ตัวอย่าง 2.2.11 $(M_n, +)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์ คือ $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

เนื่องจาก

$(M_n, +)$ เป็นกึ่งกรุป จากตัวอย่าง 2.1.11 และ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

สำหรับทุก $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in M_n$

ดังนั้น $(M_n, +)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์ คือ $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

ตัวอย่าง 2.2.12 $(M_n, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์ คือ $\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

เนื่องจาก

$(M_n, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป จากตัวอย่าง 2.1.12 และ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

สำหรับทุก $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in M_n$

ดังนั้น $(M_n, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์ คือ $\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

<u>ทฤษฎีบท 2.1</u>

ให้ S เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์ซ้าย และเอกลักษณ์ขวา แล้ว S เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์

พิสูจน์

ให้ e เป็นเอกลักษณ์ซ้ายและ f เป็นเอกลักษณ์ขวาของ S

เนื่องจาก e เป็นเอกลักษณ์ซ้ายของ S ได้ว่า $ef = f$

เนื่องจาก f เป็นเอกลักษณ์ขวาของ S ได้ว่า $ef = e$

ได้ว่า $f = ef = e$

นั่นคือ $f = e$ เป็นเอกลักษณ์ของ S

ดังนั้น S เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์

<u>ทฤษฎีบท 2.2</u>

ให้ S เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์ แล้วเอกลักษณ์ของ S จะมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

พิสูจน์

ให้ e และ f เป็นเอกลักษณ์ใดๆของ S

เนื่องจาก e เป็นเอกลักษณ์ของ S ได้ว่า $ef = f$

เนื่องจาก f เป็นเอกลักษณ์ของ S ได้ว่า $ef = e$

ได้ว่า $f = ef = e$

นั่นคือ $f = e$ เป็นเอกลักษณ์ของ S

ดังนั้น S มีเอกลักษณ์ได้เพียงตัวเดียวเท่านั้น

<u>บทนิยาม 2.3</u>

เราเรียกกึ่งกรุป S ว่า **กึ่งกรุปสลับที่ (Commutative semigroup)** ถ้า S มีสมบัติสลับที่ นั่นคือ

$$xy = yx \text{ สำหรับทุก } x, y \in S$$

ตัวอย่าง 2.3.1 $(\mathbb{R},\cdot)$ เป็นกึ่งกรุปสลับที่

เนื่องจาก

1) $(\mathbb{R},\cdot)$ เป็นกึ่งกรุป จากตัวอย่าง 2.1.7

2) $a \cdot b = b \cdot a$ สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $(\mathbb{R},\cdot)$ เป็นกึ่งกรุปสลับที่

ตัวอย่าง 2.3.2 $(\mathbb{Z}^+, +)$ เป็นกึ่งกรุปสลับที่

เนื่องจาก

1) $(\mathbb{Z}^+, +)$ เป็นกึ่งกรุป จากตัวอย่าง 2.1.3

2) $a + b = b + a$ สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{Z}^+$

ดังนั้น $(\mathbb{Z}^+, +)$ เป็นกึ่งกรุปสลับที่

ตัวอย่าง 2.3.3 $(\mathbb{Z}, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุปสลับที่

เนื่องจาก

1) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป จากตัวอย่าง 2.1.2

2) $a \cdot b = b \cdot a$ สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $(\mathbb{Z}, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุปสลับที่

ตัวอย่าง 2.3.4 $(\mathbb{Z}^+, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุปสลับที่

เนื่องจาก

1) $(\mathbb{Z}^+, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป จากตัวอย่าง 2.1.4

2) $a \cdot b = b \cdot a$ สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{Z}^+$

ดังนั้น $(\mathbb{Z}^+, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุปสลับที่

แบบทดสอบย่อยประจำบทที่ 2

คำสั่ง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด

1. เราเรียกระบบคณิตศาสตร์ $(S,*)$ ว่ากึ่งกรุป เมื่อ $(S,*)$ มีสมบัติในข้อใด

   ก. สลับที่

   ข. เปลี่ยนหมู่

   ค. ปิด

   ง. ถูกทุกข้อ

2. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

   ข้อความที่ 1 $(\mathbb{Z},+)$ เป็นกึ่งกรุป

   ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z},-)$ เป็นกึ่งกรุป

   ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

   ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

   ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

   ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

3. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

   ข้อความที่ 1 $(\mathbb{Z}^+,+)$ เป็นกึ่งกรุป

   ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z}^+,-)$ เป็นกึ่งกรุป

   ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

   ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

   ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

   ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

4. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{Z}^+,\cdot)$ ไม่เป็นกึ่งกรุป

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z}^+,\div)$ เป็นกึ่งกรุป

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

5. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{R},+)$ เป็นกึ่งกรุป

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{R},-)$ เป็นกึ่งกรุป

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

6. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{N},\cdot)$ เป็นกึ่งกรุป

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{C},-)$ เป็นกึ่งกรุป

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

7. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{Z}^{-},\div)$ เป็นกึ่งกรุป

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z}^{-},\cdot)$ เป็นกึ่งกรุป

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

8. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(M_n, +)$ เป็นกึ่งกรุป

ข้อความที่ 2 $(M_n,\cdot)$ เป็นกึ่งกรุป

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

9. กำหนด $\mathbb{Z}$ แทนเซตของจำนวนเต็ม และ การดำเนินการ $\blacksquare$ นิยามโดย $a \blacksquare b = a^b$ สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{Z}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $\blacksquare$ เป็นการดำเนินการทวิภาค

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z}, \blacksquare)$ เป็นกึ่งกรุป

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

10. กำหนด $\mathbb{Z}^-$ แทนเซตของจำนวนเต็มลบ และการดำเนินการ $\aleph$ นิยามโดย $a\aleph b = \frac{a}{b}$ สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{Z}^-$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $\aleph$ เป็นการดำเนินการทวิภาค

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z}^-, \aleph)$ เป็นกึ่งกรุป

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

11. กำหนด $\mathbb{Q}$ แทนเซตของจำนวนตรรกยะ และ การดำเนินการ $*$ นิยามโดย $a * b = a - b$ สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{Q}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Q}, *)$ เป็นกึ่งกรุป

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

12. เอกลักษณ์การบวกของกึ่งกรุป $(\mathbb{Z}, +)$ คือข้อใด

ก. 0

ข. 1

ค. -1

ง. ไม่มีเอกลักษณ์การบวก

13. เอกลักษณ์การคูณของกึ่งกรุป $(\mathbb{C}, \cdot)$ คือข้อใด

ก. $0 + 0i$

ข. $1 + 0i$

ค. $0 - i$

ง. $-1 - i$

14. กึ่งกรุปสลับที่ $(G,*)$ ต้องมีสมบัติอะไรบ้าง

ก. ปิด

ข. เปลี่ยนกลุ่ม

ค. สลับที่

ง. ถูกทุกข้อ

15. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{R},+)$ เป็นกึ่งกรุปสลับที่

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{N},\cdot)$ เป็นกึ่งกรุปสลับที่

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

บทที่ 3

กรุป

<u>บทนิยาม 3.1</u>

กำหนดให้ G เป็นเซตไม่ว่าง และ $*$ เป็น **การดำเนินการทวิภาค (Binary operation)** บน G จะเรียกระบบคณิตศาสตร์ $(G,*)$ ว่า **กรุป(Group)** ก็ต่อเมื่อ

1. $(G,*)$ เป็นกึ่งกรุป
2. มีสมาชิก $e \in G$ ที่ทำให้

   $e * a = a * e = a$ สำหรับทุก $a \in G$

   เรียกสมาชิก e ว่า **สมาชิกเอกลักษณ์ (Identity element)** ของ $(G,*)$
3. สำหรับแต่ละ $a \in G$ จะมี $b \in G$ ที่ทำให้

