวอย่างวิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยกฎการอนุมาน

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. อาจารย์แจ้งจุดประสงค์ให้นิสิตทราบ
2. อาจารย์แนะนำวิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยการใช้กฎการอนุมาน
3. นิสิตแบ่งกลุ่มเป็น 4 กลุ่ม โดยให้แต่ละกลุ่มร่วมกันพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลที่อาจารย์กำหนดให้ด้วยการใช้กฎการอนุมาน
4. นิสิตแต่ละกลุ่มแลกเปลี่ยนกันตรวจคำตอบ หากข้อใดผิด ให้แจ้งกลุ่มที่ทำโจทย์เพื่อแก้ไขความถูกต้อง
5. นิสิตทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติมจากเอกสารประกอบการสอนบทที่ 8
6. อาจารย์และนิสิตร่วมกันเฉลยแบบฝึกหัด
7. นิสิตสรุปจดบันทึกลงในสมุดของนิสิต

5. แหล่งการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอนวิชา ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์บทที่ 8
2. แบบฝึกหัดบทที่ 8

3. Power-point

6. กระบวนการวัดผลและประเมินผล

1. การร่วมกันสรุป, อภิปรายและตอบคำถาม
2. การตอบคำถามในแบบฝึกหัด
3. การสรุปจดบันทึกของนิสิต
4. เอกสารแบบฝึกหัด
5. ตรวจผลงานการตอบโจทย์ของแต่ละกลุ่ม

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

(..)

อาจารย์สอน

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

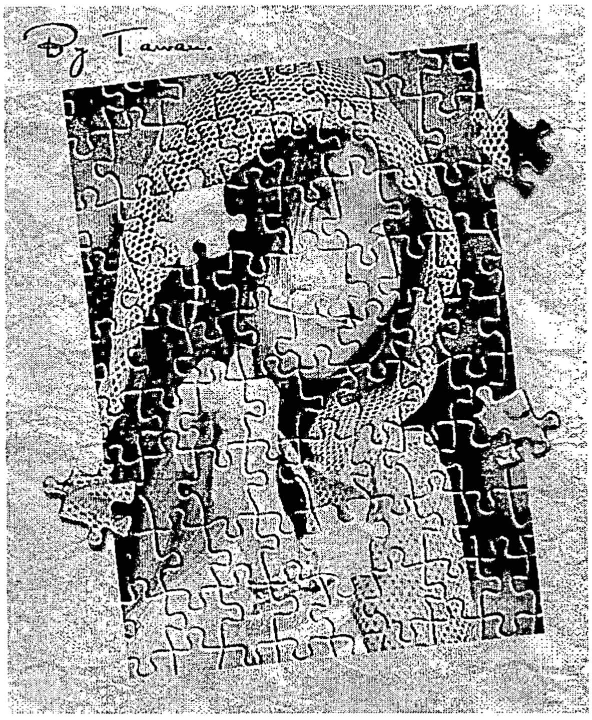
....

....

บทที่ 8
วิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยกฎการอนุมาน
(The Method of Deduction by Inference Rules)

8.1 ความหมายของวิธีพิสูจน์แบบนิรนัย

วิธีนิรนัย หรือ วิธีพิสูจน์ความสมเหตุสมผลตามรูปแบบ (Formal Proof of Validity) บางครั้งก็เรียกว่า "วิธีนิรนัยธรรมชาติ" (Natural Deduction) เพราะวิธีนี้เป็นการเลียนแบบการจัดเรียงหรือการอนุมานความคิดในสมองของมนุษย์ตามธรรมชาตินั่นเอง หรือจะเรียกว่า "วิธีพิสูจน์ที่ได้ผลลัพธ์ด้วยการแทนที่" (Derivation by substitution) เป็นวิธีพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผล (Arguments) ที่ประกอบกันขึ้นมาจากประพจน์ต่างๆ ซึ่งทำหน้าที่เป็นข้ออ้าง (premisses) และข้อสรุป (conclusion) เฉกเช่นเดียวกับการต่อจิ๊กซอว์



ในการต่อจิ๊กซอว์ ถ้าภาพใดภาพหนึ่งขาดหายไปก็จะทำให้ไม่ได้ภาพสมบูรณ์ วิธีนี้ก็คล้ายกับการต่อจิ๊กซอว์ เพราะเป็นการหาข้อสรุปจากข้ออ้างโดยการอนุมานข้ออ้างที่เป็นไปได้เชื่อมโยงกันไปจนได้ข้อสรุปจึงจะทำให้การอ้างเหตุผลนั้นสมบูรณ์

ถ้าจะเปรียบเทียบวิธีพิสูจน์แบบนิรนัยนี้กับตารางความจริงชนิดตรงก็จะเห็นว่า ตารางความจริงบอกเราได้เพียงแค่ว่าข้ออ้างเหตุผลที่ให้มานั้นสมเหตุสมผลหรือไม่ แต่วิธีนิรนัยจะบอกเราได้มากกว่านั้น

คือ สามารถบอกเราได้ว่า เราจะอนุมานข้อสรุปจากข้ออ้างได้อย่างไร นอกจากนั้นแล้ววิธีนี้ยังได้เปรียบกว่าวิธีพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดตรงตรงที่ในวิธีพิสูจน์ด้วยตารางความจริงชนิดตรงนั้นถ้าข้ออ้างเหตุผลมีตัวแปรมากกว่า 3 ตัว ก็จะต้องลำบากในการคำนวณแถว แต่วิธีนี้จะไม่ลำบากเลยแม้จะมีตัวแปรกี่ตัวก็ตามก็สามารถพิสูจน์ตามกฎได้ไม่ยาก ตัวอย่างเช่น

$A \supset B$

$B \supset C$

$C \supset D$

$\sim D$

$A \vee E$

$\therefore \quad E$

ถ้าเราจะพิสูจน์ข้ออ้างเหตุผลนี้ด้วยตารางความจริงชนิดตรง จำเป็นที่เราจะต้องสร้างแถวตารางความจริงถึง 32 แถว เพราะมีตัวแปรทั้งหมดถึง 5 ตัว แต่เราสามารถพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลนี้ด้วยวิธีนิรนัยโดยการอนุมานข้อสรุปจากข้ออ้างไปตามลำดับ เริ่มจากข้ออ้าง 2 ข้ออ้างแรกคือ $A \supset B$ และ $B \supset C$ เราสามารถจะอนุมาน $A \supset C$ โดยใช้กฎตรรกบทเงื่อนไข (Hypothetical Syllogism)

จาก $A \supset C$ และบทเสนอที่ 3 คือ $C \supset D$ เราก็สามารถจะอนุมาน $A \supset D$ ได้อย่างสมเหตุสมผลโดยใช้กฎตรรกบทเงื่อนไขอีกครั้ง

จาก $A \supset D$ และข้ออ้างที่ 4 คือ $\sim D$ เราก็สามารถอนุมานได้ว่า $\sim A$ โดยใช้กฎการปฏิเสธผล (Modus Tollens)

จาก $\sim A$ และข้ออ้างที่ 5 คือ $A \vee E$ เราก็สามารถอนุมานได้อย่างสมเหตุสมผลว่า E โดยใช้กฎตรรกบทเลือก (Disjunctive Syllogism) ซึ่งเป็นข้อสรุปของข้ออ้างเหตุผลนี้นั่นเอง

เราสามารถเขียนวิธีพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลนี้ตามลำดับขั้นตอนได้ดังนี้

1.	$A \supset B$		
2.	$B \supset C$		
3.	$C \supset D$		
4.	$\sim D$		
5.	$A \vee E$	$\therefore$	E
6.	$A \supset C$	1., 2.	H.S.
7.	$A \supset D$	6., 3.	H.S.
8.	$\sim A$	7., 4.	M.T.
9.	E	5., 8.	D.S.

การที่ข้อสรุปสามารถอนุมานได้จากข้ออ้างของข้ออ้างเหตุผลทั้ง 5 โดยข้ออ้างเหตุผลพื้นฐานที่สมเหตุ สมผล (Elementary Valid Arguments) ทั้ง 4 คือ ตั้งแต่ข้อ 6 ถึงข้อ 9 นั้นพิสูจน์ให้รู้ว่าข้ออ้างเหตุผลเดิมสมเหตุสมผล

เราพอจะนิยามข้ออ้างเหตุผลพื้นฐานที่สมเหตุสมผลได้ว่า ได้แก่ ข้ออ้างเหตุผลใดๆ ซึ่งเป็นตัวอย่างการแทนที่แบบแห่งข้ออ้างเหตุผลพื้นฐานที่สมเหตุสมผล ดังนั้น ข้ออ้างเหตุผลที่ว่า

$$(A \ . \ B) \supset [(C \equiv (D \vee E)]$$

$$(A \ . \ B)$$

$$\therefore \quad C \equiv (D \vee E)$$

จึงเป็นข้ออ้างเหตุผลพื้นฐานที่สมเหตุสมผล (An Elementary Valid Argument) เพราะมันเป็นตัวอย่างการแทนที่ (A Substitution Instance) รูปแบบแห่งข้ออ้างเหตุผลพื้นฐานที่สมเหตุสมผล คือ กฎแห่งการยืนยันเหตุ (Modus Ponens เรียกชื่อย่อว่า M.P.) ข้ออ้างเหตุผลนี้ได้รับมาจาก

$$p \supset q$$

$$p$$

$$\therefore \quad q$$

โดยการแทนที่ p ด้วย (A . B) และแทนที่ q ด้วย $C \equiv (D \vee E)$

รูปแบบแห่งข้ออ้างเหตุผลพื้นฐานที่สมเหตุสมผลอื่นๆ ที่อยู่ในลักษณะการอนุมานเหมือนกฎการยืนยันหน้าก็พึงเข้าใจในทำนองเดียวกันนี้

วิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยการใช้กฎการอนุมานนี้ เป็นวิธีพิสูจน์ชนิดตรงซึ่งทำให้เราสามารถได้ข้อสรุปจากข้ออ้างโดยการใช้กฎการอนุมาน (Rules of Inference) และกฎของการแทนที่ (Rules of Replacement) หรือกฎสมภาค (Rules of Equivalence)

ก่อนจะทำการพิสูจน์ด้วยวิธีนี้ ขั้นแรกจำเป็นที่เราจะต้องทำความรู้จักกับกฎที่จะนำมาใช้เพื่อช่วยในการพิสูจน์ความสมเหตุสมผลเสียก่อน

8.2 กฎการอนุมาน

กฎการอนุมานมีทั้งหมด 11 กฎด้วยกันคือ

(1) กฎการยืนยันเหตุ (Modus Ponens : M.P.)

$$p \supset q$$

$$p$$

$$\therefore \quad q$$

(2) กฎการปฏิเสธผล (Modus Tollens : M.T.)

$$p \supset q$$

$$\sim q$$

$$\therefore \quad \sim p$$

(3) กฎตรรกบทเงื่อนไข (Hypothetical Syllogism : H.S.)

$p \supset q$

$q \supset r \qquad \therefore \quad p \supset r$

(4) กฎตรรกบทเลือก (Disjunctive Syllogism : D.S.)

$p \vee q$

$\sim p$

$\therefore \quad q$

(5) กฎการเลือกเงื่อนไข (Constructive Dilemma : C.D.)

$(p \supset q) \cdot (r \supset s)$

$p \vee r$

$\therefore \quad q \vee s$

(6) กฎการเลือกปฏิเสธผลของเงื่อนไข (Destructive Dilemma : D.D.)

$(p \supset q) \cdot (r \supset s)$

$\sim q \vee \sim s$

$\therefore \quad \sim p \vee \sim r$

(7) กฎการย่อ (Simplification : Simp.)

$p \cdot q$

$\therefore \quad p$

(8) กฎการรวม (Conjunction : Conj.)

p

q

$\therefore \quad p \cdot q$

(9) กฎการเพิ่ม (Addition : Add.)

p

$\therefore \quad p \vee q$

(10) กฎการดูดซับ (Absorption: Abs.)

$p \supset q$

$\therefore \quad p \supset (p \cdot q)$

(11) กฎความจำเป็น (Necessity: Nec.)

$p \supset q$

$\sim p \supset q$

$\therefore \quad q$

8.3 ตัวอย่างวิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยกฎการอนุมาน

ต่อไปนี้จะเป็นตัวอย่างวิธีพิสูจน์แบบนิรนัยโดยใช้กฎการอนุมานทั้ง 11 กฎ

ตัวอย่างที่ 1 $D \supset E, D . F \therefore E$

วิธีทำ

1.	$D \supset E$		
2.	$D . F$	$\therefore E$	
3.	D	2	Simp.
4.	E	1, 3	M.P.

ในตัวอย่างที่ 1 นี้มีขั้นตอนการพิสูจน์ดังนี้

1. นำข้ออ้างมาจัดเรียงตามลำดับ โดยเขียนเลขลำดับไว้หน้าข้ออ้างนั้นๆ ด้วย

2. เขียนข้อสรุปไว้ทางด้านขวาของข้ออ้างสุดท้าย พร้อมกับใส่เครื่องหมาย $\therefore$ หน้าข้อสรุป

3. จากนั้นให้เขียนขั้นตอนการพิสูจน์แต่ละขั้นไปตามลำดับ โดยใส่เลขลำดับกำกับข้างหน้าต่อจากข้ออ้างและข้างหลังให้อ้างที่มา คือเลขลำดับของข้ออ้างมาพิสูจน์พร้อมทั้งกฎที่นำมาใช้โดยเขียนเพียงชื่อย่อ จนกระทั่งได้ข้อสรุปจึงถือเป็นการจบกระบวนการพิสูจน์

จากตัวอย่างข้างบนแถวที่ 1- 2 เป็นข้ออ้างโดยมี E เป็นข้อสรุปอยู่ด้านขวาของแถวที่ 2 ส่วนแถวที่ 3 – 4 เป็นขั้นตอนของการพิสูจน์โดยที่ในแถวที่ 3 เราบอกที่มาโดยใส่เลขข้างหน้าแถวคือ 2 ซึ่งได้มาด้วยกฎการย่อ (Simp.) และในแถวที่ 4 เราก็ได้ E ซึ่งเป็นข้อสรุปโดยการอนุมานจากแถวที่ 1 กับแถวที่ 3 ด้วยกฎการยืนยันเหตุ (M.P.)

ตัวอย่างที่ 2 $[(H \supset I) . (J \supset K)], \sim I \quad \therefore \sim H$

1.	$(H \supset I) . (J \supset K)$		
2.	$\sim I$	$\therefore$	$\sim H$
3.	$H \supset I$	1	Simp.
4.	$\sim H$	3, 2	M.T.

ตัวอย่างที่ 3

1.	$D \supset E$		
2.	$[D \supset (D . E)] \supset (F \supset \sim G)$	$\therefore$	$F \supset \sim G$
3.	$D \supset (D . E)$	1	Abs.
4.	$F \supset \sim G$	2, 3	M.P.

ตัวอย่างที่ 4

1.	$P \vee (Q \supset S)$		
2.	$\sim R \supset (S \supset T)$		
3.	$P \supset R$		
4.	$\sim R$	$\therefore$	$Q \supset T$
5.	$\sim P$	3, 4	M.T.
6.	$Q \supset S$	1, 5	D.S.
7.	$S \supset T$	2, 4	M.P.
8.	$Q \supset T$	6, 7	H.S.

ตัวอย่างที่ 5

1.	$(T \supset U) . (V \supset W)$		
2.	$(U \supset X) . (W \supset Y)$		
3.	T	$\therefore X \vee Y$	
4.	$T \supset U$	1	Simp.
5.	U	4, 3	M.P.
6.	$U \vee W$	5	Add.
7.	$X \vee Y$	2, 6	C.D.

แบบฝึกหัดบทที่ 8

ก. จงหาคำตอบที่ถูกต้องว่าข้อสรุปของโจทย์แต่ละข้อต่อไปนี้ได้มาจากการใช้กฎการอนุมานอะไร

(1) $(A \cdot B) \supset C$

$\therefore\ (A \cdot B) \supset [(A \cdot B) \cdot C]$ ตอบ Absorption

(2) $(D \vee E) \cdot (F \vee G)$

$\therefore\ D \vee E$ ตอบ Simplification

(3) $H \supset I$

$\therefore\ (H \supset I) \vee (H \supset \sim I)$ ตอบ ____________

(4) $\sim(J \cdot K) \cdot (L \supset \sim M)$

$\therefore\ \sim(J \cdot K)$ ตอบ ____________

(5) $[N \supset (O \cdot P)] \cdot [Q \supset (O \cdot R)]$

$N \vee Q$

$\therefore\ (O \cdot P) \vee (O \cdot R)$ ตอบ ____________

(6) $(X \vee Y) \supset \sim(Z \cdot \sim A)$

$\sim\sim(Z \cdot \sim A)$

$\therefore\ \sim(X \vee Y)$ ตอบ ____________

(7) $(S \equiv T) \vee [(U \cdot V) \vee (U \cdot W)]$

$\sim(S \equiv T)$

$\therefore\ (U \cdot V) \vee (U \cdot W)$ ตอบ ____________

(8) $\sim(B \cdot C) \supset (D \vee E)$

$\sim(B \cdot C)$

$\therefore\ D \vee E$ ตอบ ____________

(9) $(F \equiv G) \supset \sim(G \cdot \sim F)$

$\sim(G \cdot \sim F) \supset (G \supset F)$

$\therefore\ (F \equiv G) \supset (G \supset F)$ ตอบ ____________

(10) $\sim(H \cdot \sim I) \supset (H \supset I)$

$(H \supset I) \supset (I \equiv H)$

$\therefore\ \sim(H \cdot \sim I) \supset (I \equiv H)$ ตอบ ____________

(12) $(A \supset B) \supset (C \vee D)$

$A \supset B$

$\therefore\ C \vee D$ ตอบ MP

(12) $[E \supset (F \equiv \sim G)] \vee (C \vee D)$

$\sim[E \supset (F \equiv \sim G)]$

$\therefore\ (C \vee D)$ ตอบ ________

(13) $(C \vee D) \supset [(J \vee K) \supset (J \,.\, K)]$

$\sim[(J \vee K) \supset (J \,.\, K)]$

$\therefore\ \sim(C \vee D)$ ตอบ ________

(14) $\sim[L \supset (M \supset N)] \supset \sim(C \vee D)$

$\sim[L \supset (M \supset N)]$

$\therefore\ \sim(C \vee D)$ ตอบ ________

(15) $(J \supset K) \,.\, (K \supset L)$

$L \supset M$

$\therefore\ [(J \supset K) \,.\, (K \supset L)] \,.\, (L \supset M)$ ตอบ ________

(16) $N \supset (O \vee P)$

$Q \supset (O \vee R)$

$\therefore\ [Q \supset (O \vee R)] \,.\, [N \supset (O \vee P)]$ ตอบ ________

(17) $(S \supset T) \supset (U \supset V)$

$\therefore\ (S \supset T) \supset [(S \supset T) \,.\, (U \supset V)]$ ตอบ ________

(18) $(W \,.\, \sim X) \equiv (Y \supset Z)$

$\therefore\ [(W \,.\, \sim X) \equiv (Y \supset Z)] \vee (X \equiv \sim Z)$ ตอบ ________

(19) $[(H \,.\, \sim I) \supset C] \,.\, [(I \,.\, \sim H) \supset D]$

$(H \,.\, \sim I) \vee (I \,.\, \sim H)$

$\therefore\ C \vee D$ ตอบ ________

(20) $[(O \supset P) \supset Q] \supset \sim(C \vee D)$

$\sim(C \vee D) \supset (C \vee D)$

$\therefore\ [(O \supset P) \supset Q] \supset (C \vee D)$ ตอบ ________

ข. จงเติมข้ออ้างที่ละไว้ให้ถูกต้องตามกฎการอนุมานพร้อมกับบอกชื่อกฎที่ถูกต้องด้วย

(1) $(\sim D \,.\, F) \vee \sim C$, _$\sim(\sim D \,.\, F)$__ / $\therefore \sim C$ D.S.

(2) $A \supset [(A \supset B) \supset C]$, ______A________ / $\therefore (A \supset B) \supset C$ M.P.

(3) $\sim(\sim F \supset E)$,___ $(E \supset \sim F) \supset (\sim F \supset E)$____ / $\therefore \sim(E \supset \sim F)$ M.T.

$\sim(\sim F \supset E) \supset \sim(E \supset \sim F)$ M.P.

$(\sim F \supset E) \vee \sim(E \supset \sim F)$ D.S.