   $a * b = b * a = e$ สำหรับทุก $a, b \in G$

   เรียกสมาชิก b ว่า **ตัวผกผัน (Inverse)** ของ a

ตัวอย่าง 3.1.1 $(\mathbb{Z}, +)$ เป็นกรุป

เนื่องจาก

1. $(\mathbb{Z}, +)$ เป็นกึ่งกรุป จากตัวอย่าง 2.1.1
2. มี $0 \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้

   $$0 + a = a + 0 = a$$

   สำหรับทุก $a \in \mathbb{Z}$

   นั่นคือ 0 เป็นเอกลักษณ์ภายใต้การบวกของจำนวนเต็ม
3. สำหรับแต่ละ $a \in \mathbb{Z}$ จะมี $-a \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้

   $$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

   สำหรับทุก $a \in \mathbb{Z}$

   นั่นคือ $-a$ เป็นตัวผกผันภายใต้การบวกของจำนวนเต็ม a

ดังนั้น $(\mathbb{Z}, +)$ เป็นกรุป

ตัวอย่าง 3.1.2 $(\mathbb{Q}, +)$ เป็นกรุป

เนื่องจาก

1. $(\mathbb{Q}, +)$ เป็นกึ่งกรุป จากตัวอย่าง 2.1.15
2. มี $0 \in \mathbb{Q}$ ที่ทำให้

$$0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$$

สำหรับทุก $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ โดยที่ $b \neq 0$

นั่นคือ 0 เป็นเอกลักษณ์ภายใต้การบวกของจำนวนตรรกยะ

3. สำหรับแต่ละ $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ จะมี $-\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ซึ่ง

$$\left(\frac{a}{b}\right) + \left(-\frac{a}{b}\right) = \left(-\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{a}{b}\right) = 0$$

สำหรับทุก $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ โดยที่ $b \neq 0$

นั่นคือ $-\frac{a}{b}$ เป็นตัวผกผันภายใต้การบวกของจำนวนตรรกยะ $\frac{a}{b}$

ดังนั้น $(\mathbb{Q}, +)$ เป็นกรุป

ตัวอย่าง 3.1.3 $(\mathbb{C}, +)$ เป็นกรุป

เนื่องจาก

1. $(\mathbb{C}, +)$ เป็นกึ่งกรุป จากตัวอย่าง 2.1.9
2. มี $0 + 0i \in \mathbb{C}$ ที่ทำให้

$$\begin{aligned}(0 + 0i) + (a + bi) &= (a + bi) + (0 + 0i)\\ &= a + bi\end{aligned}$$

สำหรับทุก$a + bi \in \mathbb{C}$

นั่นคือ $0 + 0i$ เป็นเอกลักษณ์ภายใต้การบวกของจำนวนเชิงซ้อน

3. สำหรับแต่ละ $a + bi \in \mathbb{C}$ จะมี $-a - bi \in \mathbb{C}$ ที่ทำให้

$$\begin{aligned}(a + bi) + (-a - bi) &= (-a - bi) + (a + bi)\\ &= 0 + 0i\end{aligned}$$

สำหรับทุก $a + bi \in \mathbb{C}$

นั่นคือ $-a - bi$ เป็นตัวผกผันภายใต้การบวกของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$

ดังนั้น $(\mathbb{C}, +)$ เป็นกรุป

ตัวอย่าง 3.1.4 $(\mathbb{R}, +)$ เป็นกรุป

เนื่องจาก

1. $(\mathbb{R}, +)$ เป็นกึ่งกรุป จากตัวอย่าง 2.1.6
2. มี $0 \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้

$$0 + a = a + 0 = a$$

สำหรับทุก $a \in \mathbb{R}$

นั่นคือ 0 เป็นเอกลักษณ์ภายใต้การบวกของจำนวนจริง

3. สำหรับแต่ละ $a \in \mathbb{R}$ จะมี $-a \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

สำหรับทุก $a \in \mathbb{R}$

นั่นคือ $-a$ เป็นตัวผกผันภายใต้การบวกของจำนวนจริง a

ดังนั้น $(\mathbb{R}, +)$ เป็นกรุป

ตัวอย่าง 3.1.5 $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ เป็นกรุปโดยที่ $\cdot$ คือการคูณปกติ

เนื่องจาก

1. $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป
2. มี $1 \in \mathbb{R} - \{0\}$ ที่ทำให้

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

สำหรับทุก $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

นั่นคือ 1 เป็นเอกลักษณ์ภายใต้การคูณของจำนวนจริงใดๆ ที่ไม่ใช่ 0

3. สำหรับแต่ละ $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ จะมี $\frac{1}{a} \in \mathbb{R} - \{0\}$ ที่ทำให้

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$$

สำหรับทุก $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

นั่นคือ $\frac{1}{a}$ เป็นตัวผกผันภายใต้การคูณของจำนวนจริง a ใดๆ โดยที่ $a \neq 0$

ดังนั้น $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ เป็นกรุปโดยที่ $\cdot$ คือการคูณปกติ

ตัวอย่าง 3.1.6 $(\mathbb{Q}-\{0\},\cdot)$ เป็นกรุปโดยที่ $\cdot$ คือการคูณปกติ

เนื่องจาก

1. $(\mathbb{Q}-\{0\},\cdot)$ เป็นกึ่งกรุป
2. มี $1 \in \mathbb{Q}-\{0\}$ ที่ทำให้

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

สำหรับทุก $a \in \mathbb{Q}-\{0\}$

นั่นคือ 1 เป็นเอกลักษณ์ภายใต้การคูณของจำนวนตรรกยะใดๆ ที่ไม่ใช่ 0

3. สำหรับแต่ละ $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}-\{0\}$ จะมี $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}-\{0\}$ ที่ทำให้

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = \frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b} = 1$$

สำหรับทุก $a \in \mathbb{Q}-\{0\}$

นั่นคือ $\frac{b}{a}$ เป็นตัวผกผันภายใต้การคูณของจำนวนตรรกยะ $\frac{a}{b}$ ใดๆ ที่ไม่ใช่ 0

ดังนั้น $(\mathbb{Q}-\{0\},\cdot)$ เป็นกรุปโดยที่ $\cdot$ คือการคูณปกติ

ตัวอย่าง 3.1.7 $(\mathbb{C}-\{0\},\cdot)$ เป็นกรุปโดยที่ $\cdot$ คือการคูณปกติ

เนื่องจาก

1. $(\mathbb{C}-\{0\},\cdot)$ เป็นกึ่งกรุป
2. มี $1+0i \in \mathbb{C}-\{0\}$ที่ทำให้

$$(1+0i)\cdot(a+bi) = (a+bi)\cdot(1+0i) = a+bi$$

สำหรับทุก $a+bi \in \mathbb{C}-\{0\}$

นั่นคือ $1+0i$ เป็นเอกลักษณ์ภายใต้การคูณของจำนวนเชิงซ้อน

3. สำหรับแต่ละ $a+bi \in \mathbb{C}-\{0\}$ จะมี $\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i \in \mathbb{C}-\{0\}$ ที่ทำให้

$$(a+bi)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i\right) = 1+0i$$

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i\right)\cdot(a+bi) = 1+0i$$

สำหรับทุก $a+bi \in \mathbb{C}-\{0\}$

นั่นคือ $\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$ เป็นตัวผกผันภายใต้การคูณของจำนวนเชิงซ้อน $a+bi$ ใดๆ ที่ไม่ใช่ $0+0i$

ดังนั้น $(\mathbb{C}-\{0\},\cdot)$ เป็นกรุป

ตัวอย่าง 3.1.8 $(M_n, +)$ เป็นกรุป

เนื่องจาก

1. $(M_n, +)$ เป็นกึ่งกรุป จากตัวอย่าง 2.1.11
2. มี $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ ที่ทำให้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

และ

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

นั่นคือ

$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเอกลักษณ์ภายใต้การบวกของเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ บน $\mathbb{R}$

3. สำหรับแต่ละ $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ จะมี $\begin{bmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nn} \end{bmatrix}$ ที่ทำให้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

และ

$$\begin{bmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

สำหรับทุก $\begin{bmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nn} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in M_n$

นั่นคือ $\begin{bmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nn} \end{bmatrix}$ เป็นตัวผกผันภายใต้การบวกของ M_n

ดังนั้น $(M_n, +)$ เป็นกรุป

บทนิยาม 3.2

กรุป $(G,*)$ จะเรียกว่า**กรุปสลับที่ (Commutative group)** ก็ต่อเมื่อ

$$a * b = b * a \text{ สำหรับทุก } a, b \in G$$

ตัวอย่าง 3.2.1 $(\mathbb{Z}, +)$ เป็นกรุปสลับที่

เนื่องจาก

$$a + b = b + a$$

สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $(\mathbb{Z}, +)$ เป็นกรุปสลับที่

ตัวอย่าง 3.2.2 $(\mathbb{Q}, +)$ เป็นกรุปสลับที่

เนื่องจาก

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

สำหรับทุก $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$

ดังนั้น $(\mathbb{Q}, +)$ เป็นกรุปสลับที่

ตัวอย่าง 3.2.3 $(\mathbb{R}, +)$ เป็นกรุปสลับที่

เนื่องจาก

$$a + b = b + a$$

สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{R}$

ดังนั้น $(\mathbb{R}, +)$ เป็นกรุปสลับที่

ตัวอย่าง 3.2.4 $(\mathbb{C}, +)$ เป็นกรุปสลับที่

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \\ (c + di) + (a + bi) &= (c + a) + (d + b)i \\ &= (a + c) + (b + d)i\end{aligned}$$

สำหรับทุก $a + bi, c + di \in \mathbb{C}$

ดังนั้น $(\mathbb{C}, +)$ เป็นกรุปสลับที่

ตัวอย่าง 3.2.5 $(M_n, +)$เป็นกรุปสลับที่

เนื่องจาก

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}$$

และ

$$\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}+a_{11} & \cdots & b_{1n}+a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}+a_{n1} & \cdots & b_{nn}+a_{nn} \end{bmatrix}$$

สำหรับทุก $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \in M_n$

นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $(M_n, +)$ เป็นกรุปสลับที่

ตัวอย่าง 3.2.6 กำหนดให้ $G = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ และ } ad - bc \neq 0\right\}$ กับการคูณเมทริกซ์ไม่เป็นกรุปสลับที่

เนื่องจาก

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

พบว่า $A, B \in G$ และ

$AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 14 & 5 \end{bmatrix}$

แต่ $AB \neq BA$

ดังนั้น $G = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ และ } ad - bc \neq 0\right\}$ กับการคูณเมทริกซ์ไม่เป็นกรุปสลับที่

<u>ทฤษฎีบท 3.1</u>

ให้ G เป็นกรุป และ $a, b, c \in G$

ถ้า $ab = ac$ แล้ว $b = c$ **เรียกว่ากฎตัดออกทางซ้าย(Left cancellation law)**

พิสูจน์

ให้ $ab = ac$ เนื่องจาก G เป็นกรุป ดังนั้นจะมี $a^{-1} \in G$ ซึ่ง

$$
\begin{aligned}
a^{-1}(ab) &= a^{-1}(ac) \\
(a^{-1}a)b &= (a^{-1}a)c \\
eb &= ec \\
b &= c
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ถ้า $ab = ac$ แล้ว$b = c$

<u>ทฤษฎีบท 3.2</u>

ให้ G เป็นกรุป และ $a, b, c \in G$

ถ้า $ba = ca$ แล้ว $b = c$ **เรียกว่ากฎตัดออกทางขวา(Right cancellation law)**

พิสูจน์

ให้ $ba = ca$ เนื่องจาก G เป็นกรุป ดังนั้นจะมี $a^{-1} \in G$ ซึ่ง

$$
\begin{aligned}
(ba)a^{-1} &= (ca)a^{-1} \\
b(aa^{-1}) &= c(aa^{-1}) \\
be &= ce \\
b &= c
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ถ้า $ba = ca$ แล้ว$b = c$

<u>ทฤษฎีบท 3.3</u>

ให้ G เป็นกรุป สมาชิกเอกลักษณ์ $e \in G$ มีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

พิสูจน์

สมมติให้ e และ e' เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ใน G

ได้ว่า

$$ae = ea = a = ae' = e'a = a$$

นั่นคือ

$$ae = ae'$$

ได้ว่า

$$e = e'$$

ดังนั้น สมาชิกเอกลักษณ์ $e \in G$ มีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 3.4

ให้ G เป็นกรุป สำหรับสมาชิก $a \in G$ จะมี $a^{-1} \in G$ เป็นตัวผกผันเพียงตัวเดียวเท่านั้น

พิสูจน์

สมมติให้ a_1^{-1} และ a_2^{-1} เป็นตัวผกผันของ a ใน G

ได้ว่า

$$aa_1^{-1} = a_1^{-1}a = e$$

และ

$$aa_2^{-1} = a_2^{-1}a = e$$

นั่นคือ

$$aa_1^{-1} = aa_2^{-1}$$

ได้ว่า

$$a_1^{-1} = a_2^{-1}$$

ดังนั้น สำหรับสมาชิก $a \in G$ จะมี $a^{-1} \in G$ เป็นตัวผกผันเพียงตัวเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 3.5

ให้ G เป็นกรุป ถ้า $a \in G$ แล้ว $(a^{-1})^{-1} = a$

พิสูจน์

เนื่องจาก $(a^{-1})^{-1}$ เป็นตัวผกผันของ a^{-1}

ได้ว่า $(a^{-1})^{-1}a^{-1} = a^{-1}(a^{-1})^{-1} = e$

เนื่องจาก a^{-1} เป็นตัวผกผันของ a

ได้ว่า $a^{-1}a = aa^{-1} = e$

นั่นคือ $(a^{-1})^{-1}a^{-1} = aa^{-1}$

ได้ว่า $(a^{-1})^{-1} = a$

ดังนั้น ถ้า $a \in G$ แล้ว $(a^{-1})^{-1} = a$

ทฤษฎีบท 3.6

ให้ G เป็นกรุป ถ้า $a, b \in G$ แล้ว $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

พิสูจน์

เนื่องจาก $(ab)^{-1}$ เป็นตัวผกผันของ ab นั่นคือ

$$(ab)^{-1}(ab) = (ab)(ab)^{-1} = e$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}(ab)(b^{-1}a^{-1}) &= a(bb^{-1})a^{-1}\\ &= a(e)a^{-1}\\ &= aa^{-1}\\ &= e\\ (b^{-1}a^{-1})(ab) &= b^{-1}(a^{-1}a)b\\ &= b^{-1}(e)b\\ &= b^{-1}b\\ &= e\end{aligned}$$

ได้ว่า

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = (b^{-1}a^{-1})(ab) = e$$

นั่นคือ $b^{-1}a^{-1}$ เป็นตัวผกผันของ ab

เนื่องจากสมาชิกผกผันของกรุปมีเพียงตัวเดียว

ดังนั้น ถ้า $a, b \in G$ แล้ว$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

ทฤษฎีบท 3.7

ในกรุป G ใดๆ สมาชิกที่สอดคล้องกับสมการ $aa = a$ คือสมาชิกเอกลักษณ์ e เพียงตัวเดียวเท่านั้น

พิสูจน์

จาก

$$aa = a$$

ได้อีกว่า

$$aa = ae$$

นั่นคือ

$$a = e$$

ดังนั้น ในกรุป G ใดๆ สมาชิกที่สอดคล้องกับสมการ $aa = a$ คือสมาชิกเอกลักษณ์ e เพียงตัวเดียวเท่านั้น

ข้อสังเกต 3.1

เราทราบว่า $(\mathbb{R},+)$ เป็นกรุป

พิจารณาการหาค่าตัวแปร x จากสมการ $x+5=0$

เราสามารถหาค่าตัวแปร x จาก

$$x+5=0$$

เนื่องจาก$(\mathbb{R},+)$ เป็นกรุป

ทำให้เราได้ว่า -5 เป็นตัวผกผันภายใต้การบวกของ 5 ของ $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(x+5)+(-5)&=0+(-5)\\ x+\big(5+(-5)\big)&=-5\\ x+0&=-5\\ x&=-5\end{aligned}$$