(4) $\sim F$,_____ $F \vee (A \equiv \sim F)$____ / $\therefore A \equiv \sim F$ D.S.

(5) $(A \cdot B) \supset (B \vee C)$,___ $A \supset (A \cdot B)$ ___ / $\therefore A \supset (B \vee C)$

(6) $(A \vee C) \supset \sim(B \vee C)$, $(\sim B \vee \sim C) \vee (A \vee C)$,___ $(\sim B \vee \sim C) \supset \sim A$

$[(\sim B \vee \sim C) \supset \sim A] \cdot [(A \vee C) \supset \sim(B \vee C)]$ ___ / $\therefore \sim A \vee \sim(B \vee C)$

(7) $\sim[F \supset (G \vee H)]$,_____ $(A \vee B)$_ $\supset$ _$[F \supset (G \vee H)]$_____ / $\therefore \sim(A \vee B)$

(8) $\sim[\sim B \vee (A \supset C)]$,___ $[\sim(\sim A \supset B)]$_ $\supset$ _$[\sim B \vee (A \supset C)]$ _____ / $\therefore \sim\sim(\sim A \supset B)$

(9) $[B \supset (A \supset B)] \supset (\sim A \supset B)$,__ $[(B \supset \sim A)]$_ $\supset$ $[B \supset (A \supset B)]$__

/ $\therefore (B \supset \sim A) \supset (\sim A \supset B)$

(10) $(\sim B \supset \sim A) \supset \sim A$, $(\sim A \supset B) \supset (B \supset \sim A)$,___

$[(\sim A \supset B) \supset (B \supset \sim A)] \cdot [(\sim B \supset \sim A) \supset \sim A]$ ___

$[(\sim A \supset B)] \vee [(\sim B \supset \sim A)]$ / $\therefore (B \supset \sim A) \vee \sim A$

ค. จงพิสูจน์ข้ออ้างเหตุผลต่อไปนี้ด้วยวิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยกฎการอนุมานเพียง 2 กฎเท่านั้น

(1) A, B $\therefore (A \vee C) \cdot B$ 1 A

(2) $D \supset E, D \cdot F$ $\therefore E$

(3) G, H $\therefore (G \cdot H) \vee I$ 2 B

(4) $J \supset K, J$ $\therefore K \vee L$

(5) $M \vee N, \sim M \cdot \sim O$ $\therefore N$

(6) $P \cdot Q, R$ $\therefore P \cdot R$

(7) $S \supset T, \sim T \cdot \sim U$ $\therefore \sim S$

(8) $V \vee W, \sim V$ $\therefore W \vee X$

(9) $Y \supset Z, Y$ $\therefore Y \cdot Z$

(10) $A \supset B, (A \cdot B) \supset C$ $\therefore A \supset C$

(11) $D \supset E, (E \supset F) \cdot (F \supset D)$ $\therefore D \supset F$

(12) $(G \supset H) \cdot (I \supset J), G$ $\therefore H \vee J$

(13) $\sim(K \cdot L), K \supset L$ $\therefore \sim K$

(14) $(M \supset N) \cdot (M \supset O), N \supset O$ $\therefore M \supset O$

(15) $(P \supset Q) \cdot (R \supset S), (P \vee R) \cdot (Q \vee R)$ $\therefore Q \vee S$

(16) $(T \supset U) \cdot (T \supset V), T$ $\therefore U \vee V$

(17) $(W \vee X) \supset Y, W$ $\therefore Y$

(18) $(Z . A) \supset (B . C), Z \supset A \quad \therefore\ Z \supset (B . C)$

(19) $D \supset E, [D \supset (D . E)] \supset (F \supset \sim G) \quad \therefore\ F \supset \sim G$

(20) $(\sim H \vee I) \vee J, \sim(\sim H \vee I) \quad \therefore\ J \vee \sim H$

(21) $(K \supset L) \supset M, \sim M . \sim(L \supset K) \quad \therefore\ \sim(K \supset L)$

(22) $(N \supset O) \supset (P \supset Q), [P \supset (N \supset O)] . [N \supset (P \supset Q)] \quad \therefore\ P \supset (P \supset Q)$

(23) $R \supset S, S \supset (S . R) \quad \therefore\ [R \supset (R . S)] . [S \supset (S . R)]$

(24) $[T \supset (U \vee V)] . [U \supset (T \vee V)], (T \vee U) . (U \vee V) \quad \therefore\ (U \vee V) \vee (T \vee V)$

(25) $(W . X) \supset (Y . Z), \sim[(W . X) . (Y . Z)] \quad \therefore\ \sim(W . X)$

(26) $A \supset B, A \vee C, C \supset D \quad \therefore\ B \vee D$

(27) $(E . F) \vee (G \supset H), I \supset G, \sim(E . F) \quad \therefore\ I \supset H$

(28) $J \vee \sim K, K \vee (L \supset J), \sim J \quad \therefore\ L \supset J$

(29) $(M \supset N) . (O \supset P), N \supset P, (N \supset P) \supset (M \vee O) \quad \therefore\ N \vee P$

(30) $Q \supset (R \vee S), (T . U) \supset R, (R \vee S) \supset (T . U) \quad \therefore\ Q \supset R$

ง. จงบอกชื่อกฎการอนุมานและใส่หมายเลขขั้นตอนการพิสูจน์ต่อไปนี้ให้ถูกต้อง

(1) $D \supset (A \vee C), D . \sim A \quad \therefore\ C$

วิธีทำ (1) $D \supset (A \vee C)$

(2) $D . \sim A \quad \therefore\ C$

(3) D ______________

(4) $\sim A$ ______________

(5) $A \vee C$ ______________

(6) C ______________

(2) $(A \vee B) \supset C, (C \vee D) \supset (E \vee F), A . \sim E \quad \therefore\ F$

วิธีทำ (1) $(A \vee B) \supset C$

(2) $(C \vee D) \supset (E \vee F)$

(3) $A . \sim E \quad \therefore\ F$

(4) A ______________

(5) $A \vee B$ ______________

(6) C ______________

(7) $C \vee D$ ______________

(8) $E \vee F$ ______________

(9) $\sim E$ ______________

(10) F ______________

(3) $F \supset (G \supset \sim H), (F . \sim W) \supset (G \vee T), F. \sim T, W \supset T \quad \therefore \sim H$

วิธีทำ (1) $F \supset (G \supset \sim H)$

(2) $(F . \sim W) \supset (G \vee T)$

(3) $F . \sim T$

(4) $W \supset T \qquad \therefore \sim H$

(5) F ______________

(6) $G \supset \sim H$ ______________

(7) $\sim T$ ______________

(8) $\sim W$ ______________

(9) $F . \sim W$ ______________

(10) $G \vee T$ ______________

(11) G ______________

(12) $\sim H$ ______________

(4) $(F \vee G) \supset \sim A, A \vee W, F . T \quad \therefore W$

วิธีทำ (1) $(F \vee G) \supset \sim A$

(2) $A \vee W$

(3) $F . T \qquad \therefore W$

(4) F ______________

(5) $F \vee G$ ______________

(6) $\sim A$ ______________

(7) W ______________

(5) $(A . B) \supset \sim C, C \vee \sim D, A \supset B, E . A \quad \therefore \sim D$

วิธีทำ (1) $(A.B) \supset \sim C$

(2) $C \vee \sim D$

(3) $A \supset B$

(4) $E . A \qquad \therefore \sim D$

(5) A ______________

(6) B ______________

(7) $A.B$ ______________

(8) $\sim C$ ______________

(9) $\sim D$ ______________

(6) $P \supset [Q \supset (R \vee S)], P \cdot Q, S \supset T, \sim T \vee \sim W, \sim\sim W \quad \therefore R$

วิธีทำ (1) $P \supset [Q \supset (R \vee S)]$

(2) $P \cdot Q$

(3) $S \supset T$

(4) $\sim T \vee \sim W$

(5) $\sim\sim W \qquad \therefore R$

(6) P ______________

(7) $Q \supset (R \vee S)$ ______________

(8) Q ______________

(9) $R \vee S$ ______________

(10) $\sim T$ ______________

(11) $\sim S$ ______________

(12) R ______________

(7) $\sim A \supset \sim B, A \supset C, Z \supset W, \sim C \cdot \sim W \quad \therefore \sim B \vee W$

วิธีทำ (1) $\sim A \supset \sim B$

(2) $A \supset C$

(3) $Z \supset W$

(4) $\sim C \cdot \sim W \quad \therefore \sim B \vee W$

(5) $\sim C$ ______________

(6) $\sim A$ ______________

(7) $(\sim A \supset \sim B) \cdot (Z \supset W)$ ______________

(8) $\sim A \vee Z$ ______________

(9) $\sim B \vee W$ ______________

(8) $(A \vee B) \supset T, Z \supset (A \vee B), T \supset W, \sim W \quad \therefore \sim Z$

วิธีทำ (1) $(A \vee B) \supset T$

(2) $Z \supset (A \vee B)$

(3) $T \supset W$

(4) $\sim W \qquad \therefore \sim Z$

(5) $\sim T$ ______________

(6) $\sim (A \vee B)$ ______________

(7) $\sim Z$ ______________

(9) $(\sim A \vee \sim B) \supset \sim G$, $\sim A \supset (F \supset G)$, $(A \supset D) . \sim D$ $\therefore$ $\sim F$

วิธีทำ (1) $(\sim A \vee \sim B) \supset \sim G$

(2) $\sim A \supset (F \supset G)$

(3) $(A \supset D) . \sim D$ $\therefore$ $\sim F$

(4) $A \supset D$ ______________

(5) $\sim D$ ______________

(6) $\sim A$ ______________

(7) $F \supset G$ ______________

(8) $\sim A \vee \sim B$ ______________

(9) $\sim G$ ______________

(10) $\sim F$ ______________

(10) $(A \vee B) \supset (C \vee D)$, $C \supset E$, $A . \sim E$ $\therefore$ $D \vee W$

วิธีทำ (1) $(A \vee B) \supset (C \vee D)$

(2) $C \supset E$

(3) $A . \sim E$ $\therefore$ $D \vee W$

(4) A ______________

(5) $A \vee B$ ______________

(6) $C \vee D$ ______________

(7) $\sim E$ ______________

(8) $\sim C$ ______________

(9) D ______________

(10) $D \vee W$ ______________

จ. จงพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลต่อไปนี้ ด้วยวิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยกฎการอนุมานทั้ง 11 กฎ

1. $(A \supset S) . (B \supset F)$

   $A \vee B$

   $(S \supset B) . (F \supset W)$ $\therefore$ $B \vee W$

2. $(R \supset P) . (P \supset \sim L)$

   $T \supset L$

   $R \vee T$ $\therefore$ $P \vee L$

3. $(\sim K \cdot P) \supset (B \vee R)$

$\sim K \supset (B \supset D)$

$K \vee (R \supset E)$

$\sim K \cdot P \qquad \therefore \quad D \vee E$

4. $(A \supset B) \cdot (B \supset \sim C)$

$C \supset \sim D$

$B \supset E$

$\sim D \supset F$

$\sim E \vee \sim F \qquad \therefore \quad \sim A \vee \sim C$

5. $(R \supset P) \cdot (\sim P \supset H)$

$(M \supset D) \cdot (D \supset R)$

$(\sim M \vee \sim R) \supset (\sim P \vee \sim D)$

$\sim M \qquad \therefore \quad \sim R \vee \sim M$

6. $(\sim A \vee \sim B) \supset \sim G$

$\sim A \supset (F \supset G)$

$(A \supset D) \cdot \sim D \qquad \therefore \quad \sim F$

7. $N \supset O$

$(N \cdot O) \supset P$

$\sim (N \cdot P) \qquad \therefore \quad \sim N$

8. $(L \supset M) \supset (N \equiv O)$

$(P \supset \sim Q) \supset (M \equiv \sim Q)$

$\{[(P \supset \sim Q) \vee (R \equiv S)] \cdot (N \vee O)\} \supset [(R \equiv S) \supset (L \supset M)]$

$(P \supset \sim Q) \vee (R \equiv S)$

$N \vee O \qquad \therefore \quad (M \equiv \sim Q) \vee (N \equiv O)$

9. $(W \cdot X) \supset (Y \cdot Z)$

$\sim [(W \cdot X) \cdot (Y \cdot Z)] \qquad \therefore \quad \sim (W \cdot X)$

10. $I \supset O$

$\sim I \supset O \qquad \therefore \quad O$

11. $(K \cdot L) \supset M$

$K \supset L \qquad \therefore \quad K \supset [(K \cdot L) \cdot M]$

12. $(Z \cdot A) \supset B$

$B \supset A$

$(B \cdot A) \supset (A \cdot B)$ $\quad\therefore\ (Z \cdot A) \supset (A \cdot B)$

13. $\sim D \supset F$

$G \supset F$

$D \supset G$ $\quad\therefore\ F$

14. $(G \vee F) \supset (H \supset K)$

$(\sim H \supset K) \cdot (H \supset G)$

$K \supset F$

$H \vee K$ $\quad\therefore\ K$

15. $(\sim O \supset R) \vee S$

$(O \supset R) \cdot (S \supset O)$

$\sim S \cdot (O \vee S)$ $\quad\therefore\ R$

16. (1) $[(S \vee D) \supset \sim W] \cdot [(\sim W \vee \sim E) \supset R]$

(2) $R \supset (\sim X \cdot \sim N)$

(3) S $\quad\therefore\ \sim N$

17. (1) $(J \supset R) \cdot (\sim J \supset E)$

(2) $R \supset I$

(3) $[(J \supset R) \cdot (R \supset I)] \supset [(J \cdot I) \vee (\sim J \cdot \sim I)]$

(4) $(J \cdot I) \supset T$

(5) $(\sim J \cdot \sim I) \supset D$ $\quad\therefore\ T \vee D$

18. (1) $(A \supset B) \supset (C \supset D)$

(2) $(F \supset A) \supset (A \supset B)$

(3) $(A \cdot C) \cdot [A \supset (F \supset A)]$ $\quad\therefore\ D \vee F$

19. (1) $(X \vee Y) \supset (Y \vee Z)$

(2) $(Y \supset \sim Y) \cdot X$ $\quad\therefore\ Y \vee Z$

20. (1) $A \supset B$

(2) $C \supset D$

(3) $A \vee C$ $\quad\therefore\ (A \cdot B) \vee (C \cdot D)$

21. (1) $(K \cdot L) \supset M$

(2) $K \supset L$ $\quad\therefore\ K \supset [(K \cdot L) \cdot M]$

22. (1) $Q \supset (R \vee S)$

(2) $(T \,.\, U) \supset R$

(3) $(R \vee S) \supset (T \,.\, U)$ $\quad \therefore\ Q \supset R$

23. (1) $(W \,.\, X) \supset (Y \,.\, Z)$

(2) $\sim[(W \,.\, X) \,.\, (Y \,.\, Z)]$ $\quad \therefore\ \sim(W \,.\, X)$

24. (1) $I \supset J$

(2) $I \vee (\sim\sim K \,.\, \sim\sim J)$

(3) $L \supset \sim K$

(4) $\sim(I \,.\, J)$ $\quad \therefore\ \sim L \vee \sim K$

25. (1) $(A \,.\, D) \,.\, [(A \vee B) \supset C]$

(2) $(C \vee B) \supset [A \supset (D \equiv E)]$ $\quad \therefore\ D \equiv E$

แผนการจัดการเรียนรู้บทที่ 9

เรื่อง วิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยกฎการแทนที่ **เวลา 6 ชั่วโมง**

****

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นิสิตมีความเข้าใจหลักการและขั้นตอนการพิสูจน์ข้ออ้างเหตุผลแบบนิรนัยด้วยกฎการแทนที่และสามารถพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลด้วยการใช้กฎการแทนที่ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกหลักการและขั้นตอนวิธีพิสูจน์แบบนิรนัยได้
2. พิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลด้วยการใช้กฎการแทนที่ได้

2. แนวคิดหลัก (สาระสำคัญ)

กฎการแทนที่หรือกฎสมภาค (Rules of Equivalence) คือ กฎที่ว่าด้วยความมีค่าหรือมีความหมายเท่ากันของข้อความ 2 ข้อความ เราจึงอาจนำข้อความอันหนึ่งมาแทนข้อความอีกอันหนึ่งได้อย่างสมเหตุสมผล

3. เนื้อหาสาระ

1. ความหมายของวิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยกฎการแทนที่
2. กฎการแทนที่
3. ข้อแตกต่างระหว่างกฎการอนุมานและกฎการแทนที่
4. ตัวอย่างวิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยกฎการแทนที่

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. อาจารย์แจ้งจุดประสงค์ให้นิสิตทราบ
2. อาจารย์แนะนำวิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยกฎการแทนที่
3. นิสิตแบ่งกลุ่มเป็น 4 กลุ่ม โดยให้แต่ละกลุ่มร่วมกันพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลที่อาจารย์กำหนดให้ด้วยการใช้กฎการแทนที่และกฎการอนุมาน
4. นิสิตแต่ละกลุ่มแลกเปลี่ยนกันตรวจคำตอบ หากข้อใดผิด ให้แจ้งกลุ่มที่ทำโจทย์เพื่อแก้ไขความถูกต้อง
5. นิสิตทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติมจากเอกสารประกอบการสอนบทที่ 9
6. อาจารย์และนิสิตร่วมกันเฉลยแบบฝึกหัด
7. นิสิตสรุปจดบันทึกลงในสมุดของนิสิต

5. แหล่งการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอนวิชา ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์บทที่ 9
2. แบบฝึกหัดบทที่ 9
3. Power-point

6. กระบวนการวัดผลและประเมินผล

1. การร่วมกันสรุป, อภิปรายและตอบคำถาม
2. การตอบคำถามในแบบฝึกหัด
3. การสรุปจดบันทึกของนิสิต
4. เอกสารแบบฝึกหัด
5. ตรวจผลงานการตอบโจทย์ของแต่ละกลุ่ม

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

(...)

อาจารย์สอน

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

....

....

บทที่ 9

วิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยกฎการแทนที่

(The Method of Deduction by Rules of Equivalence)

9.1 ความหมายของวิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยกฎการแทนที่

กฎการแทนที่หรือกฎสมภาค (Rules of Equivalence) คือ กฎที่ว่าด้วยความมีค่าหรือมีความหมายเท่ากันของข้อความ 2 ข้อความ เราจึงอาจนำข้อความอันหนึ่งมาแทนข้อความอีกอันหนึ่งได้อย่างสมเหตุสมผล เช่น กฎการปฏิเสธซ้อน (Double Negation) $p \equiv \sim\sim p$ การปฏิเสธพร้อมกันสองครั้งย่อมมีค่าเท่ากับยืนยัน มันจึงสามารถใช้แทนกันได้ โดยที่ค่าหรือความหมายยังคงเดิมไม่เปลี่ยนแปลง

9.2 กฎการแทนที่ (Rules of Replacement)

ในวิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยกฎการแทนที่นี้ เราสามารถใช้กฎการแทนที่มาช่วยในการพิสูจน์ความสมเหตุสมผลได้ กฎการแทนที่มีทั้งหมด 10 กฎ ดังนี้ (นับต่อจากกฎการอนุมาน)

(12) กฎการปฏิเสธหน้าวงเล็บ (De Morgan : De M.)

$$\sim(p \;.\; q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$$

$$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \;.\; \sim q)$$

(13) กฎการเปลี่ยนที่ (Commutation : Com.)

$$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$$

$$(p \;.\; q) \equiv (q \;.\; p)$$

(14) กฎการเปลี่ยนกลุ่ม (Association : Assoc.)

$$[p \;.\; (q \;.\; r)] \equiv [(p \;.\; q) \;.\; r]$$

$$[p \vee (q \vee r) \equiv [(p \vee q) \vee r]$$

(15) กฎการกระจาย (Distribution : Dist.)

$$[p \;.\; (q \vee r)] \equiv [(p \;.\; q) \vee (p \;.\; r)]$$

$$[p \vee (q \;.\; r) \equiv [(p \vee q) \;.\; (p \vee r)]$$

(16) กฎการปฏิเสธซ้อน (Dounble Negation : D.N.)

$$p \equiv \sim\sim p$$

(17) กฎการกลับเงื่อนไข (Transposition : Trans.)

$$(p \supset q) \equiv (\sim q \supset \sim p)$$

(18) กฎการเปลี่ยนเงื่อนไขเป็นเลือก (Material Implication : M.I.)

$$(p \supset q) \equiv (\sim p \lor q)$$

(19) กฎการกระจายสมภาค (Material Equivalence : M.E.)

$$(p \equiv q) \equiv [(p \supset q) . (q \supset p)]$$

$$(p \equiv q) \equiv [(p . q) \lor (\sim p . \sim q)]$$

(20) กฎการเปลี่ยนรวมเป็นเงื่อนไข (Exportation : Exp.)

$$[(p . q) \supset r] \equiv [p \supset (q \supset r)]$$

(21) กฎสัจนิรันดร์ (Tautology : Taut.)

$$p \equiv (p \lor p)$$

$$p \equiv (p . p)$$

9.3 ข้อแตกต่างระหว่างกฎการอนุมานและกฎการแทนที่

กฎการอนุมานนั้นเราจำเป็นต้องนำมาใช้กับข้อพิสูจน์ทั้งแถว เช่น เราสามารถอนุมานเอา A จาก A . B ด้วยกฎการย่อ (Simp) ได้ต่อเมื่อแถวนั้นมีเฉพาะ A . B ถ้ามีตัวอื่นอยู่ด้วยในแถวนั้น เราจะอนุมานเอา A มาไม่ได้ เช่น ถ้าแถวนั้นเป็น (A . B) $\supset$ C เราจะใช้กฎการย่อ (Simp.) กับ A . B เพียงครึ่งเดียวของแถวนี้ไม่ได้

ส่วนกฎการแทนที่ใช้กับทั้งแถวก็ได้ ใช้กับบางส่วนของแถวก็ได้ เช่น เราสามารถได้ $[A \supset (B \supset C)] \lor D$ เป็น $[A \supset (B \supset C)] \lor D$ ด้วยกฎเดียวกัน

9.4 ตัวอย่างวิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยกฎการแทนที่

ต่อไปนี้คือตัวอย่างวิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยกฎการแทนที่

ตัวอย่างที่ 1 $R \lor (U . W) \quad \therefore \quad R \lor W$

1.	$R \lor (U . W)$	$\therefore$	$R \lor W$
2.	$R \lor (W . U)$	1	Com.
3.	$(R \lor W) . (R \lor U)$	2	Dist.
4.	$R \lor W$	3	Simp.