เนื่องจาก$(\mathbb{R},+)$ เป็นกรุป

ทำให้เราได้ว่า -5 เป็นตัวผกผันภายใต้การบวกของ 5 ของ $\mathbb{R}$

ข้อสังเกต 3.2

เราทราบว่า $(\mathbb{R}-\{0\},\cdot)$ เป็นกรุป

พิจารณาการหาค่าตัวแปร x จากสมการ $2x=10$

เราสามารถหาค่าตัวแปร x จาก

$$2x=10$$

เนื่องจาก$(\mathbb{R}-\{0\},\cdot)$ เป็นกรุป

ทำให้เราได้ว่า $\frac{1}{2}$ เป็นตัวผกผันภายใต้การคูณของ 2 ของ $(\mathbb{R}-\{0\},\cdot)$

เนื่องจาก$(\mathbb{R}-\{0\},\cdot)$ เป็นกรุป

$$\begin{aligned}2x&=10\\ \frac{1}{2}(2x)&=\frac{1}{2}(10)\\ \left(\left(\frac{1}{2}\right)(2)\right)x&=5\\ 1x&=5\\ x&=5\end{aligned}$$

ทำให้เราได้ว่า $\frac{1}{2}$ เป็นตัวผกผันภายใต้การคูณของ 2 ของ $(\mathbb{R}-\{0\},\cdot)$

<u>**บทนิยาม 3.3**</u>

กำหนดให้ G เป็นกรุป และ $\emptyset \neq H \subseteq G$ เราเรียก H ว่า **กรุปย่อย(subgroup) ของ G** ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $H \leq G$ ก็ต่อเมื่อ H เป็นกรุปภายใต้การดำเนินการทวิภาคเดียวกันกับกรุป G

<u>**ทฤษฎีบท 3.8**</u>

กำหนดให้ G เป็นกรุป และ $\emptyset \neq H \subseteq G$ จะได้ว่า H เป็นกรุปย่อยของกรุป G ก็ต่อเมื่อ

1. ถ้า $a, b \in H$ แล้ว $ab \in H$
2. ถ้า $a \in H$ แล้ว $a^{-1} \in H$

ตัวอย่าง 3.8.1 $(\mathbb{Z}, +)$ เป็นกรุปย่อยของ $(\mathbb{R}, +)$

เนื่องจาก $\emptyset \neq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$

ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$

ได้ว่า

1. $a + b \in \mathbb{Z}$
2. ถ้า $a \in \mathbb{Z}$ แล้ว $-a \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $(\mathbb{Z}, +)$ เป็นกรุปย่อยของ $(\mathbb{R}, +)$

ตัวอย่าง 3.8.2 $(\mathbb{Q}, +)$ เป็นกรุปย่อยของ $(\mathbb{R}, +)$

เนื่องจาก $\emptyset \neq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

ให้ $a, b \in \mathbb{Q}$

ได้ว่า

1. $a + b \in \mathbb{Q}$
2. ถ้า $a \in \mathbb{Q}$ แล้ว $-a \in \mathbb{Q}$

ดังนั้น $(\mathbb{Q}, +)$ เป็นกรุปย่อยของ $(\mathbb{R}, +)$

ทฤษฎีบท 3.9

กำหนดให้ G เป็นกรุป และ $\emptyset \neq H \subseteq G$ถ้า $ab^{-1} \in H$ สำหรับทุก $a, b^{-1} \in H$ แล้ว เรียก H ว่ากรุปย่อยของกรุป G

ตัวอย่าง 3.9.1 กำหนด$(M_2, +)$ เป็นกรุปและ $H = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\right\}$

เนื่องจาก $\emptyset \neq H \subseteq M_2$

กำหนด $\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} m & n \\ -n & m \end{bmatrix} \in H$

ได้ว่า $\begin{bmatrix} m & n \\ -n & m \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -m & -n \\ n & -m \end{bmatrix}$ ซึ่ง

$$\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m & -n \\ n & -m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-m & y-n \\ -y+n & x-m \end{bmatrix} \in H$$

ดังนั้น H เป็นกรุปย่อยของ M_2

ตัวอย่าง 3.9.2 กำหนด$(M_2, +)$ เป็นกรุป และ $H = \left\{\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\right\}$

เนื่องจาก $\emptyset \neq H \subseteq M_2$

กำหนด$\begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & e \\ 0 & f \end{bmatrix} \in H$

ได้ว่า$\begin{bmatrix} 0 & e \\ 0 & f \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -e \\ 0 & -f \end{bmatrix}$ ซึ่ง

$$\begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -e \\ 0 & -f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c-e \\ 0 & d-f \end{bmatrix} \in H$$

และ H เป็นกรุปย่อยของ M_2

ตัวอย่าง 3.9.3 กำหนด $(M_2, \cdot)$ เป็นกรุปและ $H = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} | a, b \neq 0\right\}$

เนื่องจาก $\emptyset \neq H \subseteq M_2$

กำหนด $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \in H$

ได้ว่า $\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{mn}\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$ ซึ่ง

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{m} & 0 \\ 0 & \frac{y}{n} \end{bmatrix} \in H$$

และ H เป็นกรุปย่อยของ M_2

<u>ข้อสังเกต 3.3</u>

เนื่องจาก

$$\frac{1}{a} = a^{-1}$$

ดังนั้น

$$\frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a} = ba^{-1}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-1}$$

แบบทดสอบย่อยประจำบทที่ 3

คำสั่ง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด

1. ข้อใดไม่ใช่สมบัติของกรุป

   ก. ปิด

   ข. เปลี่ยนกลุ่ม

   ค. มีสมาชิกเอกลักษณ์ และสมาชิกผกผัน

   ง. สลับที่

2. เงื่อนไขใดต่อไปนี้ที่ทำให้ระบบคณิตศาสตร์ $(G,*)$ ไม่เป็นกรุป

   ก. $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค

   ข. $(G,*)$ เป็นกึ่งกรุป

   ค. G เป็นเซตไม่ว่าง

   ง. ถ้า $a, b \in G$ แล้ว $a * b \notin G$

3. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

   ข้อความที่ 1 $(\mathbb{Z}, +)$ เป็นกรุป

   ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z}, -)$ เป็นกรุป

   ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

   ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

   ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

   ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

4. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{Q},\cdot)$ เป็นกรุป

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Q},+)$ เป็นกรุป

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

5. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{C},+)$ เป็นกรุป

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{R},+)$ เป็นกรุป

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

6. กรุป $(G,*)$ จะเป็นกรุปสลับที่ หรืออาบีเลียนกรุป ต้องมีสมบัติข้อใด

ก. $(a*b)*c = a*(b*c)$ สำหรับทุก $a,b,c \in G$

ข. $a*b = a*b$ สำหรับทุก $a,b \in G$

ค. $a*a^{-1} = b*b^{-1}$ สำหรับทุก $a,b,a^{-1},b^{-1} \in G$

ง. $a*b^{-1} = a^{-1}*b$ สำหรับทุก $a,b,a^{-1},b^{-1} \in G$

7. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{C}, +)$ ไม่เป็นกรุปสลับที่

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{R}, +)$ เป็นกรุปสลับที่

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

8. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{Q}, +)$ ไม่เป็นกรุปสลับที่

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z}, +)$ ไม่เป็นกรุปสลับที่

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

9. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

กำหนด $G = \left\{\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} | w, x, y, z \in \mathbb{R}$ และ $wz - xy \neq 0\right\}$ การบวกปกติของเมทริกซ์ และการคูณปกติของเมทริกซ์ เป็นการดำเนินการทวิภาค

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(G, +)$ เป็นกรุปสลับที่

ข้อความที่ 2 $(G, \cdot)$ เป็นกรุปสลับที่

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

10. กำหนด $(G,*)$ เป็นกรุป และสำหรับทุก $a, b, c, d \in G$ ได้ว่า $a * d = a, b * d = b, c * d = c$

ข้อใดถูกต้อง

ก. a เป็นเอกลักษณ์ของกรุป G

ข. b เป็นเอกลักษณ์ของกรุป G

ค. c เป็นเอกลักษณ์ของกรุป G

ง. d เป็นเอกลักษณ์ของกรุป G

11. กำหนด $(G,*)$ เป็นกรุป และสำหรับทุก $a, b, c, e \in G$ ได้ว่า $a * a^{-1} = b * b^{-1} = c * c^{-1} = e$

ข้อใดถูกต้อง

ก. a เป็นอินเวิร์สของกรุป G

ข. b เป็นอินเวิร์สของกรุป G

ค. c เป็นอินเวิร์สของกรุป G

ง. d เป็นอินเวิร์สของกรุป G

12. กำหนด $S = \{1,2,3\}$ และ $*$ เป็นการดำเนินการบน S นิยามดังนี้

*	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

ข้อความใดถูกต้อง

ก. $1 * 3 = 1$

ข. $2 * 3 = 1$

ค. $3 * 2 = 1$

ง. $1 * 2 = 1$

13. กำหนด $A = \{n|n$ เป็นจำนวนเต็ม$\}$ ที่มี $\otimes$ เป็นการดำเนินการบน A และ

$$a \otimes b = a - b \text{ สำหรับทุก } a, b \in A$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $\otimes$ ไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน A

ข้อความที่ 2 $b \otimes a = b - a$ สำหรับทุก $a, b \in A$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

14. กำหนดการดำเนินการ $\ominus$ บน $\mathbb{Z}$ ดังนี้ $a \ominus b = ab + 1$ สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{Z}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{Z}, \ominus)$ มีสมบัติการสลับที่

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z}, \ominus)$ มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

15. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 กรุปบางกรุปเป็นกรุปสลับที่

ข้อความที่ 2 กรุปสลับที่บางกรุปไม่เป็นกรุป

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

บทที่ 4

ริง และฟิลด์

จากการศึกษาในเบื้องต้น ระบบคณิตศาสตร์ที่เรียกว่ากรุป นั้นประกอบด้วยเซตไม่ว่างหนึ่งเซต กับการดำเนินการทวิภาคหนึ่งการกระทำ ในบทนี้จะศึกษาระบบคณิตศาสตร์อีกระบบหนึ่ง เป็นระบบคณิตศาสตร์ที่ประกอบด้วยเซตไม่ว่างหนึ่งเซต กับการดำเนินการทวิภาคสองการกระทำ

บทนิยาม 4.1

กำหนดให้ R เป็นเซตไม่ว่าง และกำหนด $+$ (การบวก) และ $\cdot$ (การคูณ) เป็นการดำเนินการทวิภาคบน R จะเรียกระบบคณิตศาสตร์ $(R, +, \cdot)$ ว่า **ริง (ring)** ก็ต่อเมื่อ

สำหรับทุก $a, b, c \in \mathrm{R}$

สำหรับ $(\boldsymbol{R}, +)$ เป็นกรุปสลับที่ นั่นคือ

1. สมบัติปิด

$$a + b \in R$$

2. สมบัติการเปลี่ยนหมู่

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

3. มีสมาชิกเอกลักษณ์

$$a + 0 = 0 + a = a$$

4. มีตัวผกผัน

$$a + (-a) = -a + a = 0$$

5. สมบัติการสลับที่

$$a + b = b + a$$

สำหรับ $(\boldsymbol{R}, \cdot)$

1. มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

สำหรับ $(\boldsymbol{R}, +, \cdot)$

1. มีสมบัติการแจกแจง

$a \cdot (b + c) = a \cdot c + a \cdot c$ และ $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

ตัวอย่าง 4.1.1 $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ เป็นริง

เนื่องจาก

สำหรับ $a,b,c \in \mathbb{Z}$

เราพบว่า

สำหรับ $(\mathbb{Z},+)$

1. สมบัติปิด

$$a+b \in \mathbb{Z}$$

2. สมบัติการเปลี่ยนหมู่

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

3. มีสมาชิกเอกลักษณ์

$$a+0 = 0+a = a$$

4. มีตัวผกผัน

$$a+(-a) = -a+a = 0$$

5. สมบัติการสลับที่

$$a+b = b+a$$

สำหรับ $(\mathbb{Z},\cdot)$

1. มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่

$$(ab)c = a(bc)$$

สำหรับ $(\mathbb{Z},+,\cdot)$

1. มีสมบัติการแจกแจง

$$a(b+c) = ab+ac$$
$$(b+c)a = ba+ca$$

ตัวอย่าง 4.1.2 $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ เป็นริง

เนื่องจาก

สำหรับ $\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f}\in\mathbb{Q}$ โดยที่ $b,d,f\neq 0$

เราพบว่า

สำหรับ $(\mathbb{Q},+)$

1. สมบัติปิด

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}\in\mathbb{Q}$$

2. สมบัติการเปลี่ยนหมู่

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$$

3. มีสมาชิกเอกลักษณ์

$$\frac{a}{b}+0=0+\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$$

4. มีตัวผกผัน

$$\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=-\frac{a}{b}+\frac{a}{b}=0$$

5. สมบัติการสลับที่

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

สำหรับ $(\mathbb{Q},\cdot)$

1. มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่

$$\left(\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)\right)\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\left(\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{e}{f}\right)\right)$$

สำหรับ $(\mathbb{Q},+,\cdot)$

1. มีสมบัติการแจกแจง

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{e}{f}\right)$$
$$\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)\frac{a}{b}=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{e}{f}\right)$$

ตัวอย่าง 4.1.3 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ เป็นริง

เนื่องจาก

สำหรับ $a, b, c \in \mathbb{R}$

เราพบว่า

สำหรับ $(\mathbb{R}, +)$

1. สมบัติปิด

$$a + b \in \mathbb{R}$$

2. สมบัติการเปลี่ยนหมู่

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

3. มีสมาชิกเอกลักษณ์

$$a + 0 = 0 + a = a$$

4. มีตัวผกผัน

$$a + (-a) = -a + a = 0$$

5. สมบัติการสลับที่

$$a + b = b + a$$

สำหรับ $(\mathbb{R}, \cdot)$

1. มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่

$$(ab)c = a(bc)$$

สำหรับ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

1. มีสมบัติการแจกแจง

$$a(b + c) = ac + ac$$
$$(b + c)a = ba + ca$$

<u>บทนิยาม 4.2</u>

เรียก $(R, +,\cdot)$ เป็น**ริงที่มีเอกลักษณ์ (Ring with identity)** ก็ต่อเมื่อ มี $e \in R$ ที่ทำให้

$$a \cdot e = e \cdot a = a \text{ สำหรับทุกสมาชิก } a \in R$$

ตัวอย่าง 4.2.1

$(\mathbb{Z}, +,\cdot)$ เป็นริงที่มีเอกลักษณ์

ตัวอย่าง 4.2.2

$(\mathbb{R}, +,\cdot)$ เป็นริงที่มีเอกลักษณ์

ตัวอย่าง 4.2.3

$(\mathbb{Q}, +,\cdot)$ เป็นริงที่มีเอกลักษณ์

<u>บทนิยาม 4.3</u>

เรียก $(R, +,\cdot)$ เป็น**ริงสลับที่ (Commutative ring)** ก็ต่อเมื่อ $a \cdot b = b \cdot a$ สำหรับทุกสมาชิก $a, b \in R$

ตัวอย่าง 4.3.1

$(\mathbb{Z}, +,\cdot)$ เป็นริงสลับที่

ตัวอย่าง 4.3.2

$(2\mathbb{Z}, +,\cdot)$ เป็นริงสลับที่

เมื่อ $2\mathbb{Z} = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$

<u>บทนิยาม 4.4</u>

สำหรับริง $(R, +,\cdot)$ สัญลักษณ์

1. $-a$ แทนตัวผกผันภายใต้การบวกของ a
2. a^{-1} แทนตัวผกผันภายใต้การคูณของ a (กรณี a มีตัวผกผันภายใต้การคูณ)
3. ab หรือ $(a)(b)$ แทน $a \cdot b$
4. $a - b$ แทน $a + (-b)$