ตัวอย่างที่ 2 $(Y \supset Z) . (Z \supset Y) \quad \therefore \quad (Y . Z) \lor (\sim Y . \sim Z)$

1.	$(Y \supset Z) . (Z \supset Y)$	$\therefore$	$(Y . Z) \lor (\sim Y . \sim Z)$
2.	$Y \equiv Z$	1	M.E.
3.	$(Y . Z) \lor (\sim Y . \sim Z)$	2	M.E.

ตัวอย่างที่ 3 $\sim A, \sim B \therefore A \equiv B$

1.	$\sim A$		
2.	$\sim B$	$\therefore A \equiv B$	
3.	$\sim A \,.\, \sim B$	1, 2	Conj.
4.	$(\sim A \,.\, \sim B) \vee (A \,.\, B)$	3	Add.
5.	$(A \,.\, B) \vee (\sim A \,.\, \sim B)$	4	Comm.
6.	$A \equiv B$	5	M.E.

ตัวอย่างที่ 4

1.	$R \vee (S \,.\, T)$		
2.	$(R \vee S) \supset (U \vee T)$	$\therefore T \supset U$	
3.	$(R \vee S) \,.\, (R \vee T)$	1	Dist.
4.	$R \vee S$	3	Simp.
5.	$U \vee T$	2, 4	M.P.
6.	$T \vee U$	5	Com.
7.	$T \supset U$	6	M.I.

แบบฝึกหัดบทที่ 9

ก. จงหาคำตอบที่ถูกต้องว่าข้อสรุปของโจทย์แต่ละข้อต่อไปนี้ได้มาจากการใช้กฎการแทนที่อะไร

1.	(1) $\sim\sim A \supset \sim\sim B$	$\therefore$	$\sim B \supset \sim A$
	(2) $\sim B \supset \sim A$	1	Transposition
2.	(1) $[A . (B . C)] \supset \sim D$	$\therefore$	$A \supset [(B . C) \supset \sim D]$
	(2) $A \supset [(B . C) \supset \sim D]$	1	Exportation
3.	(1) $\sim\sim A \supset \sim\sim B$	$\therefore$	$\sim\sim A \supset B$
	(2) $\sim\sim A \supset B$	1	D.N.
4.	(1) $\sim A \supset \sim\sim B$	$\therefore$	$\sim\sim A \vee \sim\sim B$
	(2) $\sim\sim A \vee \sim\sim B$	1	M.I.
5.	(1) $[A . (B . C)] \supset \sim D$	$\therefore$	$[(A . B) . C] \supset \sim D$
	(2) $[(A . B) . C] \supset \sim D$	__________	
6.	(1) $\sim\sim A \vee \sim\sim B$	$\therefore$	$\sim(\sim A . \sim B)$
	(2) $\sim(\sim A . \sim B)$		__________
7.	(1) $\sim(B . A) \vee (\sim B . \sim C)$	$\therefore$	$[\sim(B . A) \vee \sim B] . [\sim(B . A) \vee \sim C]$
	(2) $[\sim(B . A) \vee \sim B] . [\sim(B . A) \vee \sim C]$		__________
8.	(1) $(\sim A . \sim B) \supset (\sim\sim C . \sim D)$	$\therefore$	$(\sim A . \sim B) \supset \sim(\sim C \vee D)$
	(2) $(\sim A . \sim B) \supset \sim(\sim C \vee D)$	__________	
9.	(1) $(\sim A . \sim B) \supset (\sim\sim C . \sim\sim C)$	$\therefore$	$(\sim A . \sim B) \supset \sim\sim C$
	(2) $(\sim A . \sim B) \supset \sim\sim C$		__________
10.	(1) $\sim(C . \sim C) \vee \sim(A . \sim B)$	$\therefore$	$(C . \sim C) \supset \sim(A . \sim B)$
	(2) $(C . \sim C) \supset \sim(A . \sim B)$	__________	
11.	(1) $[\sim A \vee \sim(B . C)] \vee (\sim A . C)$	$\therefore$	$\sim A \vee [\sim(B . C) \vee C]$
	(2) $\sim A \vee [\sim(B . C) \vee \sim A] . \{\sim A \vee [\sim(B . C) \vee C]\}$		__________
(3)	$\sim A \vee [\sim(B . C) \vee C]$	__________	
12.	(1) $\sim A \vee \sim\sim(B . C)$	$\therefore$	$\sim A \vee \sim(\sim B \vee \sim C)$
	(2) $\sim A \vee \sim(\sim B \vee \sim C)$	__________	
13.	(1) $\sim(A \supset \sim B) \supset \sim(\sim B \supset \sim A)$	$\therefore$	$\sim(A \supset \sim B) \supset \sim(A \supset B)$
	(2) $\sim(A \supset \sim B) \supset \sim(A \supset B)$		__________

14. (1) $\sim(A \supset \sim B) \supset (\sim\sim B \supset \sim A)$ $\quad \therefore \sim(A \supset \sim B) \supset (B \supset \sim A)$

(2) $\sim(A \supset \sim B) \supset (B \supset \sim A)$ ________

15. (1) $[\sim(A \vee B) \,.\, \sim(A \vee B)] \vee \sim A$ $\quad \therefore \sim(A \vee B) \vee \sim A$

(2) $\sim(A \vee B) \vee \sim A$ ________

16. (1) $(\sim B \,.\, \sim C) \supset [\sim(C \,.\, D) \supset \sim A]$ $\quad \therefore (\sim B \,.\, \sim C) \supset [\sim\sim(C \,.\, D) \vee \sim A]$

(2) $(\sim B \,.\, \sim C) \supset [\sim\sim(C \,.\, D) \vee \sim A]$ ________

17. (1) $(A \,.\, B) \equiv [(B \,.\, C) \supset (B \equiv C)]$ $\quad \therefore (A \,.\, B) \equiv [(C \,.\, B) \supset (B \equiv C)]$

(2) $(A \,.\, B) \equiv [(C \,.\, B) \supset (B \equiv C)]$ ________

18. (1) $\sim\sim(A \vee B) \vee [\sim A \vee \sim(B \,.\, C)]$ $\quad \therefore \sim\sim(A \vee B) \vee \sim[A \,.(B \,.\, C)]$

(2) $\sim\sim(A \vee B) \vee \sim[A \,.(B \,.\, C)]$ ________

19. (1) $(A \equiv B) \supset \{[(C \equiv D) \supset (D \equiv C)] \,.\, [(D \equiv C) \supset (C \equiv D)]\}$

$\therefore (A \equiv B) \supset [(C \equiv D) \supset (D \equiv C)]$

(2) $(A \equiv B) \supset [(C \equiv D) \supset (D \equiv C)]$ ________

20. (1) $[(\sim A \vee \sim A) \vee (\sim B \vee \sim C)] \supset \sim(A \vee B)$

$\therefore \{[(\sim A \vee \sim A) \vee (\sim B] \vee \sim C\} \supset \sim(A \vee B)$

(2) $\{[(\sim A \vee \sim A) \vee (\sim B] \vee \sim C\} \supset \sim(A \vee B)$ ________

21. (1) $\{[(A \equiv B) \supset C] \,.\, [(C \equiv B) \supset A]\} \supset (A \equiv C)$

$\therefore [(A \equiv B) \supset C] \supset \{[(C \equiv B) \supset A] \supset (A \equiv C)\}$

(2) $[(A \equiv B) \supset C] \supset \{[(C \equiv B) \supset A] \supset (A \equiv C)\}$ ________

22. (1) $(\sim B \vee \sim C) \supset \{\sim C \vee [(\sim C \vee \sim B) \vee (\sim C \vee \sim B)]\}$

$\therefore (\sim B \vee \sim C) \supset [\sim C \vee (\sim C \vee \sim B)]$

(2) $(\sim B \vee \sim C) \supset [\sim C \vee (\sim C \vee \sim B)]$ ________

23. (1) $\sim A \supset [\sim(B \vee \sim C) \supset \sim(\sim C \vee B)]$

$\therefore \sim A \supset [(\sim C \vee \sim B) \supset \sim(\sim B \vee C)]$

(2) $\sim A \supset [(\sim C \vee \sim B) \supset \sim(\sim B \vee C)]$ ________

24. (1) $\sim(B \vee \sim C) \,.\, [(\sim A \supset C) \vee (\sim A \supset B)]$

$\therefore [\sim(B \vee \sim C) \,.\, (\sim A \supset C)] \vee [\sim(B \vee \sim C) \,.\, (\sim A \supset B)]$

(2) $[\sim(B \vee \sim C) \,.\, (\sim A \supset C)] \vee [\sim(B \vee \sim C) \,.\, (\sim A \supset B)]$ ________

25. (1) $[\sim(B \vee \sim C) \,.\, (\sim A \supset C)] \vee \sim(A \supset C)$

$\therefore [\sim(B \vee \sim C) \,.\, (\sim A \supset C)] \vee \sim(\sim A \vee C)$

(2) $[\sim(B \vee \sim C) \,.\, (\sim A \supset C)] \vee \sim(\sim A \vee C)$ ________

26. (1) $(A \supset B) . (C \supset D)$

$\therefore (A \supset B) . (\sim C \supset \sim D)$

(2) $(A \supset B) . (\sim C \supset \sim D)$ __________

27. (1) $(E \supset F) . (G \supset \sim H)$ $\therefore (\sim E \supset F) . (G \supset \sim H)$

(2) $(\sim E \supset F) . (G \supset \sim H)$ __________

28. (1) $[I \supset (J \supset K)] . (J \supset \sim I)$ $\therefore [(R . J) \supset K] . (J \supset \sim I)$

(2) $[(R . J) \supset K] . (J \supset \sim I)$ __________

29. (1) $[L \supset (M \vee N)] \vee [L \supset (M \vee N)]$ $\therefore L \supset (M \vee N)$

(2) $L \supset (M \vee N)$ __________

30. (1) $O \supset [(P \supset Q) . (Q \supset P)]$ $\therefore O \supset (P \equiv Q)$

(2) $O \supset (P \equiv Q)$ __________

ข. จากโจทย์ที่ให้มาต่อไปนี้ จงบอกว่าใช้กฎการแทนที่อะไรจึงทำให้เราได้ข้อสรุปออกมา

1. $\sim \sim A \supset \sim \sim B$ $\therefore \sim B \supset \sim A$ ตอบ __________
2. $[A \cdot (B \cdot C)] \supset \sim D$ $\therefore A \supset [(B \cdot C) \supset \sim D]$ ตอบ __________
3. $\sim \sim A \supset \sim \sim B$ $\therefore \sim\sim A \supset B$ ตอบ __________
4. $\sim A \supset \sim \sim B$ $\therefore \sim \sim A \vee \sim \sim B$ ตอบ __________
5. $[A \cdot (B \cdot C)] \supset \sim D$ $\therefore [(A \cdot B) \cdot C] \supset \sim D$ ตอบ __________
6. $\sim \sim A \vee \sim \sim B$ $\therefore \sim(\sim A \cdot \sim B)$ ตอบ __________
7. $\sim (B \cdot A) \vee (\sim B \cdot \sim C)$ $\therefore [\sim (B \cdot A) \vee \sim B] \cdot [\sim (B \cdot A) \vee \sim C]$

ตอบ __________

8. $(\sim A \cdot \sim B) \supset (\sim\sim C \cdot \sim D)$ $\therefore (\sim A \cdot \sim B) \supset \sim(\sim C \vee D)$ ตอบ __________
9. $(\sim A \cdot \sim B) \supset (\sim\sim C \vee \sim\sim C)$ $\therefore (\sim A \cdot \sim B) \supset \sim\sim C$ ตอบ __________
10. $\sim (C \cdot \sim C) \vee \sim(A \cdot \sim B)$ $\therefore (C \cdot \sim C) \supset \sim(A \cdot \sim B)$ ตอบ __________

ค. จงพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลต่อไปนี้ ด้วยวิธีพิสูจน์แบบนิรนัยด้วยกฎการอนุมานและกฎการแทนที่

1. (1) $\sim B$ $\therefore \sim (A . B)$

วิธีทำ

(1)	$\sim B$	$\therefore \sim (A . B)$	
(2)	$\sim B \vee \sim A$	1	Add.
(3)	$\sim (A . B)$	2	DeM.

2. (1) $\sim A$

(2) $\sim B$ $\therefore A \equiv B$

วิธีทำ (1) $\sim A$

(2) $\sim B$ $\therefore A \equiv B$

(3) $\sim A . \sim B$ 1, 2 Conj.

(4) $(\sim A . \sim B) \vee (A . B)$ 3 Add.

(5) $(A . B) \vee (\sim A . \sim B)$ 4 Com.

(6) $A \equiv B$ 5 M.E.

3. (1) $\sim A \supset \sim B$

(2) B $\therefore A$

วิธีทำ (1) $\sim A \supset \sim B$

(2) B $\therefore A$

(3) $B \supset A$ 1 Trans.

(4) A 3, 2 M.P.

4. (1) $A \supset B$

(2) $A \supset C$ $\therefore A \supset (B . C)$

5. (1) $A \supset B$

(2) $C \supset B$ $\therefore (A \vee C) \supset B$

6. (1) $(A \vee B) \supset C$ $\therefore A \supset C$

7. (1) $(A \supset B) \vee (A \supset C)$ $\therefore A \supset (B \vee C)$

8. (1) $A \supset B$

(2) $C \supset \sim B$ $\therefore A \supset \sim C$

9. (1) $(D . E) \supset \sim F$

(2) $F \vee (G . H)$

(3) $D \equiv E$ $\therefore D \supset G$

10. (1) $(N . O) \supset P$

(2) $(\sim P \supset \sim O) \supset Q$ $\therefore N \supset Q$

11. (1) $N \supset O$ $\therefore (N . P) \supset O$

12. (1) $(Q \vee R) \supset S$ $\therefore Q \supset S$

13. (1) $(A \vee B) \supset \sim (C \vee D)$

(2) $(A . E) \vee \sim F$

(3) F $\therefore \sim C$

14. (1) $\sim(C \vee D)$

(2) $D \equiv (E \vee F)$

(3) $\sim A \supset (E \vee F)$ $\therefore$ A

15. (1) $S \vee P$

(2) $P \supset (G . R)$

(3) $\sim G$

(4) $P \equiv T$ $\therefore$ $S . \sim T$

16. (1) $(A \equiv B) \supset C$

(2) $\sim(C \vee A)$ $\therefore$ B

17. (1) $B \supset (C \supset E)$

(2) $E \supset \sim(J \vee H)$

(3) $\sim S$

(4) $J \vee S$ $\therefore$ $B \supset \sim C$

18. (1) $\sim D \supset (\sim E \supset \sim F)$

(2) $\sim(F . \sim D) \supset \sim G$ $\therefore$ $G \supset E$

19. (1) $T \supset (U . V)$

(2) $(U \vee V) \supset W$ $\therefore$ $T \supset W$

20. (1) $Z \supset A$

(2) $Z \vee A$ $\therefore$ A

21. (1) $A \supset C$ $\therefore$ $(A . B) \supset C$

22. (1) $[K \vee (I \vee J)] \supset (K \supset J)$

(2) $L \supset [I \vee (J \vee K)]$ $\therefore$ $(L . K) \supset J$

23. (1) $T \supset (U . V)$

(2) $(U \vee V) \supset W$ $\therefore$ $T \supset W$

24. (1) $J \vee (\sim J . K)$

(2) $J \supset L$ $\therefore$ $(L . J) \equiv J$

25. (1) $[H \vee (I \vee J)] \supset (K \supset J)$

(2) $L \supset [I \vee (J \vee H)]$ $\therefore$ $(L . K) \supset J$

26. (1) $\sim F \vee \sim[\sim(G . H) . (G \vee H)]$

(2) $(G \supset H) \supset [(H \supset G) \supset I]$ $\therefore$ $F \supset (F . I)$

27. (1) $(\sim A \vee B) . (A \supset C)$

(2) $B \supset (C \supset E)$ $\therefore$ $A \supset E$

28. (1) $(P \cdot Q) \vee (R \cdot S)$

(2) $P \supset {\sim}P$ $\quad\therefore\ S \vee (A \equiv B)$

29. (1) $(R \supset W) \cdot (P \supset M)$

(2) $R \vee P$

(3) $(R \supset {\sim}M) \cdot (P \supset {\sim}W)$ $\quad\therefore\ M \equiv {\sim}W$

30. (1) $(D \supset {\sim}P) \cdot (P \supset Q)$

(2) $Q \supset D$

(3) ${\sim}R \supset P$ $\quad\therefore\ R$

แผนการจัดการเรียนรู้บทที่ 10

เรื่อง วิธีพิสูจน์ด้วยการทำให้ขัดแย้งกัน **เวลา 3 ชั่วโมง**

****

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นิสิตมีความเข้าใจหลักการและขั้นตอนการพิสูจน์ด้วยการทำให้ขัดแย้งกัน และสามารถพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลและพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์ด้วยวิธีทำให้ขัดแย้งกันได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกความหมายและขั้นตอนวิธีพิสูจน์ด้วยการทำให้ขัดแย้งกันได้
2. พิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลและพิสูจน์ประพจน์ด้วยวิธีทำให้ขัดแย้งกันได้

2. แนวคิดหลัก (สาระสำคัญ)

วิธีพิสูจน์ด้วยการทำให้ขัดแย้งกัน คือ การพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลหรือการพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์ทางอ้อม โดยเริ่มจากการสมมติให้ข้อสรุปของข้ออ้างเหตุผลหรือประพจน์ที่ให้มานั้นเป็นเท็จ

3. เนื้อหาสาระ

1. ความหมายของวิธีพิสูจน์ด้วยการทำให้ขัดแย้งกัน
2. ตัวอย่างวิธีพิสูจน์ด้วยการทำให้ขัดแย้งกัน

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. อาจารย์แจ้งจุดประสงค์ให้นิสิตทราบ
2. อาจารย์แนะนำวิธีพิสูจน์ด้วยการทำให้ขัดแย้งกัน
3. นิสิตแบ่งกลุ่มเป็น 4 กลุ่ม โดยให้แต่ละกลุ่มร่วมกันพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลที่อาจารย์กำหนดให้ด้วยวิธีพิสูจน์ด้วยการทำให้ขัดแย้งกัน
4. นิสิตแต่ละกลุ่มแลกเปลี่ยนกันตรวจคำตอบ หากข้อใดผิด ให้แจ้งกลุ่มที่ทำโจทย์เพื่อแก้ไขความถูกต้อง
5. นิสิตทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติมจากเอกสารประกอบการสอนบทที่ 10
6. อาจารย์และนิสิตร่วมกันเฉลยแบบฝึกหัด
7. นิสิตสรุปจดบันทึกลงในสมุดของนิสิต

5. แหล่งการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอนวิชา ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์บทที่ 10
2. แบบฝึกหัดบทที่ 10

3. Power-point

6. กระบวนการวัดผลและประเมินผล

1. การร่วมกันสรุป, อภิปรายและตอบคำถาม
2. การตอบคำถามในแบบฝึกหัด
3. การสรุปจดบันทึกของนิสิต
4. เอกสารแบบฝึกหัด
5. ตรวจผลงานการตอบโจทย์ของแต่ละกลุ่ม

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

(...)

อาจารย์สอน

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

....

....

บทที่ 10

วิธีพิสูจน์ด้วยการทำให้ขัดแย้งกัน

(Reductio Ad Absurdum Method)

10.1 ความหมายของวิธีพิสูจน์ด้วยการทำให้ขัดแย้งกัน

วิธีพิสูจน์ด้วยการทำให้ขัดแย้งกัน (Reductio Ad Absurdum Method: R.A.A) คือ การพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลหรือการพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์ทางอ้อม การพิสูจน์ชนิดนี้จะเริ่มต้นด้วยการสมมติให้ข้อสรุปของข้ออ้างเหตุผลหรือของประพจน์ที่ให้มานั้นเป็นเท็จ และถือว่า ข้อสมมตินั้นเป็นข้ออ้างเพิ่มอีกบทหนึ่งในกระบวนการการพิสูจน์ ถ้าเราพิสูจน์ไปตามลำดับโดยการใช้กฎของการอนุมานทั้ง 11 กฎ และกฎของการแทนที่อีก 10 กฎแล้ว พบว่ามีความขัดแย้งกันเกิดขึ้น เช่น เราได้ A และ ~A นั่นแสดงให้เห็นว่า สิ่งที่เราสมมตินั้นจะต้องเป็นเท็จ แต่สิ่งที่เราต้องการจะพิสูจน์นั้นจะต้องเป็นจริง

วิธีพิสูจน์ด้วยการทำให้ขัดแย้งกันมีขั้นตอนการพิสูจน์ดังนี้

1. สมมติให้ข้อสรุปของข้ออ้างเหตุผลที่ให้มาเป็นเท็จเสมอ เช่น ถ้าข้อสรุป คือ A ก็สมมติให้เป็นเท็จ คือ ~A

2. นับข้อสมมติของข้อสรุปที่เป็นเท็จนั้นเป็นข้ออ้างอีกบทหนึ่ง พร้อมกับเขียนกำกับทางขวามือว่า R.A ซึ่งย่อมาจากคำว่า Reductio Assumption หมายถึง การสมมติให้ข้อสรุปเป็นเท็จ

3. ใช้กฎของการอนุมานทั้ง 11 กฎ และกฎของการแทนที่ทั้ง 10 กฎมาช่วยในการพิสูจน์จนกระทั่งได้ตัวแปรที่ขัดแย้งกัน เช่น มี A และมี ~A ปรากฏในลำดับของการพิสูจน์ เสร็จแล้วนำ A และ ~A มาเชื่อมกันด้วยตัวเชื่อรวม (.)

4. ต่อไปให้เขียนข้อสรุปเดิมลงอีกครั้งหนึ่ง พร้อมกับเขียนกำกับทางขวามือลงไปว่า R.P. ซึ่งย่อมาจากคำว่า Reductio Proof หมายถึงการพิสูจน์แบบนี้เกิดความขัดแย้งกันแล้วในขั้นตอนสุดท้ายของการพิสูจน์ เราจะได้ข้อสรุปเดิมหลังจากมาถึงความขัดแย้งกันในระหว่าง เมื่อเป็นเช่นนี้ เราก็จะรู้ได้ทันทีว่าข้ออ้างเหตุผลที่ให้มานั้นสมเหตุสมผลอย่างแน่นอน

10.2 ตัวอย่างวิธีพิสูจน์ด้วยการทำให้ขัดแย้งกัน

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างวิธีพิสูจน์ด้วยการทำให้ขัดแย้งกัน

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ข้ออ้างเหตุผลต่อไปนี้ด้วยการทำให้ขัดแย้งกัน (R.A.A)

1. $A \supset B$
2. $A \quad \therefore B$

วิธีทำที่ 1

1.	$A \supset B$		
2.	$A \quad \therefore B$		
3.	$\sim B$		R.A.
4.	$\sim A$	1, 3	M.T.
5.	$A . \sim A$	2, 4	Conj.
6.	B		R.P.

นอกจากนี้แล้ว เรายังสามารถใช้กฎของการเพิ่ม (Rule of Addition) คือ $p \therefore p \vee q$ ให้กับตัวแปรที่เกิดความขัดแย้งกันในการพิสูจน์ ดังนั้น จากตัวอย่างข้างบนนั้นก็คือ A นั่นเอง ตัวแปรที่เราจำต้องเพิ่มให้กับ A ก็คือ ตัวแปรที่เป็นข้อสรุปนั่นเอง เพราะฉะนั้น จากตัวอย่างข้างบนเราก็จะได้ A v B ในขั้นที่ 6 หลังจากนั้นก็ใช้กฎตรรกบทเลือก (Disjunctive Syllogism) คือ

$$p \vee q$$
$$\sim p$$
$$\therefore q$$

ซึ่งจะทำให้เราได้ผลลัพธ์เป็นข้อสรุปนั้นทันที ดูวิธีทำโดยละเอียดข้างล่างอีกครั้ง

วิธีทำที่ 2

1.	$A \supset B$		
2.	$A \quad \therefore B$		
3.	$\sim B$	R.A.	
4.	$\sim A$	1, 3	M.T.
5.	$A . \sim A$	2, 4	Conj.
6.	$A \vee B$	2	Add.
7.	B	6, 4	D.S.

อีกประการหนึ่ง เราอาจจะได้ข้อสรุปเดิม หลังจากการพิสูจน์ดำเนินมาถึงความขัดแย้งกัน เช่น A และ ~A ด้วยการถือว่าการปฏิเสธข้อสรุปเป็นการสมมติเงื่อนไข (Conditional Assumption) เช่นตัวอย่างวิธีที่ 3 ต่อไปนี้

วิธีทำที่ 3

1. $A \supset B$
2. $A \quad \therefore B$

3. ~B	R.A.	
4. ~A	1, 3	M.T.
5. A v B	2	Add.
6. B	5, 4	D.S.
7. $\sim B \supset B$	3 – 6	C.P.
8. ~~B v B	7	M.I.
9. B v B	8	D.N.
10. B	9	Taut.

ตัวอย่างที่ 2 ~ (D . E), D ∴ ~E

วิธีทำ

(1) ~ (D . E)		
(2) D	∴ ~E	
(3) ~~E		R.A.
(4) ~ D v ~E	1	DeM.
(5) ~ D	4, 3	D.S.
(6) D . ~ D	2, 5	Conj.
(7) ~E		R.P.

ตัวอย่างที่ 3 $\sim S \supset B$, $B \supset C$, ~C ∴ S

วิธีทำ

(1) $\sim S \supset B$		
(2) $B \supset C$		
(3) ~C		∴ S
(4) ~S	R.A.	
(5) $\sim S \supset C$	1, 2	H.S.
(6) C	5, 4	M.P.
(7) C . ~C	6, 3	Conj.
(8) S		R.P.

ตัวอย่างที่ 4 $(G \supset \sim H) \supset I, \ \sim (G \,.\, H) \ \therefore\ R \vee \sim H$

วิธีทำ

(1) $(G \supset \sim H) \supset I$		
(2) $\sim (G \,.\, H)$	$\therefore\ I \vee \sim H$	
(3) $\sim (I \vee \sim H)$	R.A.	
(4) $\sim I \,.\, \sim H$	3	DeM.
(5) $\sim I$	4	Simp.
(6) $\sim (G \supset \sim H)$	1, 5	M.T.
(7) $\sim (\sim G \vee \sim H)$	6	M.I.
(8) $\sim\sim (G \,.\, H)$	7	DeM.
(9) $(G \,.\, H)$	8	D.N.
(10) $(G \,.\, H) \,.\, \sim (G \,.\, H)$	9, 2	Conj.
(11) $I \vee \sim H$		R.P.

ตัวอย่างที่ 5 $R \vee (S \,.\, \sim T),\ (R \vee S) \supset (U \vee \sim T) \ \therefore\ T \supset U$

วิธีทำ

(1) $R \vee (S \,.\, \sim T)$		
(2) $(R \vee S) \supset (U \vee \sim T)$	$\therefore\ T \supset U$	
(3) $\sim (T \supset U)$		R.A.
(4) $\sim (\sim T \vee U)$	3	M.I.
(5) $\sim\sim T \,.\, \sim U$	4	DeM.
(6) $(R \vee S) \,.\, (R \vee \sim T)$	1	Dist.
(7) $(R \vee S)$	6	Simp.
(8) $(U \vee \sim T)$	2, 7	M.P.
(9) $\sim U$	5	Com. + Simp.
(10) $\sim T$	8, 9	D.S.
(11) $\sim\sim T$	5	Simp.
(12) T	11	D.N.
(13) $T \,.\, \sim T$	12, 10	Conj.
(14) $(T \supset U)$		R.P.

ตัวอย่างที่ 6 $M \supset N, M \supset (N \supset O) \therefore M \supset O$

วิธีทำ

(1)	$M \supset N$		
(2)	$M \supset (N \supset O)$	$\therefore M \supset O$	
(3)	$\sim(M \supset O)$		R.A.
(4)	$\sim(\sim M \vee O)$	3	M.I.
(5)	$\sim\sim M . \sim O$	4	DeM.
(6)	$\sim\sim M$	5	Simp.
(7)	M	6	D.N.
(8)	$N \supset O$	2, 7	M.P.
(9)	$\sim O$	5	Com. + Simp.
(10)	$\sim M$	8, 9	M.T.
(11)	$M . \sim M$	7, 10	Conj.
(12)	$M \supset O$		R.P.

ตัวอย่างที่ 7 $(J \vee K) \supset \sim L,\ L \therefore \sim J \vee (K \equiv L)$

วิธีทำ

(1)	$(J \vee K) \supset \sim L$		
(2)	L	$\therefore \sim J \vee (K \equiv L)$	
(3)	$\sim[\sim J \vee (K \equiv L)]$		A.R.
(4)	$\sim\sim J . \sim(K \equiv L)$	3	DeM.
(5)	$\sim\sim J$	4	Simp.
(6)	J	5	D.N.
(7)	$J \vee K$	6	Add.
(8)	$\sim L$	1, 7	M.P.
(9)	$L . \sim L$	2, 8	Conj.
(10)	$\sim J \vee (K \equiv L)$		R.P.

นอกจากนั้นแล้ว เรายังสามารถใช้วิธีพิสูจน์ด้วยการทำให้ขัดแย้งกันนี้ไปพิสูจน์ประพจน์ที่ไม่ใช่ข้ออ้างเหตุผลได้อีกด้วย ขอให้ดูตัวอย่างต่อไปนี้ประกอบ

ตัวอย่างที่ 8 จงพิสูจน์ว่า $(p . q) \supset p$ เป็นประพจน์สัจนิรันดร์ (Tautology) หรือไม่ โดยใช้วิธีพิสูจน์ด้วยการทำให้ขัดแย้งกัน

วิธีทำ	1. $(p \,.\, q) \supset p$		
	2. $\sim\{(p \,.\, q) \supset p\}$	R.A.	$\therefore (p \,.\, q) \supset p$
	2. $\sim\{\sim(p \,.\, q) \vee p\}$	1	M.I.
	3. $\sim\sim(p \,.\, q) \,.\, \sim p$	2	DeM.
	4. $(p \,.\, q) \,.\, \sim p$	3	D.N.
	5. $p \,.\, q$	4	Simp.
	6. p	5	Simp.
	7. $\sim p \,.\, (p \,.\, q)$	4	Com.
	8. $\sim p$	7	Simp.
	9. $p \,.\, \sim p$	6, 8	Conj.
	10. $(p \,.\, q) \supset p$		R.P.

ตัวอย่างที่ 9 $P \supset (P \vee Q)$

วิธีทำ	1. $\sim[P \supset (P \vee Q)]$	R.A.	$\therefore P \supset (P \vee Q)$
	2. $\sim[\sim P \vee (P \vee Q)]$	1	M.I.
	3. $\sim\sim P \,.\, \sim(P \vee Q)]$	2	DeM.
	4. $\sim\sim P$	3	Simp.
	5. P	4	D.N.
	7 $\sim(P \vee Q)$	3	Comm. + Simp.
	8. $\sim P \,.\, \sim Q$	7	DeM.
	9. $\sim P$	8	Simp.
	(10) $P \,.\, \sim P$	5, 9	Conj.
	(11) $P \supset (P \vee Q)$		R.P.

แบบฝึกหัดบทที่ 10

ก. จงหาความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลต่อไปนี้โดยใช้วิธีพิสูจน์ด้วยการทำให้ขัดแย้งกัน (R.A.A.)

1. (1) $S \supset T$

   (2) $\sim T . \sim U$ $\therefore \sim S$

2. (1) $M \vee N$

   (2) $\sim M . \sim O$ $\therefore N$

3. (1) $D \supset E$

   (2) $D . F$ $\therefore E$

4. (1) $(F \vee G) \supset \sim A$

   (2) $A \vee W$

   (3) $F.T$ $\therefore W$

5. (1) $D \supset (A \vee C)$

   (2) $D. \sim A$ $\therefore C$

6. (1) $(A \vee B) \supset (C \vee D)$

   (2) $A \supset \sim C$

   (3) $\sim (F . \sim A)$

   (4) F $\therefore D$

7. (1) $(D . \sim E) \supset F$

   (2) $\sim (E \vee F)$ $\therefore \sim D$

8. (1) $[(M . N) . O] \supset P$

   (2) $Q \supset [(O . M) . N]$ $\therefore \sim Q \vee P$

9. (1) $[(Y . Z) \supset A] . [(Y . B) \supset C]$

   (2) $(B \vee Z) . Y$ $\therefore A \vee C$

10. (1) $(P \supset Q) . (P \vee R)$

    (2) $(R \supset S) . (R \vee P)$ $\therefore Q \vee S$

11. (1) $A \supset B$

    (2) $C \supset D$

    (3) $(D . B) \supset E$

    (4) $\sim E$ $\therefore \sim A \vee \sim C$

12. (1) $\sim D \vee E$

    (2) $\sim F \supset \sim E$ $\therefore D \supset F$

13. (1) $M \supset N$

(2) $O \supset P$

(3) $(N \vee P) \supset R$

(4) $\sim R$ $\therefore \sim (M \vee O)$

14. (1) $(O \supset P) . (O \supset R)$

(2) $(P \supset S) . (R \supset T)$

(3) $S \supset \sim T$ $\therefore \sim O$

15. (1) $(\sim A \vee B) . (A \supset C)$

(2) $B \supset (C \supset E)$ $\therefore A \supset E$

16. (1) $(A . B) \supset (C \vee D$

(2) $D \supset F$

(3) $E \supset F$

(4) $\sim (F . G)$

(5) $G . \sim C$ $\therefore A \supset \sim B$

17. (1) $(P . Q) \vee (R . S)$

(2) $P \supset \sim P$ $\therefore S \vee (A \equiv B)$

18. (1) $(R \supset W) . (P \supset M)$

(2) $R \vee P$

(3) $(R \supset \sim M) . (P \supset \sim W)$ $\therefore M \equiv \sim W$

19. (1) $E . (F \vee G)$

(2) $(E . G) \supset \sim (H \vee I)$

(3) $(\sim H \vee I) \supset \sim (E . F)$ $\therefore H \equiv I$

20. (1) $X \supset S$

(2) $F \supset X$

(3) $K \supset \sim X$

(4) X $\therefore \sim F \supset \sim K$

21. (1) $T \supset (U . V)$

(2) $(U \vee V) \supset W$ $\therefore T \supset W$

22. (1) $A \supset B$

(2) $C \supset D$

(3) $(D . B) \supset E$

(4) $\sim E$ $\therefore \sim A \vee \sim C$

23. (1) $M \supset N$
    (2) $O \supset P$
    (3) $(N \vee P) \supset R$
    (4) $\sim R$ $\quad \therefore \sim (M \vee O)$

24. (1) $\sim F \vee \sim [\sim (G . H) . (G \vee H)]$
    (2) $(G \supset H) \supset [(H \supset G) \supset I]$ $\quad \therefore F \supset (F . I)$

25. (1) $J \vee (\sim J . K)$
    (2) $J \supset L$ $\quad \therefore (L . J) \equiv J$

26. (1) $(K . D) \supset R$
    (2) $(R . T) \supset S$
    (3) $O \supset (T . \sim S)$ $\quad \therefore (K . D) \supset \sim O$

27. (1) $U \supset (V \supset W)$
    (2) $(W . X) \supset Y$
    (3) $\sim Z \supset (X . \sim Y)$ $\quad \therefore U \supset (V \supset Z)$

28. (1) $(P . Q) \supset R$
    (2) $(P \supset R) \supset S$
    (3) $\sim Q \vee T$ $\quad \therefore Q \supset (S . T)$

29. (1) $C \supset (D \supset \sim C)$
    (2) $C \equiv D$ $\quad \therefore \sim C . \sim D$

30. (1) $(A \supset S) . (B \supset F)$
    (2) $A \vee B$
    (3) $(S \supset B) . (F \supset W)$
    (4) $\sim (A \vee G)$ $\quad \therefore W$

ข. จงพิสูจน์ประพจน์ต่อไปนี้ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ โดยใช้วิธีพิสูจน์ด้วยการทำให้ขัดแย้งกัน (R.A.A.)

1. $(Q \vee V) \vee \sim Q$
2. $(Q \vee W) \supset (\sim Q \supset W)$
3. $P \supset (W \supset P)$
4. $(\sim P . Q) \supset (P \supset \sim Q)$
5. $\sim [(\sim P . \sim Q) \supset (Q \supset P)]$
6. $\sim [(P \supset Q) \supset (\sim Q \supset \sim P)]$
7. $[(A \supset B) \supset C] \supset [(A . B) \supset C]$
8. $(A \supset B) \supset \sim (A . \sim B)$

9. $(A \cdot B) \supset \sim(\sim A \vee \sim B)$

10. $P \supset (P \supset P)$

11. $P \supset (P \cdot P)$

12. $(P \cdot Q) \supset P$

13. $(P \supset Q) \supset [\sim(Q \cdot R) \supset \sim(R \cdot P)]$

14. $[(P \supset Q) \supset P] \supset P$

15. $P \supset (Q \supset P)$

16. $[(A \supset B) \cdot \sim B] \supset \sim A$

17. $[(\sim A \vee B) \supset A] \supset (B \vee A)$

18. $(A \cdot B) \supset (A \vee B)$

19. $C \supset (D \supset C)$

20. $(B \cdot C) \supset [(B \vee A) \cdot (C \vee \sim A)]$

21. $(P \supset Q) \vee \sim(P \cdot Q)$

22. $(P \cdot Q) \supset \sim(\sim P \vee \sim Q)$

23. $(P \cdot Q) \supset \sim(P \supset \sim Q)$

24. $(P \vee Q) \supset (\sim P \supset Q)$

25. $(P \supset Q) \supset (\sim Q \supset \sim P)$

26. $\sim(P \cdot Q) \supset (\sim P \vee \sim Q)$

27. $[(P \cdot Q) \supset R] \vee [P \supset (Q \supset \sim R)]$

28. $[P \cdot (Q \vee R)] \vee [(P \cdot Q) \vee (P \cdot R)]$

29. $P \supset [P \cdot (Q \supset P)]$

30. $[(A \supset B) \cdot A] \supset A$

แผนการจัดการเรียนรู้บทที่ 11

เรื่อง วิธีพิสูจน์ด้วยการสมมติเงื่อนไข **เวลา 3 ชั่วโมง**

****

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นิสิตมีความเข้าใจความหมายและขั้นตอนการพิสูจน์ข้ออ้างเหตุผลแบบนิรนัยด้วยการสมมติเงื่อนไขได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกความหมายและขั้นตอนวิธีพิสูจน์ด้วยการสมมติเงื่อนไขได้
2. พิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลด้วยวิธีพิสูจน์ด้วยการสมมติเงื่อนไขได้

2. แนวคิดหลัก (สาระสำคัญ)

วิธีพิสูจน์โดยการสมมติเงื่อนไข (Conditional Proof) คือ การนำเอาตัวเงื่อนไขของข้อสรุปมาทำเป็นข้ออ้างเพื่อพิสูจน์หาตัวผลของเงื่อนไข (Consequent)

3. เนื้อหาสาระ

1. ความหมายของวิธีพิสูจน์ด้วยการสมมติ เงื่อนไข
2. ตัวอย่างวิธีพิสูจน์ด้วยการสมมติเงื่อนไข

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. อาจารย์แจ้งจุดประสงค์ให้นิสิตทราบ
2. อาจารย์แนะนำวิธีพิสูจน์ด้วยการสมมติเงื่อนไข
3. นิสิตแบ่งกลุ่มเป็น 4 กลุ่ม โดยให้แต่ละกลุ่มร่วมกันพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลที่อาจารย์กำหนดให้ด้วยวิธีพิสูจน์ด้วยการสมมติเงื่อนไข
4. นิสิตแต่ละกลุ่มแลกเปลี่ยนกันตรวจคำตอบ หากข้อใดผิด ให้แจ้งกลุ่มที่ทำโจทย์เพื่อแก้ไขความถูกต้อง
5. นิสิตทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติมจากเอกสารประกอบการสอนบทที่ 11
6. อาจารย์และนิสิตร่วมกันเฉลยแบบฝึกหัด
7. นิสิตสรุปจดบันทึกลงในสมุดของนิสิต

5. แหล่งการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอนวิชา ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์บทที่ 11
2. แบบฝึกหัดบทที่ 11
3. Power-point

6. กระบวนการวัดผลและประเมินผล

1. การร่วมกันสรุป, อภิปรายและตอบคำถาม
2. การตอบคำถามในแบบฝึกหัด
3. การสรุปจดบันทึกของนิสิต
4. เอกสารแบบฝึกหัด
5. ตรวจผลงานการตอบโจทย์ของแต่ละกลุ่ม

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

(..)