ทฤษฎีบท 4.1

กำหนดให้ R เป็นริง และ $a, b \in R$ จะได้ว่า

1. $a0 = 0a = 0$
2. $a(-b) = (-a)b = -(ab)$
3. $(-a)(-b) = ab$

พิสูจน์

1. $a0 = 0a = 0$

$$\begin{aligned} a0 + a0 &= a(0+0) \\ &= a0 \\ &= 0 + a0 \end{aligned}$$

ได้ว่า $a0 = 0$

$$\begin{aligned} 0a + 0a &= (0+0)a \\ &= 0a \\ &= 0 + 0a \end{aligned}$$

ได้ว่า $0a = 0$

ดังนั้น $a0 = 0a = 0$

2. $a(-b) = (-a)b = -(ab)$

$a(-b) + ab = a(-b + b) = a0 = 0$

ดังนั้น $a(-b)$ เป็นตัวผกผันการบวกของ ab

แต่ ab เป็นตัวผกผันสำหรับการบวกของ $-(ab)$

นั่นคือ $a(-b) = -(ab)$

ในทำนองเดียวกัน

$(-a)b + ab = (-a + a)b = 0b = 0$

ดังนั้น $(-a)b$ เป็นตัวผกผันการบวกของ ab

แต่ ab เป็นตัวผกผันสำหรับการบวกของ $-(ab)$

นั่นคือ $a(-b) = -(ab)$

แสดงว่า $a(-b) = (-a)b - (ab)$

3. $(-a)(-b) = ab$

$(-a)(-b) = -\big(a(-b)\big) = -\big(-(ab)\big) = ab$

<u>บทนิยาม 4.5</u>

$$\mathbb{R}[x] = \left\{p(x) | p(x)\text{เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง}\right\}$$

<u>บทนิยาม 4.6</u> กำหนด $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$$

<u>บทนิยาม 4.7</u> กำหนด $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0) + \\ &\quad (b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0) \\ &= (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + (a_{n-2} + b_{n-2})x^{n-2} \\ &\quad + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) \\ p(x) \cdot q(x) &= (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x) \cdot \\ &\quad (b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x) \\ &= (a_n x^n \cdot b_n x^n + a_n x^n \cdot b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_n x^n \cdot b_1 x) + \\ &\quad (a_{n-1}x^{n-1} \cdot b_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \cdot b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \cdot b_1 x) \\ &\quad + \cdots + (a_1 x \cdot b_n x^n + a_1 x \cdot b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x \cdot b_1 x) \end{aligned}$$

<u>ทฤษฎีบท 4.2</u>

$(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ เป็นริง ดังนั้น$(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ จะมีสมบัติต่างๆ ตามบทนิยาม 4.1

ตัวอย่าง 4.2.1 พิจารณาการหารากของสมการ $x^2 + x = 0$

จาก

$$x^2 + x = 0$$

เนื่องจาก $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ เป็นริง

ดังนั้น $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ มีสมบัติการแจกแจง

$$x(x + 1) = 0$$

จากทฤษฎีบท

$$a \cdot b = 0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = 0 \text{ หรือ } b = 0$$

ได้ว่า

$$x = 0 \text{ หรือ } x + 1 = 0$$

นั่นคือ

$$x = 0 \text{ หรือ} x = -1$$

ตัวอย่าง 4.2.2 พิจารณาการหารากของสมการ $x^3 + x^2 - 2x = 0$

จาก

$$x^3 + x^2 - 2x = 0$$

เนื่องจาก $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ เป็นริง

ดังนั้น $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ มีสมบัติการแจกแจง

$$x(x-1)(x+2) = 0$$

จากทฤษฎีบท

$$a \cdot b = 0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = 0 \text{ หรือ } b = 0$$

ได้ว่า

$$x = 0 \text{ หรือ } x - 1 = 0 \text{ หรือ } x + 2 = 0$$

นั่นคือ

$$x = 0 \text{ หรือ } x = 1 \text{ หรือ } x = -2$$

<u>บทนิยาม 4.8</u>

กำหนดให้ F เป็นเซตไม่ว่าง $+$ และ $\cdot$ เป็นการดำเนินการทวิภาค ที่มีสมบัติดังข้างล่างนี้

ให้ $a, b, c \in F$

สำหรับ $(F, +)$ เป็นกรุปสลับที่ นั่นคือ

1. สมบัติปิด

$$a + b \in F$$

2. สมบัติการเปลี่ยนหมู่

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

3. มีสมาชิกเอกลักษณ์

$$a + 0 = 0 + a = a$$

4. มีตัวผกผัน

$$a + (-a) = -a + a = 0$$

5. สมบัติการสลับที่

$$a + b = b + a$$

สำหรับ $(F-\{0\},\cdot)$ เป็นกรุปสลับที่ นั่นคือ

1. สมบัติปิด

$$ab \in F$$

2. สมบัติการเปลี่ยนหมู่

$$(ab)c = a(bc)$$

3. มีสมาชิกเอกลักษณ์

$$a1 = 1a = a$$

4. มีตัวผกผัน

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

5. สมบัติการสลับที่

$$ab = ba$$

สำหรับ $(F,+,\cdot)$

1. สมบัติการแจกแจง

$$a(b+c) = ab + ac$$

เซตที่มีสมาชิกและตัวดำเนินการสองตัว $(F,+,\cdot)$ ที่มีสมบัติดังข้างบนนี้ เราเรียกว่า **ฟิลด์ (Field)**

ตัวอย่าง 4.8.1 เซตของจำนวนจริง และตัวดำเนินการบวกและการคูณ $(\mathbb{R},+,\cdot)$ เป็นฟิลด์เนื่องจาก

1. $(\mathbb{R},+)$ เป็นกรุปสลับที่
2. $(\mathbb{R}-\{0\},\cdot)$ เป็นกรุปสลับที่
3. $(\mathbb{R},+,\cdot)$ มีสมบัติการแจกแจงนั่นคือ สำหรับ $a,b,c \in \mathbb{R}$ ได้ว่า

$$a(b+c) = (ab) + (ac)$$
$$(b+c)a = (ba) + (ca)$$

ตัวอย่าง 4.8.2 เซตของจำนวนเชิงซ้อน และตัวดำเนินการบวกและการคูณ $(\mathbb{C},+,\cdot)$ เป็นฟิลด์เนื่องจาก

1. $(\mathbb{C},+)$ เป็นกรุปสลับที่
2. $(\mathbb{C}-\{0+0i\},\cdot)$ เป็นกรุปสลับที่
3. $(\mathbb{C},+,\cdot)$ มีสมบัติการแจกแจง นั่นคือสำหรับ $a+bi, c+di, e+fi \in \mathbb{C}$ ได้ว่า

$$(a+bi)[(c+di)+(e+fi)] = (a+bi)(c+di) + (a+bi)(e+fi)$$
$$[(c+di)+(e+fi)](a+bi) = (c+di)(a+bi) + (e+fi)(a+bi)$$

ตัวอย่าง 4.8.3 เซตของจำนวนตรรกยะ และตัวดำเนินการบวกและการคูณ $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ เป็นฟีลด์ เนื่องจาก

1. $(\mathbb{Q},+)$ เป็นกรุปสลับที่
2. $(\mathbb{Q}-\{0\},\cdot)$ เป็นกรุปสลับที่
3. $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ มีสมบัติการแจกแจง นั่นคือสำหรับ $\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f}\in\mathbb{Q}$ โดยที่ $b,d,f\neq 0$ ได้ว่า

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left[\left(\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{e}{f}\right)\right]=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{e}{f}\right)$$
$$\left[\left(\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{e}{f}\right)\right]\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{e}{f}\right)\left(\frac{a}{b}\right)$$

ตัวอย่าง 4.8.4 เซตของจำนวนเต็ม และตัวดำเนินการบวกและการคูณ $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ไม่เป็นฟีลด์เนื่องจาก $(\mathbb{Z}-\{0\},\cdot)$ ไม่เป็นกรุปสลับที่

<u>บทนิยาม 4.9</u>

ให้ $(\mathbb{R},+,\cdot)$ เป็นฟีลด์ และ $a,b,c\in\mathbb{R}$

1. $a+(-b)=a-b$
2. $a\cdot b=(a)(b)=ab$
3. $a\div b=a\left(\frac{1}{b}\right)=\frac{a}{b}=ab^{-1}$