อาจารย์สอน

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

....

....

บทที่ 11
วิธีพิสูจน์ด้วยการสมมติเงื่อนไข
(Conditional Proof)

11.1 ความหมายของวิธีพิสูจน์ด้วยการสมมติ เงื่อนไข

ในการพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลนั้น เราจะพบว่าบางครั้งขั้นตอนการพิสูจน์นั้นจะสลับซับซ้อน ยาก และ ยาวมาก วิธีการหนึ่งที่จะช่วยขจัดข้อยุ่งยากเหล่านั้น ก็คือ การพิสูจน์โดยวิธีสมมติเงื่อนไข (Conditional Proof) แต่มีข้อแม้ว่าวิธีการนี้จะใช้ได้ก็เฉพาะกับกรณีที่ประพจน์หรือข้ออ้างเหตุผลที่ให้มามีข้อสรุปเป็นเงื่อนไขเท่านั้น เช่น

1. $(p \supset \sim q) \vee r$
2. $r \supset s$
3. $\sim s$ $\qquad\qquad \therefore\ q \supset \sim p$

แต่วิธีพิสูจน์โดยการสมมติเงื่อนไขจะใช้ไม่ได้กับประพจน์หรือข้ออ้างเหตุผลที่มีข้อสรุปไม่อยู่ในรูปของเงื่อนไข เช่น

1. $a \supset b$
2. $c . d$
3. a $\qquad\qquad \therefore\ d . b$

วิธีพิสูจน์โดยการสมมติเงื่อนไข (Conditional Proof) คือ การนำเอาเงื่อนไขหน้า (antecedent) ของข้อสรุปมาทำเป็นข้ออ้างเพื่อพิสูจน์หาตัวผลของเงื่อนไข (consequent) ดูจากตัวอย่างข้างบน คือ $q \supset \sim p$ นั้น เราก็นำเอา q ซึ่งเป็นเงื่อนไขหน้ามาเป็นข้ออ้าง แล้วทำการพิสูจน์ไปตามขั้นตอนจนได้ผลลัพธ์ออกมาเป็นตัวผลของเงื่อนไข ซึ่งจากตัวอย่างของข้อสรุป $q \supset \sim p$ นั้น ผลลัพธ์ที่เราต้องการหาหรือต้องการพิสูจน์ก็คือ $\sim p$ นั่นเอง

ในกรณีที่ข้อสรุปมีข้อความที่เป็นเงื่อนไขซ้อนกัน ก็อาจจะสมมติเงื่อนไขได้ 2 ครั้งหรือมากกว่านั้น เช่น ข้อสรุปเป็น $p \supset (q \supset r)$ ก็สมมติเงื่อนไขดังนี้

p ----------- C.A.

q ----------- C.A.

จากนั้นก็พิสูจน์ไปตามลำดับจนกว่าจะได้ผลลัพธ์คือตัวผลของเงื่อนไข

การพิสูจน์โดยวิธีสมมติเงื่อนไขมีวิธีหรือขั้นตอนการพิสูจน์ดังนี้

1. ใส่จำนวนหมายเลขแก่ข้ออ้างของข้ออ้างเหตุผลที่เราต้องการจะพิสูจน์ตามลำดับ เช่น

1. a v b

2. a ⊃ b

2. เขียนข้อสรุปอยู่ทางขวามือข้ออ้างสุดท้าย โดยทำเครื่องหมายให้สังเกตออกว่าเป็นข้อสรุป เช่น $\therefore$ a ⊃ b

3. ใช้กฎการอนุมานทั้ง 11 กฎและกฎการแทนที่ทั้ง 10 กฎในการพิสูจน์แบบนิรนัย และเขียนกฎที่เราใช้พิสูจน์ให้ได้ข้ออ้างเพิ่มนั้นด้วยอักษรย่อ

4. เมื่อพิสูจน์จนได้ผลของตัวเงื่อนไขหน้าแล้วให้ขีดเส้นโยงจากผลของเงื่อนไขที่เราได้ไปหาตัวที่เราสมมติเงื่อนไขนั้น โดยทำเส้นโยงปลายเป็นลูกศรชี้ที่ตัวสมมติเงื่อนไขนั้น แล้วใส่ตัวเลขกำกับว่าตั้งแต่การพิสูจน์ขั้นนี้ถึงขั้นนี้เป็นการสมมติเงื่อนไข และขั้นสุดท้ายให้เขียนข้อสรุปลงไปอีกครั้ง เช่น 8. a ⊃ b --3 – 7 C.P เพื่อแสดงให้รู้ว่าสิ่งที่เราต้องการหานั้นได้รับการพิสูจน์อย่างสมเหตุสมผลเรียบร้อยแล้วนั่นเอง

11.2 ตัวอย่างวิธีพิสูจน์ด้วยการสมมติเงื่อนไข

ต่อไปขอให้เราพิจารณาดูตัวอย่างประกอบ เพื่อจะได้เข้าใจยิ่งๆ ขึ้น

ตัวอย่างที่ 1 ข้อสรุปมีเงื่อนไขเดียว

(p ⊃ ~q) v r

r ⊃ s

~s

---

q ⊃ ~p

วิธีทำ

1. (p ⊃ ~q) v r		
2. r ⊃ s		
3. ~s	$\therefore$ q ⊃ ~p	
4. q		C.A
5. ~r	2, 3	M.T.
6. r v (p ⊃ ~q)	1, 2	C.D.
7. p ⊃ ~q	6, 5	D.S.
8. ~~q	4	D.N.
9. ~p	7, 8	M.T.
10. q ⊃ ~p	4 – 9	C.P.

หมายเหตุ: คำว่า C.A. ย่อมาจาก Conditional Assumption แปลว่า การสมมติเงื่อนไข ส่วนคำว่า C.P. ย่อมาจาก Conditional Proof แปลว่า การพิสูจน์โดยสมมติเงื่อนไข หมายถึงว่า การสมมติเงื่อนไขของข้อสรุปนั้นได้รับการพิสูจน์แล้ว

ตัวอย่างที่ 2 ข้อสรุปมีเงื่อนไขซ้อน

$\sim m \vee (o \supset n)$

$\sim o \vee (\sim n \vee l)$

$m \supset (o \supset l)$

วิธีทำ

1.	$\sim m \vee (o \supset n)$		
2.	$\sim o \vee (\sim n \vee l)$	$\therefore m \supset (o \supset l)$	
3.	m	C.A.	
4.	o	C.A.	
5.	$\sim\sim o$	4	D.N.
6.	$\sim n \vee l$	2, 5	D.S.
7.	$\sim\sim m$	3	D.N.
8.	$o \supset n$	1, 7	D.S.
9.	n	8, 4	M.P.
10.	$\sim\sim n$	9	D.N.
11.	l	6, 10	D.S.
12.	$o \supset l$	4 – 11	C.P.
13.	$m \supset (o \supset l)$	3 – 12	C.P.

อีกประการหนึ่ง ในกรณีที่ข้อสรุปมีเงื่อนไขซ้อนนั้น เราอาจจะสมมติเงื่อนไขที่ ๒ อยู่ตรงกลางของการพิสูจน์นั้นก็ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3 $(e \vee f) \supset g$

$(h \vee i) \supset \{(j \vee k) \supset e\}$

$h \supset (j \supset k$

วิธีทำ

1. $(e \vee f) \supset g$
2. $(h \vee i) \supset \{(j \vee k) \supset e\}$ $\therefore h \supset (j \supset g)$

3. h		C.A.
4. $h \vee i$	3	Add.
5. $(j \vee k) \supset e$	2, 4	M.P.
6. j		C.A.
7. $j \vee k$	6.	Add.
8. e	5, 7	M.P.
9. $e \vee f$	8	Add.
10. g	1, 9	M.P.
11. $j \supset g$	6 – 10	C.P.
12. $h \supset (j \supset g)$	3 – 11	C.P.

และในกรณีที่ข้อสรุปมีเงื่อนไข ๒ เงื่อนไขแยกกัน แต่เชื่อมด้วยตัวเชื่อมรวม เราอาจจะแยกสมมติเงื่อนไขได้ดังนี้

ตัวอย่างที่ 4 $(a \vee b) \supset c$

$d \supset (e . f)$

$(a \supset c) . (d \supset e)$

วิธีทำ

1. $(a \vee b) \supset c$		
2. $d \supset (e . f)$	$\therefore (a \supset c) . (d \supset e)$	
3. a	C.A.	
4. $a \vee b$	3	Add.
5. c	1, 4	M.P.
6. $a \supset c$	3 – 5	C.P.
7. d	C.A.	
8. $e . f$	2, 7	M.P.
9. e	8	Simp.
10. $d \supset e$	7 – 9	C.P.
11. $(a \supset c) . (d \supset e)$	6. กับ 10.	Conj.

ในตัวอย่างนี้มีการสมมติเงื่อนไขแยกกัน 2 ครั้ง คือ ที่ขั้นที่ 3 และขั้นที่ 7 และการสมมติเงื่อนไขทั้ง 2 ครั้งนั้นก็อยู่ภายนอกขอบเขตของกันและกัน ดังนั้น ในขั้นที่ 11 อันเป็นขั้นสุดท้ายของการพิสูจน์จึงรวมเอาการสมมติเงื่อนไขทั้ง 2 เข้าด้วยกัน ดังนั้น เราก็จะได้ผลลัพธ์ที่ตรงกับข้อสรุปพอดี

จะเห็นว่าการสมมติเงื่อนไขนั้นทำได้หลายวิธี จึงควรจดจำวิธีเหล่านี้ไปประยุกต์ใช้กับข้ออ้างเหตุผลที่ให้มาเฉพาะกรณีไป นอกจากนี้ กฎการพิสูจน์ความสมเหตุสมผลด้วยวิธีสมมติเงื่อนไขและกฎการพิสูจน์ความสมเหตุสมผลโดยอ้อมหรือด้วยวิธีทำให้ขัดแย้งกันทั้ง 2 อย่าง ยังสามารถนำมาพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้อความได้ด้วย ดังจะเห็นได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5 $\{(o \supset p) . (p \supset q)\} \supset (o \supset q)$

วิธีทำ

1.	$(o \supset p) . (p \supset q)$	C.A.	$\therefore (o \supset q)$
2.	o		C.A.
3.	$o \supset p$	1	Simp.
4.	p	3, 2.	M.P.
5.	$(p \supset q) . (o \supset p)$	1	Com.
6.	$p \supset q$	5	Simp.
7.	q	6, 4	M.P.
8.	$o \supset q$	2 – 7	C.P.

ตัวอย่างที่ 6 $(P \vee Q) \supset (\sim P \supset Q)$

วิธีทำ

1.	$P \vee Q)$	C.A.	$\therefore \sim P \supset Q$
2.	$\sim P$		C.A.
3.	Q	1, 2	D.S.
4.	$\sim P \supset Q$		C.P.

แบบฝึกหัดบทที่ 11

จงพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลต่อไปนี้ด้วยวิธีพิสูจน์แบบสมมติเงื่อนไข

1.	(1)	$A \supset (B . C)$		
	(2)	$(B \vee C) \supset I$	$/ \therefore$	$A \supset I$
2.	(1)	$A \supset (B \vee C)$		
	(2)	$A \supset \sim B$	$/ \therefore$	$A \supset C$
3.	(1)	$P \supset Q$	$/ \therefore$	$P \supset \sim (P \supset \sim Q)$
4.	(1)	$D \supset (F \vee T)$		
	(2)	$\sim F$	$/ \therefore$	$\sim T \supset (\sim D \vee S)$
5.	(1)	$(E . S) \supset P$		
	(2)	$(E . \sim S) \supset \sim P$	$/ \therefore$	$E \supset [(S . P) \vee (\sim S . \sim P)]$
6.	(1)	$A . B$		
	(2)	$(A \vee B) \supset F$		
	(3)	$F \supset (C \supset D)$		
	(4)	$D \supset E$	$/ \therefore$	$C \supset E$
7.	(1)	$P \supset (Q \supset \sim P)$		
	(2)	$P \supset Q$		
	(3)	$\sim P \supset \sim Q$	$/ \therefore$	$P \supset (P . Q)$
8.	(1)	$(A \vee B) \supset (C . D)$	$/ \therefore$	$A \supset C$
9.	(1)	$(A \vee B) \supset (C . D)$	$/ \therefore$	$\sim D \supset \sim A$
10.	(1)	$(Q . R) \supset S$		
	(2)	$(R \supset S) \supset T$	$/ \therefore$	$Q \supset T$
11.	(1)	$\sim M \vee (P \supset Q)$		
	(2)	$\sim P \vee (\sim Q \vee S)$	$/ \therefore$	$M \supset (P \supset S)$
12.	(1)	$A \equiv D$		
	(2)	$(B \cdot D) \supset \sim C$	$/ \therefore$	$A \supset (B \supset \sim C)$
13.	(1)	$A \supset B$		
	(2)	$A \supset C$	$/ \therefore$	$A \supset (B . C)$
14.	(1)	$P \supset (Q . R)$		
	(2)	$(Q \vee R) \supset O$	$/ \therefore$	$P \supset O$

15. (1) $L \vee (M \supset N)$

(2) $\sim L \supset (N \supset O)$

(3) $\sim L$ $\quad / \therefore \; M \supset O$

16. (1) $(K \cdot L) \supset M$

(2) $K \supset L$ $\quad / \therefore \; K \supset [(K \cdot L) \cdot M]$

17. (1) $Q \supset (R \vee S)$

(2) $(T \cdot U) \supset R$

(3) $(R \vee S) \supset (T \cdot U)$ $\quad / \therefore \; Q \supset R$

18. (1) $J \vee \sim K$

(2) $K \vee (L \supset J)$

(3) $\sim J$ $\quad / \therefore \; L \supset J$

19. (1) $(E \cdot F) \vee (G \supset H)$

(2) $I \supset G$

(3) $\sim(E \cdot F)$ $\quad / \therefore \; I \supset H$

20. (1) $B \supset \sim A$

(2) $A \vee C$

(3) $C \supset D$ $\quad / \therefore \; B \supset D$

21. (1) $W \supset X$

(2) $(W \cdot X) \supset Y$

(3) $(W \cdot Y) \supset Z$ $\quad / \therefore \; W \supset Z$

22. (1) $(X \vee Y) \supset (Y \supset Z)$

(2) $X \cdot (Y \supset \sim Y)$

(3) $Z \supset \sim Z$ $\quad / \therefore \; Y \supset \sim Z$

23. (1) $(A \cdot B) \supset \sim C$

(2) $C \vee (D \cdot E)$

(3) $A \equiv B$ $\quad / \therefore \; A \supset D$

24. (1) $X \equiv \sim Y$

(2) $(Y \vee Z) \supset T$

(3) $\sim(T \vee W)$ $\quad / \therefore \; P \supset X$

25. (1) $B \supset (C \supset E)$

(2) $E \supset \sim (J \vee H)$

(3) $\sim S$

	(4)	$J \vee S$	$/ \therefore \; B \supset \sim C$
26.	(1)	$\sim D \supset (\sim E \supset \sim F)$	
	(2)	$\sim(F \,.\, \sim D) \supset \sim G$	$/ \therefore \; G \supset E$
27.	(1)	$[H \vee (I \vee J)] \supset (K \supset J)$	
	(2)	$L \supset [I \vee (J \vee H)$	$/ \therefore \; (L \,.\, K) \supset J$
28.	(1)	$(R \,.\, S) \supset [T \supset (U \,.\, V)]$	
	(2)	$R \supset S$	$/ \therefore \; R \supset (T \supset V)$
29.	(1)	$K \supset (L \supset M)$	
	(2)	L	$/ \therefore \; K \supset M$
30.	(1)	$X \supset (Y \vee Z)$	
	(2)	$\sim Z$	$/ \therefore \; X \supset Y$
31.	(1)	$(M \vee N) \supset O$	
	(2)	$O \supset (W \,.\, X)$	$/ \therefore \; M \supset W$
32.	(1)	$(A \vee B) \supset (C \,.\, D)$	$/ \therefore \; B \supset D$
33.	(1)	$(A \vee B) \supset (C \,.\, D)$	$/ \therefore \; A \supset (C \,.\, D)$
34.	(1)	$A \supset (B \,.\, C)$	
	(2)	$\sim C \vee D$	
	(3)	$D \supset \sim E$	$/ \therefore \; E \supset A$
35.	(1)	$(A \vee B) \supset (C \,.\, D)$	
	(2)	$(C \vee D) \supset (A \,.\, B)$	$/ \therefore \; A \equiv C \; [(A \supset C) \,.\, (C \supset A)]$
36.	(1)	$(A \vee B) \supset [(C \vee D) \supset E]$	$/ \therefore \; A \supset (C \supset E)$
37.	(1)	$(A \supset B) \,.\, (C \supset D)$	
	(2)	$(B \vee D) \supset (A \,.\, C)$	$/ \therefore \; A \supset C$
38.	(1)	$(A \vee B) \supset \sim C$	
	(2)	$D \supset (\sim F \,.\, \sim G)$	$/ \therefore \; (A \vee D) \supset \sim(C \,.\, F)$
39.	(1)	$P \supset (Q \supset R)$	
	(2)	$S \supset (R \supset B)$	
	(3)	$(Q \supset B) \supset (H \vee \sim S)$	$/ \therefore \; (P \,.\, S) \supset H$
40.	(1)	$P \supset [(L \vee M) \supset (N \,.\, O)]$	
	(2)	$(O \vee T) \supset W$	$/ \therefore \; P \supset (M \supset W)$

แผนการจัดการเรียนรู้บทที่ 12

เรื่อง ตรรกศาสตร์ภาคขยาย **เวลา 6 ชั่วโมง**

****

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นิสิตเข้าใจความหมายของตรรกศาสตร์ภาคขยาย เข้าใจสัญลักษณ์ การแปลข้อความเป็นสัญลักษณ์ และการตีค่าของตัวบ่งปริมาณในตรรกศาสตร์ภาคขยาย และสามารถพิสูจน์ความสมเหตุสมผลในตรรกศาสตร์ภาคขยายได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. ความหมายของตรรกศาสตร์ภาคขยาย
2. เข้าใจสัญลักษณ์ การแปลข้อความเป็นสัญลักษณ์และการตีค่าของตัวบ่งปริมาณในตรรกศาสตร์ภาคขยาย
3. สามารถพิสูจน์ความสมเหตุสมผลในตรรกศาสตร์ภาคขยายได้

2. แนวคิดหลัก (สาระสำคัญ)

ตรรกศาสตร์ภาคขยาย คือ ตรรกศาสตร์ที่เน้นโครงสร้างภายในของประพจน์ ซึ่งแสดงถึงคุณสมบัติหรือความสัมพันธ์ของบุคคล วัตถุ สิ่งของที่เป็นภาคประธานเ และให้ความสำคัญกับตัวบ่งปริมาณในข้ออ้างเหตุผลนั้นปี็นหลัก

3. เนื้อหาสาระ

1. ความหมายของตรรกศาสตร์ภาคขยาย
2. สัญลักษณ์ที่ใช้ในตรรกศาสตร์ภาคขยาย
3. ชนิดของประพจน์
4. ตัวแปรอิสระ และตัวแปรติด
5. การตีความตัวบ่งปริมาณ
6. กฎการถอดและการใส่ปริมาณ
7. ตัวอย่างการพิสูจน์ความสมเหตุสมผล

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. อาจารย์แจ้งจุดประสงค์ให้นิสิตทราบ
2. อาจารย์แนะนำตรรกศาสตร์ภาคขยายให้นิสิตทราบ
3. นิสิตแบ่งกลุ่มเป็น 4 กลุ่ม โดยให้นิสิตกลุ่มที่ 1 หาตัวอย่างประพจน์เอกพจน์พร้อมทั้งถอดเป็นสัญลักษณ์ตามหลักตรรกศาสตร์ภาคขยาย 15 ตัวอย่าง ให้นิสิตกลุ่มที่ 2 หาตัวอย่างประพจน์ที่บ่งปริมาณสากลประเภทยืนยันพร้อมทั้งถอดเป็นสัญลักษณ์ตามหลักตรรกศาสตร์ภาคขยาย 10 ตัวอย่าง ให้นิสิตกลุ่มที่

3 หาตัวอย่างประพจน์ที่บ่งปริมาณสากลประเภทปฏิเสธพร้อมทั้งถอดเป็นสัญลักษณ์ตามหลักตรรกศาสตร์ภาคขยาย 10 ตัวอย่าง ให้นิสิตกลุ่มที่ 4 หาตัวอย่างประพจน์ที่แสดงความมีอยู่พร้อมทั้งถอดเป็นสัญลักษณ์ตามหลักตรรกศาสตร์ภาคขยาย 5 ตัวอย่าง และหาตัวอย่างประพจน์ที่ยืนยันบางส่วนและปฏิเสธบางส่วนอย่างละ 5 ตัวอย่างพร้อมทั้งถอดเป็นสัญลักษณ์ตามหลักตรรกศาสตร์ภาคขยาย

4. นิสิตแต่ละกลุ่มแลกเปลี่ยนกันตรวจคำตอบ หากข้อใดผิด ให้แจ้งกลุ่มที่ทำโจทย์เพื่อแก้ไขให้ถูกต้อง

5. นิสิตทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติมจากเอกสารประกอบการสอนบทที่ 12

6. อาจารย์และนิสิตร่วมกันเฉลยแบบฝึกหัด

7. นิสิตสรุปจดบันทึกลงในสมุดของนิสิต

5. แหล่งการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอนวิชา ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์บทที่ 12

2. แบบฝึกหัดบทที่ 12

3. Power-point

6. กระบวนการวัดผลและประเมินผล

1. การร่วมกันสรุป, อภิปรายและตอบคำถาม

2. การตอบคำถามในแบบฝึกหัด

3. การสรุปจดบันทึกของนิสิต

4. เอกสารแบบฝึกหัด

5. ตรวจผลงานการตอบโจทย์ของแต่ละกลุ่ม

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

(..)

อาจารย์สอน

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

....

....

บทที่ 12

ตรรกศาสตร์ภาคขยาย

(Predicate Logic)

12.1 ความหมายของตรรกศาสตร์ภาคขยาย

ตรรกศาสตร์ว่าด้วยประพจน์ (Propositional Logic) ที่เราเรียนในบทก่อนๆ จะพิสูจน์ค่าความจริงและความสมเหตุสมผลจากโครงสร้างหรือความสัมพันธ์ภายนอกของประพจน์เท่านั้น และวิธีแทนค่าประพจน์ด้วยตัวแปรก็ใช้ตัวแปรตัวเดียวแทนค่าประพจน์เดี่ยวทั้งประพจน์ เช่น ประพจน์ที่ว่า "สุชาติเป็นคนขยัน" แทนค่าด้วย S เป็นต้น แต่ในกรณีของข้ออ้างเหตุผล ตรรกศาสตร์ว่าด้วยประพจน์นั้นจะไม่สามารถพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลที่มีตัวบ่งปริมาณได้ เช่น ข้ออ้างเหตุผลที่ว่า

มนุษย์ทุกคนเป็นสัตว์ที่ต้องตาย	แทนค่าด้วยตัวแปร	M
นักศึกษาทุกคนเป็นมนุษย์	แทนค่าด้วยตัวแปร	S
เพราะฉะนั้น นักศึกษาทุกคนเป็นสัตว์ที่ต้องตาย	แทนค่าด้วยตัวแปร	H

ข้ออ้างเหตุผลนี้สามารถจะเขียนให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ในตรรกศาสตร์ว่าด้วยประพจน์ได้ดังนี้ $(M . S) \supset H$ ถ้านำข้ออ้างเหตุผลนี้ไปพิสูจน์หาความสมเหตุสมผลด้วยตารางความจริงชนิดตรง ก็จะได้คำตอบว่าไม่สมเหตุสม ผล (Invalid) ทันทีดังตารางต่อไปนี้

(M	.	S)	⊃	H
T	.	T	**T**	T
T	T	T	***F***	F
T	F	F	**T**	T
T	F	F	**T**	F
F	F	T	**T**	T
F	F	T	**T**	F
F	F	F	**T**	T
F	F	F	**T**	F

เมื่อการพิสูจน์ด้วยตรรกศาสตร์ว่าด้วยประพจน์ไม่สามารถจะพิสูจน์ประพจน์ที่บ่งปริมาณได้อย่างถูก ต้อง ตรรกศาสตร์ภาคขยายจึงมีบทบาทสำคัญที่จะพิสูจน์ให้เห็นว่าข้ออ้างเหตุผลที่มีตัวบ่งปริมาณนั้นสมเหตุสม ผลได้อย่างไร เพราะหลักการสำคัญของตรรกศาสตร์ภาคขยายก็คือการวิเคราะห์โครงสร้าง

ภายในของประพจน์ ดังนั้นในประพจน์หนึ่งๆ จึงไม่ได้มีตัวแปรเพียงตัวเดียว แต่จะมีตัวแปรอย่างน้อย 2 ตัว คือ มีตัวแปรที่แทนทั้งภาคประธานของประพจน์และภาคขยายของประพจน์ ซึ่งจะให้ความสำคัญกับภาคขยายมาก เพราะฉะนั้นเวลาแทนค่าประพจน์ด้วยสัญลักษณ์จึงใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวใหญ่ (Capital Letters) แทนภาคขยายและให้อยู่หน้าตัวแปรที่แทนค่าภาคประธานของประพจน์ ซึ่งแทนค่าด้วยอักษรภาษาอังกฤษตัวเล็ก (Lower Case Letters) เช่น ประพจน์ที่ว่า “แดงเป็นมนุษย์” (แทนค่า “แดง” ซึ่งเป็นภาคประธานของประพจน์ด้วยตัวแปรที่เป็นอักษรภาษาอังกฤษตัวเล็กคือ d และแทนค่าภาคขยายของประพจน์คือ “เป็นมนุษย์” ด้วยอักษรภาษาอังกฤษตัวใหญ่คือ M) จะเป็น Md

ดังนั้น เราสามารถจะนิยามความหมายของตรรกศาสตร์ภาคขยายได้ว่า ตรรกศาสตร์ภาคขยาย คือ ตรรกศาสตร์ที่เน้นโครงสร้างภายในของประพจน์ ซึ่งแสดงถึงคุณสมบัติหรือความสัมพันธ์ของบุคคล วัตถุ สิ่งของที่เป็นภาคประธานเ และให้ความสำคัญกับตัวบ่งปริมาณในข้ออ้างเหตุผลนั้นป็นหลักด้วย

12.2 สัญลักษณ์ที่ใช้ในตรรกศาสตร์ภาคขยาย

อักษรตัวใหญ่	A – Z	แทน	ภาคขยาย
อักษรตัวเล็ก	x, y, z	แทน	ตัวแปรเฉพาะ
อักษรตัวเล็ก	a, b, c......	แทน	ตัวคงที่เฉพาะ
สัญลักษณ์	$(\exists x)$	แทน	ตัวบ่งปริมาณบางส่วน
สัญลักษณ์	(x), (y), (z)	แทน	ตัวบ่งปริมาณสากล
สัญลักษณ์	$\sim, \cdot, \vee, \supset, \equiv$	แทน	ตัวเชื่อม
สัญลักษณ์	( ), { }, [ ], | |	แทน	วงเล็บ

12.3 ชนิดของประพจน์

ประพจน์ในตรรกศาสตร์ภาคขยายมี 3 ชนิด (Patrick J. Hurley, 2008, p. 407). คือ

1. ประพจน์เอกพจน์ (Singular Proposition) คือ ประพจน์ที่ระบุประธานที่เป็นคน สัตว์ พืช สิ่งของเพียงสิ่งเดียวแบบเฉพาะเจาะจง และระบุคุณสมบัติอย่างใดอย่างหนึ่งของประธานในภาคขยาย มี 2 ชนิด คือ

1.1 ประพจน์เอกพจน์ยืนยัน (Affirmative Singular Proposition) คือ ประพจน์ที่ยืนยันคุณสมบัติของประธานที่เป็นคน สัตว์ พืช สิ่งของสิ่งใดสิ่งหนึ่งแบบเฉพาะเจาะจง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ก. เรณูเป็นนิสิตเอกปรัชญาชั้นปีที่ 3	แทนค่าเป็น	Pr
ข. อัจฉราเป็นนิสิตที่ขยันเรียน	แทนค่าเป็น	Ia
ค. โสเครตีสเป็นนักปรัชญา	แทนค่าเป็น	Ps
ง. เขาเขียวเป็นสวนสัตว์เปิด	แทนค่าเป็น	Ok
จ. สุนัขเป็นสัตว์แสนรู้	แทนค่าเป็น	Id
ฉ. ฟ้าทะลายโจรเป็นพืชสมุนไพร	แทนค่าเป็น	Hp

ช. สิ่งนี้มีสีเขียว แทนค่าเป็น Gt

1.2 ประพจน์เอกพจน์ปฏิเสธ (Negative Singular Proposition) คือ ประพจน์ที่ปฏิเสธคุณสมบัติของประธานที่เป็นสัตว์ พืช สิ่งของสิ่งใดสิ่งหนึ่งแบบเฉพาะเจาะจง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ก. พนมเปญไม่ใช่เมืองหลวงของไทย แทนค่าเป็น $\sim Cp$

ข. ขวัญ อุษามณีไม่ใช่นักร้อง แทนค่าเป็น $\sim Sk$

ค. สิ่งนั้นไม่ใช่สีเขียว แทนค่าเป็น $\sim Gt$

ง. อรนุชไม่ใช่คนสวย แทนค่าเป็น $\sim Bo$

จ. วิชัยไม่ใช่นักวิ่ง แทนค่าเป็น $\sim Rv$

ฉ. ทุเรียนไม่ใช่ผลไม้มีพิษ แทนค่าเป็น $\sim Pd$

ช. วังตะไคร้ไม่ใช่สวนสาธารณะ แทนค่าเป็น $\sim Pv$

2. ประพจน์ซ้อน (Compound Proposition) คือ ประพจน์ที่ระบุประธานหรือภาคขยายมากกว่าหนึ่ง แบบเฉพาะเจาะจง เช่น วิภาเป็นคนฉลาด แต่สุรชัยเป็นคนขยัน ซึ่งแทนค่าด้วยสัญลักษณ์ได้ว่า $Cv \,.\, Is$ โดยที่ C แทนค่าภาคขยายของประพจน์แรกที่ว่า “เป็นคนฉลาด” และ v แทนภาคประธานของประพจน์แรกที่ว่า “วิภา” ส่วน I แทนค่าภาคขยายของประพจน์ที่สองที่ว่า “เป็นคนขยัน” และ s แทนค่าภาคประธานของประพจน์ที่สองที่ว่า “สุรชัย” หรือประพจน์ตัวอย่างต่อไปนี้

ก. ดวงตาเป็นนักศึกษา ส่วนกานดาเป็นนักธุรกิจ แทนค่าเป็น $Sd \,.\, Bk$

ข. จิตราเป็นคนเก่งหรือเป็นคนดี แทนค่าเป็น $Ic \vee Gc$

ค. ถ้าภาวินีขยันแล้ว เธอก็จะมีเงินเก็บ แทนค่าเป็น $Ip \supset Mp$

ง. ถ้าฤดียังหายใจอยู่ก็เท่ากับว่าเธอยังมีชีวิตอยู่ แทนค่าเป็น $Br \equiv Lr$

จ. แดงจะได้เกียรตินิยมอันดับหนึ่ง ก็ต่อเมื่อแดงได้เกรดเฉลี่ย 3. 5 ขึ้นไป $Fd \equiv Gd$

ฉ. ถึงแม้มนัสจะนอนดึกแต่เขาก็ไม่เคยมาเรียนสาย แทนค่าเป็น $Sm \,.\, \sim Lm$

ช. ถ้ากบมีอายุยืนถึงร้อยปีแล้ว เต่าจะมีอายุยืนถึงพันปี แทนค่าเป็น $Lf \supset Lt$

3. ประพจน์ทั่วไป (General Proposition) คือ ประพจน์ที่มีประธานไม่เฉพาะเจาะจงบุคคล สัตว์ พืช สิ่งของใดๆ แต่บ่งทั่วไปในกลุ่มหรือชั้นทั้งหมดหรือบางส่วน เราเรียกประพจน์ชนิดนี้ว่า ประพจน์บ่งปริมาณ (Quantifier) มี 2 ชนิดคือ ประพจน์บ่งปริมาณสากล (Universal Quantifier) และประพจน์บ่งปริมาณบางส่วน (Existential Quantifier)

3.1 ประพจน์บ่งปริมาณสากล คือ ประพจน์ที่รวมเอาสมาชิกทั้งหมดของกลุ่มไว้ด้วยกัน สามารถใช้สัญลักษณ์แทนคือ (x) อ่านว่า สำหรับทุก x (For all x)ในตรรกศาสตร์ดั้งเดิมของอริสโตเติล ประพจน์บ่งปริมาณสากลนี้ เรียกว่า ประพจน์ A ยืนยันทั่วไป และประพจน์ E ปฏิเสธทั่วไป มี 2 ชนิด คือ

3.1.1 ชนิดที่ระบุคุณสมบัติทั้งหมดของกลุ่มหรือชั้นเพียงกลุ่มเดียวหรือชั้นเดียว ตัวอย่าง เช่น

(1) ใดใดในโลกล้วนอนิจจัง (Everything is perishable.) เขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า $(x)\ Px$ อ่านว่า สำหรับทุก x, x เป็นสิ่งที่เป็นอนิจจัง

(2) สรรพสิ่งล้วนพึ่งพาอาศัยกัน (Everything is interdependent.) เขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า (x) Ix อ่านว่า สำหรับทุก x, x เป็นสิ่งที่พึ่งพาอาศัยกัน

(3) ไม่มีสิ่งใดเที่ยงแท้นิรันดร์ (Nothing is eternal.) เขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า (x) ~Ex อ่านว่าสำหรับทุก x, x ไม่เป็นสิ่งที่เที่ยงแท้นิรันดร์

(4) ไม่มีสิ่งใดเป็นอิสระ (Nothing is free.) เขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า (x) Fx อ่านว่า สำหรับทุก x, x เป็นสิ่งที่ไม่เป็นอิสระ

เราจะเห็นว่า ตัวอย่างข้างบนนี้ทั้งหมดแต่ละตัวอย่างจะระบุถึงกลุ่ม/ชั้น/คุณสมบัติอย่างใดอย่างหนึ่งเพียงกลุ่มเดียวเท่านั้น คือ ตัวอย่างที่ (1) ระบุถึง "perishable things", ตัวอย่างที่ 2 ระบุถึง interdependent things, ตัวอย่างที่ 3 ระบุถึง "eternal things", ตัวอย่างที่ 4 ระบุถึง "free things

3.1.2 ชนิดที่ระบุคุณสมบัติทั้งหมดของกลุ่มหรือชั้นมากกว่าหนึ่ง เวลาเขียนเป็นสัญลักษณ์และอ่านจะต่างไปจากชนิดที่ระบุคุณสมบัติของกลุ่มหรือชั้นของสมาชิกเพียงกลุ่มเดียว คือจะต้องทำให้อยู่ในรูปของเงื่อนไขเท่านั้น เขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า (x) (Xx ⊃ Yx) อ่านว่า สำหรับทุก x, ถ้า x เป็น X แล้ว x ก็จะเป็น Y ตัวอย่างเช่น

(1) มนุษย์ทุกคนเป็นสัตว์ (All men are animals.) เขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า (x) (Mx ⊃ Ax) อ่านว่า สำหรับทุก x, ถ้า x เป็นมนุษย์แล้ว x ก็จะเป็นสัตว์

(2) ไม่มีสุนัขตัวใดเป็นสุกร (No dogs are pigs.) เขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า (x) (Dx ⊃ ~Px) อ่านว่า สำหรับทุก x, ถ้า x เป็นสุนัขแล้ว x ก็จะไม่เป็นสุกร

(3) มนุษย์ทุกคนเป็นสิ่งที่ต้องตาย (All humans are mortal.) เขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า (x) (Hx ⊃ Mx) อ่านว่า สำหรับทุก x, ถ้า x เป็นมนุษย์แล้ว x ก็จะเป็นสิ่งที่ต้องตาย

(4) น้ำตาลมีรสหวาน (Sugar tastes sweet.) เขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า (x) (Sx ⊃ Tx) อ่านว่า สำหรับทุก x, ถ้า x เป็นน้ำตาลแล้ว x ก็จะเป็นสิ่งที่มีรสหวาน

(5) ไม่มีเหตุการณ์ใดเกิดโดยไม่มีสาเหตุ (No events have no causes.) เขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า (x) (~Ex ⊃ ~Cx) อ่านว่า สำหรับทุก x, ถ้า x เป็นเหตุการณ์แล้ว x ก็จะเป็นสิ่งที่เกิดโดยไม่มีสาเหตุ

เราจะเห็นว่า ตัวอย่างข้างบนนี้ทั้งหมดแต่ละตัวอย่างจะระบุถึงกลุ่ม/ชั้น/คุณสมบัติมากกว่าหนึ่ง คือ ตัวอย่างที่ (1) ระบุถึงกลุ่มของมนุษย์ "Men" และกลุ่มของสัตว์ (Animals), ตัวอย่างที่ 2 ระบุถึงกลุ่มของสุนัข (Dogs) และกลุ่มของสุกร (Pigs), ตัวอย่างที่ 3 ระบุถึงกลุ่มของมนุษย์ (Humans) และกลุ่มของสิ่งที่ต้องตาย (Mortal things), ตัวอย่างที่ 4 ระบุถึงกลุ่มของน้ำตาล (Sugar) และกลุ่มของสิ่งที่มีรสหวาน (Sweet tasted things), ตัวอย่างที่ 5 ระบุถึงกลุ่มของเหตุการณ์ (Events) และกลุ่มของสาเหตุ (Causes)

3.2 ประพจน์บ่งปริมาณบางส่วน คือ ประพจน์ที่ระบุถึงคนบางคน สัตว์บางตัว พืชบางชนิดหรือสิ่งบางสิ่ง ไม่เฉพาะเจาะจงว่าจะต้องเป็นคนไหน สัตว์ตัวไหน พืชต้นไหน หรือสิ่งของสิ่งไหน แต่ก็ไม่ใช่คนทุกคน สัตว์ทุกตัว พืชทุกชนิดหรือสิ่งของทุกสิ่ง สามารถใช้สัญลักษณ์แทนคือ (∃x) อ่านว่า มี x อย่างน้อยหนึ่งตัว ซึ่ง x นั้น.(There is at least one x such that x...)ในตรรกศาสตร์ดั้งเดิมของอริสโตเติล

ประพจน์บ่งปริมาณบางส่วนนี้ เรียกว่า ประพจน์ I ยืนยันบางส่วน และประพจน์ O ปฏิเสธบางส่วน มี 2 ชนิด คือ

3.2.1 ชนิดที่ระบุคุณสมบัติบางส่วนของกลุ่มหรือชั้นเพียงกลุ่มเดียวหรือชั้นเดียว ตัวอย่างเช่น

(1) มีสิงโตอยู่ (Lions exist.) เขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า $(\exists x)$ Lx อ่านว่า มี x อย่างน้อยหนึ่งตัว ซึ่ง x นั้นเป็นสิงโต