<u>ทฤษฎีบท 4.3</u>

ให้ $(\mathbb{R},+,\cdot)$ เป็นฟีลด์ และ $a,b,c\in\mathbb{R}$ จะได้ว่า

1. ถ้า $a+c=b+c$ แล้ว $a=b$
2. ถ้า $c+a=c+b$ แล้ว $a=b$
3. ถ้า $ac=bc$ และ $c\neq 0$ แล้ว $a=b$
4. ถ้า $ca=cb$ และ $c\neq 0$ แล้ว $a=b$
5. $-0=0$
6. $a-0=a$
7. $0-a=-a$
8. $-(-a)=a$
9. $-(a+b)=-a-b$
10. $a0=0a=0$

11. $(-1)a = -a$
12. $(-a)b = a(-b) = -ab$
13. $(-a)(-b) = ab$
14. ถ้า $c \neq 0$ แล้ว $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$
15. ถ้า $c \neq 0$ แล้ว $a\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{ab}{c}$
16. ถ้า $c \neq 0$ แล้ว $\frac{bc}{c} = b$
17. ถ้า $c \neq 0$ แล้ว $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$
18. ถ้า $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ แล้ว $\frac{1}{ab} = \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}\right)$
19. ถ้า $b \neq 0$ และ $d \neq 0$ แล้ว $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
20. ถ้า $b \neq 0$ และ $d \neq 0$ แล้ว $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$
21. ถ้า $b \neq 0$ และ $d \neq 0$ แล้ว $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$

พิสูจน์

ให้ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ เป็นฟิลด์ และ $a, b, c \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

1. ถ้า $a + c = b + c$ แล้ว $a = b$

ให้

$$a + c = b + c$$

ได้ว่า

$$\begin{aligned} (a + c) + (-c) &= (b + c) + (-c) \\ a + \big(c + (-c)\big) &= b + \big(c + (-c)\big) \\ a + 0 &= b + 0 \\ a &= b \end{aligned}$$

2. ถ้า $c + a = c + b$ แล้ว $a = b$

ให้

$$c + a = c + b$$

ได้ว่า

$$\begin{aligned} (-c) + (c + a) &= (-c) + (c + b) \\ \big((-c) + c\big) + a &= \big((-c) + c\big) + b \\ 0 + a &= 0 + b \\ a &= b \end{aligned}$$

3. ถ้า $ac = bc$ และ $c \neq 0$ แล้ว $a = b$

ให้

$$ac = bc$$

ได้ว่า

$$\begin{aligned} ac\left(\frac{1}{c}\right) &= bc\left(\frac{1}{c}\right) \\ a\left(c\left(\frac{1}{c}\right)\right) &= b\left(c\left(\frac{1}{c}\right)\right) \\ a1 &= b1 \\ a &= b \end{aligned}$$

4. ถ้า $ca = cb$และ $c \neq 0$ แล้ว $a = b$

ให้

$$ca = cb$$

ได้ว่า

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c}\right)ca &= \left(\frac{1}{c}\right)cb \\ \left(\left(\frac{1}{c}\right)c\right)a &= \left(\left(\frac{1}{c}\right)c\right)b \\ 1a &= 1b \\ a &= b \end{aligned}$$

5. $-0 = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -0 + 0 \\ &= -0 \end{aligned}$$

ได้ว่า $-0 = 0$

6. $a - 0 = a$

$$\begin{aligned} a - 0 &= a + (-0) \\ &= a + 0 \\ &= a \end{aligned}$$

ได้ว่า $a - 0 = 0$

7. $0 - a = -a$

$$\begin{aligned} 0 - a &= \big(0 + (-a)\big) \\ &= -a \end{aligned}$$

ได้ว่า $0 - a = -a$

8. $-(-a) = a$

$$\begin{aligned} (-a) + \big(-(-a)\big) &= 0 \\ &= (-a) + a \end{aligned}$$

จากกฎการตัดออกทางซ้าย

ได้ว่า $-(-a) = a$

9. $-(a + b) = -a - b$

$$\begin{aligned} -(a + b) + (a + b) &= 0 \\ &= 0 + 0 \\ &= (-a + a) + (-b + b) \\ &= \big(-a + (-b)\big) + (a + b) \\ &= (-a - b) + (a + b) \end{aligned}$$

จากกฎการตัดออกทางขวา

ได้ว่า $-(a + b) = -a - b$

10. $a0 = 0a = 0$

$$\begin{aligned} a0 + a0 &= a(0 + 0) \\ &= a0 \\ &= 0 + a0 \end{aligned}$$

ได้ว่า $a0 = 0$

$$\begin{aligned} 0a + 0a &= (0 + 0)a \\ &= 0a \\ &= 0 + 0a \end{aligned}$$

ได้ว่า $0a = 0$

11. $(-1)a = -a$

$$\begin{aligned} 0 &= 0a \\ &= \big(1 + (-1)\big)a \\ &= 1a + (-1)a \\ &= a + (-1)a \end{aligned}$$

นั่นคือ $(-1)a$ เป็นตัวผกผันการบวกของ a

ได้ว่า $(-1)a = -a$

12. $a(-b) = (-a)b = -(ab)$

$a(-b) + ab = a(-b + b) = a0 = 0$

ดังนั้น $a(-b)$ เป็นตัวผกผันการบวกของ ab

นั่นคือ $a(-b) = -(ab)$ ในทำนองเดียวกัน

$(-a)b + ab = (-a + a)b = 0b = 0$

ดังนั้น $(-a)b$ เป็นตัวผกผันการบวกของ ab

นั่นคือ $a(-b) = -(ab)$

13. $(-a)(-b) = ab$

$$\begin{aligned}(-a)(-b) &= -\big(a(-b)\big)\\ &= -\big(-(ab)\big)\\ &= ab\end{aligned}$$

14. ถ้า $c \neq 0$ แล้ว $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

ให้ $c \neq 0$

นั่นคือ จะมี c^{-1} ซึ่ง

$$\begin{aligned}\frac{a}{c} + \frac{b}{c} &= ac^{-1} + bc^{-1}\\ &= (a+b)c^{-1}\\ &= \frac{a+b}{c}\end{aligned}$$

15. ถ้า $c \neq 0$ แล้ว $a\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{ab}{c}$

ให้ $c \neq 0$

นั่นคือ จะมี c^{-1} ซึ่ง

$$\begin{aligned}a\left(\frac{b}{c}\right) &= a(bc^{-1})\\ &= (ab)c^{-1}\\ &= \frac{ab}{c}\end{aligned}$$

16. ถ้า $c \neq 0$ แล้ว $\frac{bc}{c} = b$

ให้ $c \neq 0$

นั่นคือ จะมี c^{-1} ซึ่ง

$$\begin{aligned}\frac{bc}{c} &= (bc)c^{-1}\\ &= b(cc^{-1})\\ &= b(1)\\ &= b\end{aligned}$$

17. ถ้า $c \neq 0$ และ $b \neq 0$ แล้ว $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$

ให้ $c \neq 0$ และ $b \neq 0$

นั่นคือ จะมี b^{-1} และ c^{-1} ซึ่ง

$$\begin{aligned}\frac{\frac{a}{b}}{c} &= (ab^{-1}) \cdot c^{-1}\\ &= a(b^{-1}c^{-1})\\ &= a(cb)^{-1}\\ &= a\left(\frac{1}{cb}\right)\\ &= \frac{a}{cb}\\ &= \frac{a}{bc}\end{aligned}$$

18. ถ้า $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ แล้ว $\frac{1}{ab} = \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}\right)$

ให้ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

นั่นคือ จะมี a^{-1} และ b^{-1} ซึ่ง

$$\begin{aligned}\frac{1}{ab} &= 1(ab)^{-1}\\ &= (ab)^{-1}\\ &= b^{-1}a^{-1}\\ &= \left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}\right)\\ &= \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}\right)\end{aligned}$$

19. ถ้า $b \neq 0$ และ $d \neq 0$ แล้ว $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

ให้ $b \neq 0$ และ $d \neq 0$ นั่นคือ จะมี b^{-1} และ d^{-1} ซึ่ง

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= ab^{-1} + cd^{-1} \\ &= (ab^{-1} + cd^{-1})1 \\ &= (ab^{-1} + cd^{-1})\big((bd)(bd)^{-1}\big) \\ &= \big((ab^{-1})(bd) + (cd^{-1})(bd)\big)(bd)^{-1} \\ &= \big((ab^{-1}b)d + (cd^{-1})(db)\big)(bd)^{-1} \\ &= \big((ab^{-1}b)d + (cd^{-1}d)b\big)(bd)^{-1} \\ &= (ad + cb)(bd)^{-1} \\ &= \frac{ad + bc}{bd}\end{aligned}$$