(2) ไม่มีเงือกอยู่จริง (There are not Mermaids.) เขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า $(\exists x) \sim Mx$ อ่านว่า มี x อย่างน้อยหนึ่งตัว ซึ่ง x นั้นไม่ใช่นางเงือก

(3) ม้าเขาเดียวไม่ได้มีอยู่จริง (Unicorn do not exist.) เขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า $(\exists x) \sim Ux$ อ่านว่า มี x อย่างน้อยหนึ่งตัว ซึ่ง x นั้นไม่ใช่ม้าเขาเดียว

(4) มีม้าอยู่หลายตัว (There are horses.) เขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า $(\exists x)$ Hx อ่านว่า มี x อย่างน้อย หนึ่งตัว ซึ่ง x นั้นเป็นม้า

ตัวอย่างข้างบนเหล่านี้ จะระบุถึงกลุ่มของสัตว์ภายในกลุ่มเพียงบางตัว แต่ไม่ใช่ทั้งหมด คือ ตัวอย่างที่ (1) ระบุถึงสิงโต (Lions) เพียงบางตัวในกลุ่มของสิงโตทั้งหมด ตัวอย่างที่ (2) ระบุถึงเงือกบางตัวในกลุ่มของเงือก (Mermaids) ทั้งหมด ตัวอย่างที่ (3) ระบุถึงม้าเขาเดียวเพียงบางตัวในกลุ่มของม้าเขาเดียว (Unicorn) ทั้งหมด ตัวอย่างที่ (4) ระบุถึงม้าบางตัวในกลุ่มของม้า (Horses) ทั้งหมด

3.2.1 ชนิดที่ระบุคุณสมบัติบางส่วนของกลุ่มหรือชั้นมากกว่ากลุ่มเดียวหรือชั้นเดียว ตัวอย่างเช่น

(1) ครูบางคนเป็นนักเขียน (Some teachers are writers.) เขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า $(\exists x)$ (Tx . Wx) อ่านว่า มี x อย่างน้อยหนึ่งตัว ซึ่ง x เป็นครู และ x นั้นเป็นนักเขียน

(2) งูบางชนิดไม่มีพิษ (Some snakes are not poisonous.) เขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า $(\exists x)$ (Sx . $\sim$Px) อ่านว่า มี x อย่างน้อยหนึ่งตัว ซึ่ง x เป็นงู แต่ x นั้นไม่มีพิษ

(3) พระหลายรูปบิดเบือนพระธรรมวินัย (Many monks distort the Dhamma and Vinaya.) เขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า $(\exists x)$ (Mx . Dx) อ่านว่า มี x อย่างน้อยหนึ่งตัว ซึ่ง x เป็นพระ แต่ x นั้นเป็นผู้บิดเบือนพระธรรมวินัย

(4) มีคนหลายคนที่ไม่เชื่อเรื่องพระเจ้า (There are many men who do not believe in God.) เขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า $(\exists x)$ (Mx . $\sim$Bx) อ่านว่า มี x อย่างน้อยหนึ่งตัว ซึ่ง x เป็นคน แต่ x นั้นเป็นผู้ไม่เชื่อเรื่องพระเจ้า

(5) นักศึกษาบางคนขยันเรียน (Some students are industrious.) เขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า $(\exists x)$ (Sx . Ix) อ่านว่า มี x อย่างน้อยหนึ่งตัว ซึ่ง x เป็นนักศึกษา และ x นั้นเป็นคนขยันเรียน

ตัวอย่างข้างบนทั้ง 5 ข้อเหล่านี้ ระบุถึงสมาชิกบางส่วนของกลุ่มหรือชั้น แต่ไม่ใช่ทั้งหมด มากกว่าหนึ่งหนึ่งกลุ่มหรือหนึ่งชั้น คือ ตัวอย่างที่ (1) ระบุถึง สมาชิกบางส่วนของครู (Teachers) และสมาชิกบางส่วนของนักเขียน (Writers) ตัวอย่างที่ (2) ระบุถึงสมาชิกบางส่วนของงู (Snakes) และสมาชิกบางส่วนของสิ่งที่มีพิษ (Poisonious) ตัวอย่างที่ (3) ระบุถึงสมาชิกบางส่วนของพระ (Monks) และสมาชิกบางส่วนของผู้บิดเบือนพระธรรมวินัย (Distort the Dhamma and Vinaya) ตัวอย่างที่ 4 ระบุถึงสมาชิก

บางส่วนของคน (Men) และสมาชิกบางส่วนของผู้ไม่เชื่อเรื่องพระเจ้า (not believe in God) ตัวอย่างที่ 5 ระบุถึงสมาชิกบางส่วนของนักศึกษา (Students) และระบุถึงสมาชิกบางส่วนของผู้ขยัน (Industriuos)

ในชีวิตประจำวัน เมื่อเราใช้ประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ เราอาจจะละตัวบ่งปริมาณไว้ในฐานที่เข้าใจก็ได้ เช่น เมื่อกล่าวถึง “นกมีปีก” ย่อมหมายถึง “นกทุกตัวมีปีก” แต่ถ้ากล่าวถึง “คนสวมแว่นตา” มักหมายถึง “คนบางคนสวมแว่นตา” เป็นต้น

12.4 ตัวแปรอิสระ และตัวแปรติด

ในตรรกศาสตร์ภาคขยายนี้ จะมีตัวแปรที่สำคัญอยู่ 2 ตัวแปร คือ ตัวแปรอิสระ (Free variable) และตัวแปรติด (Bound variable)

ตัวแปรอิสระ คือ ตัวแปรที่ไม่มีตัวบ่งปริมาณกำกับอยู่หน้าตัวแปรนั้น ตัวอย่างเช่น

(ก) ก. เป็นสิ่งที่แตกทำลายได้

(ข) x ไม่เป็นสิ่งที่มีอยู่ชั่วนิรันดร์

ในตัวอย่างทั้งสองนี้ ตัวแปร คือ ก. และ x ไม่ได้มีตัวบ่งปริมาณกำกับอยู่ข้างหน้าแต่อย่างใด ดังนั้น เราจึงเรียกตัวแปรเหล่านี้ว่า ตัวแปรอิสระ

ตัวแปรติด คือ ตัวแปรที่มีตัวบ่งปริมาณกำกับหน้าตัวแปรนั้น ตัวอย่างเช่น

(ก) (x) (x is intelligent.)

Or (x) (Ix)

(ข) (∃x) (x is not dirty.)

Or (∃x) (~Dx)

ในตัวอย่าง (ก) และ (ข) ข้างบนนี้ จะพบว่าตัวแปร x มีตัวบ่งปริมาณกำกับอยู่ข้างหน้า คือ (x) และ (∃x) ตามลำดับ และตัวแปร x ดังกล่าวเกิดขึ้น 2 ครั้ง คือ ครั้งแรกเป็นตัวบ่งปริมาณ นั่นคือ (x) และ (∃x) ครั้งที่สองเกิดในฟังชั่นของประพจน์ คือ (Ix) และ (~Dx) เพราะฉะนั้น x จึงเป็นตัวแปรติด

กล่าวโดยย่อก็คือว่า ถ้าเป็นเพียงฟังชั่นของประพจน์ธรรมดาก็จะประกอบด้วยตัวแปรอิสระ แต่ถ้าเป็นฟังชั่นของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณก็จะมีอย่างน้อยหนึ่งตัวที่เป็นตัวแปรติด

ฟังชั่นของประพจน์ต่อไปนี้ล้วนประกอบด้วยตัวแปรเฉพาะที่เป็นอิสระ เพราะแต่ละตัวไม่มีตัวบ่งปริมาณกำกับยู่ข้างหน้า

(ก) Ex

(ข) $Dx \supset Mx$

(ค) Bx . Cx

ส่วนตัวอย่างฟังชั่นของประพจน์ต่อไปนี้ x จะเป็นตัวแปรอิสระ เพราะ x ไม่ได้ถูกกำกับด้วยตัวบ่งปริมาณ x อยู่ข้างหน้า

(ก) (y) $(Ax \supset Bx)$

(ข) (∃y) (Cx . Dx)

(ค) $(\exists z)(Ex \supset \sim Dx)$

จากตัวอย่างข้างบนนี้ จะพบว่า ตัวบ่งปริมาณคือ (y), (∃y) และ (∃z) ไม่ใช่ตัวบ่งปริมาณของ x, x จึงไม่อยู่ในขอบเขตของตัวบ่งปริมาณเหล่านี้ ดังนั้น x จึงเป็นตัวแปรอิสระ

ส่วนตัวอย่างต่อไปนี้ จะมีทั้งตัวแปรติดบางส่วน และตัวแปรติดทั้งหมด

(ก) $(x)(Ax \supset Bb)$

(ข) $(\exists y)(Cx \,.\, Dy)$

(ค) $(\exists z)(Ez \supset \sim Dx)$

(ง) $(x)(Ax \supset Bx)$

(จ) $(x)(Ax \supset \sim Bx)$

(ฉ) $(\exists x)(Ax \,.\, Bx)$

(ช) $(\exists x)(Ax \,.\, \sim Bx)$

ตัวอย่างในข้อ (ก) ตัวแปร คือ Ax เป็นตัวแปรติด เพราะมีตัวบ่งปริมาณคือ (x) กำกับอยู่ข้างหน้า Ax จึงอยู่ในขอบเขตของ (x) ส่วน Bb ในตัวอย่างเดียวกันเป็นตัวแปรอิสระ เพราะไม่ได้อยู่ในขอบเขตของตัวบ่งปริมาณ (x) แต่อย่างใด

ตัวอย่างในข้อ (ข) ก็มีลักษณะเช่นเดียวกับ (ก) คือมีทั้งตัวแปรติดและตัวแปรอิสระ นั่นคือ Cx เป็นตัวแปรอิสระ เพราะไม่อยู่ในขอบเขตของตัวบ่งปริมาณ (∃y) แต่ตัวแปร Dy เป็นตัวแปรติด เพราะอยู่ในขอบเขตของตัวบ่งปริมาณบางส่วนคือ (∃y)

ตัวอย่างในข้อ (ค) ก็มีลักษณะเช่นเดียวกับ (ก) และ (ข) คือมีทั้งตัวแปรติดและตัวแปรอิสระ นั่นคือ Ez เป็นตัวแปรติด เพราะอยู่ในขอบเขตของตัวบ่งปริมาณ (∃z) แต่ตัวแปร ~Dx เป็นตัวแปรอิสระ เพราะไม่อยู่ในขอบเขตของตัวบ่งปริมาณบางส่วนคือ (∃z)

ส่วนตัวอย่างในข้อ (ง) – (ช) มีตัวแปรที่ติดทั้งหมด เพราะตัวแปรทั้งหมดในแต่ละข้ออยู่ภายใต้ขอบเขตของตัวบ่งปริมาณทั้งสิ้น

12.5 การตีความตัวบ่งปริมาณ (P. Balasubramanian, 1977, pp. 97-99).

ตัวบ่งปริมาณใช้เพื่อแสดงความหมายของความเป็นสากลคือทั่วไปสำหรับสมาชิกทั้งหมดในกลุ่มหรือชั้นเดียวกัน หรือเฉพาะสิ่งใดสิ่งหนึ่งหรือบางกลุ่มบางชั้นเท่านั้น ดังนั้น สัญลักษณ์ (x) จึงใช้สำหรับญัตติที่บ่งบอกถึงความเป็นสากลทั้งหมด และสัญลักษณ์ (∃x) ใช้สำหรับญัตติที่บ่งปริมาณบางส่วนหรือบ่งถึงความมีอยู่เท่านั้น

ในประพจน์ทั่วไป ตัวอย่าง เช่น “มนุษย์ทุกคนเป็นสัตว์ที่ต้องตาย” (All men are mortal.) คำว่า “ทั้งหมด (All)” หมายถึงรวมถึงทุกสิ่งทุกอย่างที่มีอยู่ในจักรวาล เช่น ชนิดและประเภทของมนุษย์ เป็นต้น ในประพจน์บางส่วนหรือประพจน์ที่แสดงความมีอยู่ ตัวอย่างเช่น “นักศึกษาบางคนหัวดี” (Some students are intelligent.) คำว่า “บาง (Some)” มีความหมายว่า มีอยู่อย่างน้อยหนึ่งหน่วยในปริมณฑลหรือขอบเขตของนักศึกษา ที่นักศึกษาเป็นคนหัวดี เป็นต้น หากต้องการแสดงตัวเฉพาะเพื่ออ้างถึงประพจน์ที่มีจำนวน

เฉพาะ หรือประพจน์ที่มีจำนวนเป็นสากล เราต้องตีความประพจน์เหล่านั้นให้อยู่ในลำดับของประโยคข้อความรวม (ใช้ตัวเชื่อม "และ") ในกรณีของ (x) และให้อยู่ในลำดับของประโยคข้อความเลือก (ใช้ตัวเชื่อม "หรือ") ในกรณีของ (∃x)

เพื่อให้เข้าใจมากยิ่งขึ้น ขอให้พิจารณาตัวอย่างที่ว่า "มนุษย์ทุกคนเป็นสัตว์ที่ต้องตาย" ซึ่งแปลเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า (x) (Hx ⊃ Mx)

(x) (Hx ⊃ Mx) มีความหมายว่า "สำหรับ x ทั้งหมด ถ้า x มีคุณสมบัติ H แล้ว x มีคุณสมบัติ M" เราไม่สามารถทราบได้ว่าจำนวนที่แท้จริงที่ครอบคลุมคำว่า "ทั้งหมด" นั้นมีเท่าไหร่ ดังนั้น เราจึงตีความหมายคำว่า "ทั้งหมด" ว่า ถ้า x เป็น H แล้ว x เป็น M และ ถ้า y เป็น H แล้ว y เป็น M เป็นต้น ต่อไปเรื่อยๆ จนกระทั่งถึงสิ่งเฉพาะ N

ดังนั้น ตัวอย่างที่ว่า "มนุษย์ทุกคนเป็นสัตว์ที่ต้องตาย" ซึ่งแปลเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า (x) (Hx ⊃ Mx) สามารถตีความได้ว่า

หาก	a	เป็นมนุษย์ แล้ว	a	ต้องเป็นสัตว์ที่ต้องตาย และ
หาก	b	เป็นมนุษย์ แล้ว	b	ต้องเป็นสัตว์ที่ต้องตาย และ
หาก	c	เป็นมนุษย์ แล้ว	c	ต้องเป็นสัตว์ที่ต้องตาย และ
หาก	d	เป็นมนุษย์ แล้ว	d	ต้องเป็นสัตว์ที่ต้องตาย และ
หาก	e	เป็นมนุษย์ แล้ว	e	ต้องเป็นสัตว์ที่ต้องตาย และ
..........................ฯลฯ...............................				
หาก	n	เป็นมนุษย์ แล้ว	n	ต้องเป็นสัตว์ที่ต้องตาย

ในกรณีนี้ เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของประโยคสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$(x)\,(Hx \supset Mx) \quad = \quad (Ha \supset Ma) \,.\, (Hb \supset Mb) \,.\, (Hc \supset Mc) \,.\, (Hd \supset Md) \,.\, (He \supset Me) \ldots\ldots (Hn \supset Mn)$$

ข้อสังเกต: ตัวอักษร a, b, c, d, e,....n เป็นต้น แทนจำนวนเฉพาะแต่ละตัว เมื่อเราอ้างถึงจำนวนเฉพาะแต่ละตัวในปริมณฑลของสิ่งที่เรากำลังพูดถึงตามลำดับแล้ว จึงไม่จำเป็นต้องใส่ตัวบ่งปริมาณอีก

ในกรณีของประพจน์บางส่วนหรือประพจน์แสดงความมีอยู่ เนื่องจากเรายังไม่ทราบว่ากรณีที่เป็นตัวแทนที่มีความสอดคล้องกับประพจน์ที่ยังเป็นปัญหาอยู่ เราตีความประพจน์บางส่วนหรือประพจน์แสดงความมีอยู่นั้นว่าเป็น a หรือ b หรือ c หรือ d หรือ e..... หรือ n ก็ได้ ตัวอย่างเช่น "นักศึกษาบางคนหัวดี" ตามหลักของประพจน์บางส่วนหรือประพจน์แสดงความมีอยู่ เราจะต้องตีความประพจน์ที่ว่า "นักศึกษาบางคนหัวดี" ว่า "จะต้องมีนักศึกษาอย่างน้อยหนึ่งคนที่หัวดี" แต่เราไม่รู้ว่าใครคือนักศึกษาคนนั้นที่หัวดี ดังนั้น เพื่อให้สื่อความหมายไปในทางเดียวกัน เราต้องตีความประพจน์ I ยืนยันบางส่วนที่ว่า "นักศึกษาบางคนหัวดี" ซึ่งแปลเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า (∃x) (Sx . Ix)ดังนี้

"a เป็นนักศึกษา และ a หัวดี" หรือ

"b เป็นนักศึกษา และ b หัวดี" หรือ

"c เป็นนักศึกษา และ c หัวดี" หรือ

"d เป็นนักศึกษา และ d หัวดี" หรือ

....

"n เป็นนักศึกษา และ n หัวดี"

ในกรณีนี้ เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$(\exists x)\ (Sx\ .\ Px) \quad = \quad (Sa\ .\ Ia)\ v\ (Sb\ .\ Ib)\ v\ (Sc\ .\ Ic)\ v\ (Sd\ .\ Id)\ v\ (Se\ .\ Ie).....$

$.......v\ (Sn\ .\ In)$

12.6 กฎการถอดและการใส่ปริมาณ

ในตรรกศาสตร์ภาคขยายจะมีวิธีการพิเศษต่างไปจากตรรกศาสตร์ว่าด้วยญัตติ คือ จะมีญัตติที่บ่งปริมาณ จึงจำเป็นอย่างยิ่งที่ก่อนจะทำการพิสูจน์ต้องถอดและใส่ปริมาณเสียก่อน

เหตุผลที่ต้องถอดและใส่ปริมาณ เพราะต้องการให้ตัวแปรเป็นอิสระ (Free) ถ้ายังไม่ถอด ตัวแปรนั้นก็ถือว่ายังติดอยู่ (Bound) หรือเวลาที่ถอดเพื่อการพิสูจน์เสร็จแล้ว ถ้าข้อสรุปมีตัวบ่งปริมาณ ก็ต้องใส่ปริมาณเข้าไปด้วยจึงจะทำให้การพิสูจน์ถูกต้อง

สำหรับกฎที่ใช้ถอดปริมาณนั้น มีทั้งหมด 4 กฎ คือ

(1) กฎการถอดปริมาณสากล (Universal Instantiation = UI) มีว่า

$$\frac{(x)\ Xx}{\therefore\ Xa} \qquad\qquad \frac{(x)\ (Xx \supset Yx)}{\therefore\ Xa \supset Ya}$$

(x) หมายถึง ตัวบ่งปริมาณสากล

X หมายถึง ตัวแปรเฉพาะ (Individual Variable)

a หมายถึง ตัวคงที่เฉพาะ (Individaul Constant)

ความหมาย สมาชิกของ x มีจำนวนมากมายและรวมเอาสมาชิก"ทั้งหมด" ของ x แต่เมื่อเราถอดออกมา เรายกเอาสมาชิกของ x มาเป็นตัวอย่างเพียงตัวเดียว คือ a (สมาชิก x อาจมี b, c, d, e........)

ข้อสังเกต: ตัวคงที่จะต้องใช้อักษรตัวเดียวกัน เช่น $(x)\ (Fx \supset Gx)$ ถอดเป็น $Fa \supset Ga$ ห้ามเป็น $Fa \supset Gb$ (ต้องเป็นตัวเดียวกัน)

(2) กฎการใส่ปริมาณสากล (Universal Generalization = UG) มีว่า

$$\frac{Xa}{\therefore\ (x)\ Xx} \qquad\qquad \frac{Xa \supset Ya}{\therefore\ (x)\ (Xx \supset Yx)}$$

ข้อบังคับ: เมื่อใส่ปริมาณสากลแล้ว จะต้องไม่มีตัวคงที่ใดๆ เป็นอิสระ คือ จะต้องกลายเป็นตัวแปรเดียวกันหมด

กฎนี้ใช้เมื่อเราพิสูจน์เสร็จตามขั้นตอนแล้ว บทสรุปที่เราต้องการพิสูจน์เป็นสากล เช่น

$\therefore$ (x) (Ax $\supset$ Bx)

(3) กฎการถอดปริมาณบางส่วน (Existential Instantiation = EI) มีว่า

$$\frac{(\exists x)\ Xx}{\therefore\ Xa} \qquad \frac{(\exists x)\ (Xx \,.\, Yx)}{\therefore\ Xa \,.\, Ya}$$

ข้อบังคับ: ถ้าในโจทย์มีทั้งญัตติสากลและญัตติบางส่วน เวลาถอดปริมาณให้ถอดปริมาณบางส่วนก่อนเสมอ และถ้ามีญัตติบางส่วนตั้งแต่ 2 ขึ้นไป เวลาถอดจะต้องใช้อักษรที่เป็นตัวคงที่ต่างกัน

(4) กฎการใส่ปริมาณบางส่วน (Existential Generalization = EG) มีว่า

$$\frac{Xa}{\therefore\ (\exists x)\ Xx} \qquad \frac{(Xa \,.\, Ya)}{\therefore\ (\exists x)\ (Xx \,.\, Yx}$$

12.7 ตัวอย่างการพิสูจน์ความสมเหตุสมผล

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างวิธีพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของตรรกศาสตร์ภาคขยายที่มีตัวบ่งปริมาณ

ตัวอย่างที่ 1

แพทย์ทุกคนเป็นผู้ถือหุ้น (All directors are shareholders.)

ผู้ถือหุ้นทุกคนเป็นผู้มีสิทธิ์ออกเสียงในการประชุมสามัญประจำปี (All shareholders are entitled to vote at the AGM.)

ดังนั้น แพทย์ทุกคนเป็นผู้มีสิทธิ์ออกเสียงในการประชุมสามัญประจำปี (Therefore, all directors are entitled to vote at the AGM.)

วิธีทำ

1. (x) (Dx $\supset$ Sx)	
2. (x) (Sx $\supset$ Vx)	/ $\therefore$ (x) (Dx $\supset$ Vx)
3. Da $\supset$ Sa	1. UI
4. Sa $\supset$ Va	2. UI
5. Da $\supset$ Va	3, 4 H.S.
6. (x) (Dx $\supset$ Vx)	5 UG

ตัวอย่างที่ 2

โปรตีนบางชนิดมีพิษ (Some Proteins are poisonous.)

โปรตีนทุกชนิดมีไนโตรเจน (All proteins contain nitrogen.)

ดังนั้น สารที่มีไนโตรเจนบางชนิดมีพิษ (Therefore, some substances containing nitrogen are poisonous.)

วิธีทำ

1. ($\exists$x) (Px . Vx)	
2. (x) (Px $\supset$ Nx)	/ $\therefore$ ($\exists$x) (Nx . Vx)

3. Pa . Va	1. EI
4. Pa $\supset$ Na	3. UI
5. Pa	4. Simp.
6. Na	5, 6 M. P.
7. Va . Pa	3 Com.
8. Va	7 Simp.
9. Na . Va	7, 9 Conj.
10. $(\exists x)$ (Nx . Vx)	10. EG

ตัวอย่างที่ 3

นักวาดภาพทุกคนเป็นศิลปิน, มีนักวาดภาพหลายคน, ดังนั้น จึงมีศิลปินหลายคน (All painters are artists. There are painters. Therefore, there are artists.)

วิธีทำ

1. (x) (Px $\supset$ Ax)	
2. $(\exists x)$ (Px)	/ $\therefore$ $(\exists x)$ (Ax)
3. Pa	2. EI
4. Pa $\supset$ Aa	1. UI
5. Aa	4, 3 M. P.
6. $(\exists x)$ (Ax)	5. EG

ตัวอย่างที่ 4

มนุษย์ทุกคนเป็นสัตว์ที่ต้องตาย

นักศึกษาทุกคนเป็นมนุษย์

เพราะฉะนั้น นักศึกษาทุกคนเป็นสัตว์ที่ต้องตาย

วิธีทำ

1. (x) (Hx $\supset$ Mx)	
2. (x) (Sx $\supset$ Hx)	/ $\therefore$ (x) (Sx $\supset$ Mx)
3. Hc $\supset$ Mc	1. UI
4. Sc $\supset$ Hc	1. UI
5. Sc $\supset$ Mc	4, 3 H. S.
6. (x) (Sx $\supset$ Mx)	5. UG

ตัวอย่างที่ 5

1. [$(\exists x)$ Ax . $(\exists x)$ Bx] $\supset$ Cj	
2. $(\exists x)$ (Ax . Dx)	
3. $(\exists x)$ (Bx . Ex)	/ $\therefore$ Cj

4. Am . Dm	2 EI.
5. Bn . En	3 EI.
6. Am	4 Simp.
7. Bn	5 Simp.
8. $(\exists x)$ Ax	6 EG
9. $(\exists x)$ Bx	7 EG
10. $(\exists x)$ Ax . $(\exists x)$ Bx	8, 9 Conj.
11. Cj	1, 10 MP.

ตัวอย่างที่ 6

1. $(\exists x)$ Fx $\supset$ (x) (Gx $\supset$ Fx)
2. $(\exists x)$ Hx $\supset$ (x) (Fx $\supset$ Hx)

3. $(\exists x)$ (Fx . Hx)	/ $\therefore$	(x) (Gx $\supset$ Hx)
4. Fb . Hb	3 EI	
5. Fb	4 Simp.	
6. $(\exists x)$ Fx	5 EG	
7. (x) (Gx $\supset$ Fx)	1, 6 M.P.	
8. Hb	4 Com. + Simp.	
9. $(\exists x)$ Hx	8 EG	
10. (x) (Fx $\supset$ Hx)	2, 9 M.P.	
11. Gc $\supset$ Fc	7 UI	
12. Fc $\supset$ Hc	10 UI	
13. Gc $\supset$ Hc	11, 12 H.S.	
14. (x) (Gx $\supset$ Hx)	13 UG	

แบบฝึกหัดบทที่ 12

ก. จงแปลงประพจน์ต่อไปนี้ให้เป็นสัญลักษณ์ตามวิธีในตรรกศาสตร์ภาคขยาย

1. วินัยเป็นคนขยัน (Vinai is industrious.)
2. มนุษย์เป็นสัตว์ที่มีเหตุผล (Men are rational.)
3. นางเงือกมีอยู่ (Mermaids exist.)
4. สรรพสิ่งย่อมเปลี่ยนแปลง (Everything is changeable.)
5. ถ้าวิภาถูกแล้ว กานดาก็ต้องผิด (If Vipha is right, then Kanda is wrong.)
6. ไม่มีอะไรที่คงที่เสมอ (Nothing is permanent.)
7. บางสิ่งไม่เคยเปลี่ยนแปลง (Some things do not change.)
8. มนุษย์ทุกคนเป็นสัตว์ที่ต้องตายและนักศึกษาทุกคนเป็นมนุษย์

   (All men are mortal and all students are men.)
9. บอลมีผมสวย (Ball has fair hair.)
10. จระเข้ที่ตัวยาวที่สุดในอัฟริกาตะกละ (The largest crocodile in Africa is greedy.)
11. สุจิราเป็นคุณหมอ (Suchira is a doctor.)
12. โค้ชฟุตบอลที่เก่งที่สุดในประเทศไทยเป็นอาจารย์

    (The best soccer coach in Thailand is a teacher.)
13. บางสิ่งมีสีแดง (Some things are red.)
14. สรรพสิ่งล้วนประกอบมาจากอะตอม (Everything is made of atoms.)
15. มีบางสิ่งบางอย่างที่ไม่ได้ประกอบมาจากอะตอม

    (There is something which is not made of atoms.)
16. มนุษย์เป็นเครื่องวัดสรรพสิ่ง (Man is the measure of all things.)
17. นักกีฬาย่อมแข็งแรง (Kx, Rx)
18. อูฐใช่ว่าจะอดทนไปเสียทุกตัว (Ux, Ox)
19. ช้างส่วนมากจำเก่ง (Cx, Jx)
20. ม้าวิ่งช้าก็มีเหมือนกัน (Mx, Cx)
21. มีแต่คนขาดความเชื่อมั่นเท่านั้นที่อิจฉาเก่ง (Kx, Ix)
22. หาผักสดไม่ได้เสียแล้ว (Vx, Sx)
23. นางสาวอมรรัตน์เป็นนิสิตมหาวิทยาลัยบูรพา (v, N)
24. คุณหมอพรทิพย์ทำแต่ความดี (p, D)
25. อะไรที่ร้อนก็ย่อมจะสุก (Rx, Sx)
26. มีรถยนต์บางชนิดราคาถูกแล้วก็ประหยัดน้ำมันด้วย (Rx, Tx, Px)

27. ผักทุกชนิดน่ากินและให้ประโยชน์ต่อร่างกาย (Px, Nx, Hx)
28. ไม่มีใครเป็นคนดีแล้วจะถูกลงโทษ (Gx, Tx)
29. ใช่ว่าทุกคนที่ได้ชื่อว่าพลเมืองแล้วจะรักชาติ (Px, Rx)
30. ปูม้าและปูทะเลล้วนแต่รสอร่อยทั้งสิ้น (Mx, Tx, Ax)
31. นางนพมาศและขวัญใจจุฬา ฯ ล้วนแต่สวยและน่ารัก (Nx, Kx, Sx, Rx)
32. มีแต่นักปฏิรูปเท่านั้นที่เปลี่ยนโฉมหน้าประวัติศาสตร์ (Nx, Px)
33. คนพิการบางทีก็มีประโยชน์ (Px, Bx)
34. ไม่ใช่ว่านักธุรกิจจะเป็นชาวจีนไปเสียทั้งหมด (Bx, Cx)
35. เครื่องบินแต่ละลำล้วนบินเร็วและให้ความสะดวก (Px, Fx, Cx)

ข. จงถอดข้อความต่อไปนี้เป็นสัญลักษณ์ตามหลักตรรกศาสตร์ภาคขยาย แล้วพิสูจน์ความสมเหตุสมผลตามกฎการถอดและการใส่ปริมาณ

1. ผู้นำทุกคนเป็นคนที่มีความเชื่อมั่นในตัวเอง, ไม่มีคนที่มีความเชื่อมั่นในตัวเองเป็นคนไม่มีความกล้าหาญ, ดังนั้น ไม่มีใครที่ไม่มีความกล้าหาญจะเป็นผู้นำได้

2. ไม่มีคนขี้อายคนใดประสบความสำเร็จในการค้าขาย, ปัญญาชนบางคนเป็นคนขี้อาย, เพราะฉะนั้น ปัญญาชนบางคนจึงไม่ประสบความสำเร็จ

3. ผู้แสดงทุกคนเป็นนักเขียน, มีผู้แสดงอยู่หลายคน, เพราะฉะนั้น จึงมีนักเขียนอยู่หลายคน

4. ไม่มีนักแต่งนวนิยายคนใดมีชื่อเสียง, นักเขียนบางคนเป็นนักแต่งนวนิยาย, ดังนั้น นักเขียนบางคนจึงไม่มีชื่อเสียง

5. ไม่มีผู้สนับสนุนประชาธิปไตยคนใดเป็นฟาสซิสท์หรือคอมมิวนิสต์, ผู้ที่เชื่อว่ามนุษย์มีความเสมอภาคกันทุกคนเป็นผู้สนับสนุนประชาธิปไตย, ดังนั้น ไม่มีผู้ที่เชื่อว่ามนุษย์มีความเสมอภาคกันคนใดเป็นฟาสซิสท์

6. นักวิทยาศาสตร์ทุกคนเชื่อมั่นในความจริง, ไม่มีสื่อสารมวลชนคนใดเชื่อมั่นในความจริง ดังนั้น จึงไม่มีนักวิทยาศาสตร์คนใดเป็นนักสื่อสารมวลชน

7. สัตว์เลี้ยงลูกด้วยนมทุกชนิดเป็นสัตว์เลือดอุ่น, ไม่มีนกตัวใดที่เลี้ยงลูกด้วยนม ดังนั้น จึงไม่มีนกตัวใดเป็นสัตว์เลือดอุ่น

8. ไม่มีนักอนุรักษ์ธรรมชาติคนใดเป็นคนที่ไม่ชอบการสังเกต แต่มีคนที่ไม่ชอบการสังเกตบางคนสนใจสัตว์ ดังนั้น คนบางคนที่ไม่สนใจในสัตว์จึงไม่เป็นนักอนุรักษ์

9. นักปฏิรูปไม่มีวันจะอยู่เป็นสุข มีแต่นักปฏิรูปเท่านั้นที่เปลี่ยนโฉมหน้าประวัติศาสตร์ เพราะฉะนั้น จะหาคนเปลี่ยนโฉมหน้าประวัติศาสตร์อยู่เป็นสุขไม่มี

10. คนพิการบางทีก็มีประโยชน์ สิ่งที่มีประโยชน์ย่อมมีค่า เพราะฉะนั้น ไม่ใช่คนพิการทุกคนจะไร้ค่า

ค. จงพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้ออ้างเหตุผลต่อไปนี้ ตามกฎการถอดและการใส่ปริมาณ

1. (1) (x) (Bx ⊃ ~Gx)

   (2) (∃x) (Sx . ~Gx) /∴ (∃x) (Sx . ~Gx)

2. (1) (x) (Rx ⊃ Bx)

   (2) (∃x) ~Bx /∴ (∃x) ~Rx

3. (1) (x) (Px ⊃ Qx) ⊃ (∃x) (Rx . Sx)

   (2) (x) (Px ⊃ Sx) . (x) (Sx ⊃ Qx) /∴ (∃x) Sx

4. (1) (x) (Ax ⊃ Bx)

   (2) (x) (Bx ⊃ Cx) /∴ (x) (Ax ⊃ Cx)

5. (1) (x) [(Ax ⊃ (Bx v Cx)]

   (2) Ag . ~Bg /∴ Cg

6. (1) (x) [(Jx ⊃ (Kx . Lx)]

   (2) (∃y) ~Ky /∴ (∃z) ~Jz

7. (1) (x) (Ax ⊃ (Bx v Cx)

   (2) (∃x) (Ax . ~Cx) /∴ (∃x) Bx

8. (1) (x) [(Bx v Ax)

   (2) (x) (Bx ⊃ Ax) /∴ (x) Ax

9. (1) (∃x) Ax ⊃ (x) (Bx ⊃ Cx)

   (2) Am . Bm /∴ Cm

10. (1) (∃x) Ax ⊃ (x) Bx

    (2) (∃x) Cx ⊃ (∃x) Dx

    (3) An . Cn /∴ (∃x) (Bx . Dx)

11. (1) (∃x) Ax ⊃ (x) (Cx ⊃ Bx)

    (2) (∃x) (Ax v Bx)

    (3) (x) (Bx ⊃ Ax) /∴ (x) (Cx ⊃ Ax)

12. (1) (∃x) Ax ⊃ (x) (Bx ⊃ Cx)

    (2) (∃x) Dx ⊃ (∃x) ~Cx

    (3) (∃x) (Ax . Dx) /∴ (∃x) ~Bx

บรรณานุกรม

กีรติ บุญเจือ. (2531). *ตรรกวิทยาสัญลักษณ์เบื้องต้น*. กรุงเทพฯ: ไทยวัฒนาพานิช.

จำนงค์ ทองประเสริฐ. (2530). *ตรรกศาสตร์ ศิลปะแห่งการนิยามความหมายและการใช้เหตุผล* (พิมพ์ครั้งที่ 9).กรุงเทพฯ: มหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย.

ไม้ สงวนสกุล. (2541). *ตรรกวิทยาสัญลักษณ์เบื้องต้น*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

วิทยา ศักยาภินันท์. (2554). *ตรรกศาสตร์: ศาสตร์แห่งการใช้เหตุผล* (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

โสรัจจ์ หงศ์ลดารมภ์. (2544). *ตรรกวิทยาสัญลักษณ์*. กรุงเทพฯ: โครงการเผยแพร่ผลงานทางวิชาการ คณะอักษรศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อมร โสภณวิเชษฐวงษ์. (2531). *ตรรกวิทยานิรนัย* (พิมพ์ครั้งที่ 8). กรุงเทพฯ: หจก. โรงพิมพ์อักษรไทย.

Balasubramanian, P. (1977). *An Invitation to Symbolic Logic*. Madras : Rajan & Co.(Printers).

Balasubramanian, P. (1980). *Symbolic Logic and Its Decision Procedures*. Madras: Madras University.

Basson, A.H. and O' Connor, D.J. (1953). *Introduction to Symbolic Logic*. London: University Tutorial Press.

Berkeley, Edmund Callis. (1952). *A Summary of Symbolic Logic and Its Practical Applications*. New York: Edmund C. Berkeley and Associates.

Blumberg, Albert E. L. (1976). *Logic: A First Course.* New York: Alfred A Knopf.

Bonevac. Daniel. (2003). *Deduction: Introductory Symbolic Logic* (2nd Ed.). Oxford: Blackwell Publishing Company.

Chakraborti, Chhanda. (2007). *Logic: Informal Symbolic Logic And Inductive* (2nd Ed.). New Delhi: Prentice-Hall of India Private Limited.

Carney, James Donald. (1970). *Introduction to Symbolic Logic.* New Jersey: Prentice-Hall.

Cauman, Leigh S. (1998). *First-order Logic: An Introduction.* New York: de Gruyter.

Copi, Irving M. and Cohen, Carl. (1995). *Introduction to Logic* (9th Ed.). New Delhi: Prentice-Hall of India Private Limited.

Copi, Irving M. (1997). *Symbolic Logic* (5th Ed.). New Delhi: Prentice-Hall of India Private Limited.

Forbes, Graeme. (1994). *Modern logic: A Text in Elementary Symbolic Logic.* Oxford: Oxford University Press.

Gabbay, Dov M. and Woods, John (Ed.). (2004). *Handbook of the History of Logic Vollume 3: The Rise of Modern Logic from Leibniz to Frege.* Amsterdam: Elsevier.

Gensler, Harry J. (2002). *Introduction to Logic.* London: Routledge.

Gustason, William and Ulrich, Dolph E. (1989). *Elementary Symbolic Logic* (2nd Ed.). Illinois: Waveland Press, Inc.

Guttenplan and Tamney. (1971). *Logic : A Comprehensive Introduction*. New York: Basic Books Inc.

Haaparanta, Leila (Ed.). (2009). *The Development of Modern Logic*. New York: Oxford University Press.

Hardegree, Gary M. (1994). *Symbolic logic: A First Course* (2nd Ed.). New York: McGraw-Hill.

Irving, Lewis Clarence. (2009). *A Survey of Symbolic Logic*. Charleston: Bibliobazar.

Jain, Krishna. (1998). *Logic: An Introduction*. Delhi: Ajanta Books International.

Jeffrey, Richard C. (1967). *Formal Logic : Its Scope and Limits*. New York: Mc Graw Hill Book Company.

Langer, Susanne K. (1967). *An Introduction to Symbolic Logic*. New York: Dover Publications, Inc.

Lewis, Clarence Irving. (1918). *Survey of Symbolic Logic*. Berkley: University of Califonia Press.

Lewis, Clarence Irving and Langford, Cooper Harold. (1959). *Symbolic logic Vol. 2*. New York: Dover Publications.

Klenk, Virginia. (2008). *Understanding Symbolic Logic* (5th Ed.). New Jersey: Pearson Prentice Hall.

Kneale, William and Kneale, Martha. (1984). *The Development of Logic*. New York: Oxford University Press.

Lover, Robert. (2008). *Elementary Logic for Sorfware Development*. New York: Springer.

Martin, Robert M. (2004). *Introducing Symbolic Logic*. Ontario: Broadview Press.

Mendelson, Elliott. (1997). *Introduction to mathematical logic* (4th Ed.). Florida: Chapman and Hall.

Pollock, John L. (1969). *Introduction to Symbolic Logic*. Austin: Holt, Rinehart and Winston.

Popkin, Richard H. and Stroll, Avrum. (1993). *Philosophy Made Simple*. New York: Doubleday.

Resnik, Michael D. (1970). *Elementary Logic*. New York: McGraw-Hill.

Sainsbury, Mark.(2001). *Logical forms: An Introduction to Philosophical Logic*. (2nd Ed.). Oxford: Blackwell Publisher Limited.

Simpson, R. L. (1998). *Essentials of Symbolic Logic*. Ontario: Broadview Press.

Standley, Gerald B. (1971). *New Methods in Symbolic Logic*. California: Houghton Mifflin.

Thomassi, Pual. (1999). *Logic*. London: Routledge.

Tymoczko, Tom and Henle, Jim. (1995). *Sweet Reason: A Field Guide to Modern Logic*. New York: W. H. Freeman and Company.

Venn, John. (1971). *Symbolic Logic*. New York: Chelsea Publication.