20. ถ้า $b \neq 0$ และ $d \neq 0$ แล้ว $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$

ให้ $b \neq 0$ และ $d \neq 0$ นั่นคือ จะมี b^{-1} และ d^{-1} ซึ่ง

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) &= (ab^{-1})(cd^{-1}) \\ &= (ab^{-1}c)d^{-1} \\ &= (acb^{-1})d^{-1} \\ &= (ac)(b^{-1}d^{-1}) \\ &= (ac)(db)^{-1} \\ &= \frac{ac}{db} \\ &= \frac{ac}{bd}\end{aligned}$$

21. ถ้า $b \neq 0$ และ $d \neq 0$ แล้ว $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$

ให้ $b \neq 0$ และ $d \neq 0$ นั่นคือ จะมี b^{-1} และ d^{-1} ซึ่ง

$$\begin{aligned}\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} &= \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1}{\frac{c}{d}}\right) \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1}{cd^{-1}}\right) \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{d^{-1}}\right) \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1}{c}\right)(d^{-1})^{-1} \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1}{c}\right)d = \frac{ad}{bc}\end{aligned}$$

แบบทดสอบย่อยประจำบทที่ 4

คำสั่ง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด

1. ข้อใดคือเงื่อนไขที่ทำให้ $(R,+,\cdot)$ เป็นริง

   ก. R ไม่เป็นเซตว่าง

   ข. $+$ เป็นการดำเนินการทวิภาค

   ค. $\cdot$ เป็นการดำเนินการทวิภาค

   ง. ถูกทุกข้อ

2. ข้อใดคือสมบัติของริง $(A,+,\cdot)$

   ก. $(A,+)$ เป็นกรุปสลับที่

   ข. $(A,\cdot)$ มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่

   ค. $(A,+,\cdot)$ มีสมบัติการแจกแจง

   ง. ถูกทุกข้อ

3. เราใช้สมบัติข้อใดในการพิสูจน์ข้อความ $a(-b) = (-a)b = -(ab)$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$

   ก. เอกลักษณ์การบวก

   ข. เอกลักษณ์การคูณ

   ค. ตัวผกผันการบวก

   ง. ถูกมากกว่า 1 ข้อ

4. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

   ข้อความที่ 1 $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ เป็นริง

   ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ เป็นริง

   ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

   ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

   ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

   ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

5. **พิจารณาข้อความต่อไปนี้**

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ เป็นริง

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ เป็นริง

ข้อความใดถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

6. เพราะเหตุใดเราสามารถเขียน $x^2 + x = x(x+1)$ เมื่อ $\mathbb{R}[x]$ แทนเซตของพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง

ก. $(\mathbb{R}[x], +)$ เป็นกึ่งกรุป

ข. $(\mathbb{R}[x], +)$ เป็นกรุป

ค. $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ เป็นริง

ง. ไม่มีข้อถูก

7. ข้อความ $x^2 + x = x(x+1)$ ใช้สมบัติทางคณิตศาสตร์ข้อใด

ก. การแจกแจง

ข. การสลับที่

ค. การเปลี่ยนกลุ่ม

ง. ไม่มีข้อถูก

8. ข้อใดคือเงื่อนไขที่ทำให้ $(F, +, \cdot)$ เป็นฟิลด์

ก. F ไม่เป็นเซตว่าง

ข. $+$ เป็นการดำเนินการทวิภาค

ค. $\cdot$ เป็นการดำเนินการทวิภาค

ง. ถูกทุกข้อ

9. ข้อใดคือสมบัติของฟิลด์ $(F,+,\cdot)$

ก. $(F,+)$ เป็นกรุปสลับที่

ข. $(F-\{0\},\cdot)$ เป็นกรุปสลับที่

ค. $(F,+,\cdot)$ มีสมบัติการแจกแจง

ง. ถูกทุกข้อ

10. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{R},+,\cdot)$ เป็นฟิลด์

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{C},+,\cdot)$ เป็นฟิลด์

ข้อความใดถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

11. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ เป็นฟิลด์

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ เป็นฟิลด์

ข้อความใดถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

12. กำหนด $a,b,c \in \mathbb{R}$ การพิสูจน์ข้อความ “ถ้า $a+c=b+c$ แล้ว $a=b$” ใช้สมบัติหรือกฎอะไรบ้างในการพิสูจน์

ก. ตัวผกผันการบวก

ข. เอกลักษณ์การบวก

ค. กฎการตัดออกทางขวา

ง. ถูกทุกข้อ

13. กำหนด $a, b, c \in \mathbb{R}$ โดยที่ $c \neq 0$ การพิสูจน์ข้อความ "ถ้า $ca = cb$ แล้ว $a = b$" ใช้สมบัติหรือกฎอะไรบ้างในการพิสูจน์

    ก. ตัวผกผันการคูณ

    ข. เอกลักษณ์การคูณ

    ค. กฎการตัดออกทางซ้าย

    ง. ถูกทุกข้อ

14. กำหนด $a \in \mathbb{R}$ การพิสูจน์ข้อความ "$-(-a) = a$".ใช้สมบัติหรือกฎอะไรบ้างในการพิสูจน์

    ก. ตัวผกผันการบวก

    ข. เอกลักษณ์การบวก

    ค. กฎการตัดออกทางซ้าย

    ง. ถูกทุกข้อ

15. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ เมื่อกำหนด $a, b, c \in \mathbb{R}$ โดยที่ $c \neq 0$

    ข้อความที่ 1 $0 = -0$ ต้องใช้เอกลักษณ์การบวกในขั้นตอนการพิสูจน์

    ข้อความที่ 2 $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ ต้องใช้ตัวผกผันการคูณในขั้นตอนการพิสูจน์

    ข้อความใดถูกต้อง

    ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

    ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

    ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

    ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

เฉลยแบบทดสอบย่อยประจำบทที่ 1

1. ก
2. ก
3. ง
4. ข
5. ง
6. ง
7. ข
8. ง
9. ข
10. ข
11. ก
12. ค
13. ค
14. ข
15. ข

เฉลยแบบทดสอบย่อยประจำบทที่ 2

1. ง
2. ข
3. ข
4. ง
5. ข
6. ข
7. ง
8. ก
9. ข
10. ง
11. ข
12. ก
13. ข
14. ง
15. ก

เฉลยแบบทดสอบย่อยประจำบทที่ 3

1. ง
2. ง
3. ข
4. ค
5. ก
6. ข
7. ค
8. ง
9. ก
10. ง
11. ง
12. ค
13. ค
14. ข
15. ข

เฉลยแบบทดสอบย่อยประจำบทที่ 4

1. ง
2. ค
3. ค
4. ก
5. ข
6. ค
7. ก
8. ง
9. ง
10. ก
11. ง
12. ค
13. ค
14. ก
15. ค

โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย สตูล อำเภอเมือง จังหวัดสตูล

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 16

แบบทดสอบหลังเรียน วิชาพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบปรนัยชนิด 4 ตัวเลือก ทั้งหมด จำนวน 20 ข้อ 20 คะแนน
2. เวลาในการทำแบบทดสอบทั้งสิ้น 1 ชั่วโมง
3. ให้นักเรียนทำเครื่องหมายกากบาทลงในกระดาษคำตอบ สำหรับข้อที่นักเรียนเลือกตอบ
4. ใช้ปากกาหมึกสีดำ หรือสีน้ำเงินในการทำแบบทดสอบ
5. หากมีการทดเลข อนุญาตให้ทดลงในแบบทดสอบ
6. ห้ามนำแบบทดสอบและกระดาษคำตอบออกนอกห้องสอบ
7. ไม่อนุญาตให้ผู้เข้าสอบออกจากห้องสอบก่อนหมดเวลาสอบ

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการดำเนินการทวิภาค
2. นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับกึ่งกรุป
3. นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับกรุป
4. นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับริง
5. นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับฟีลด์
6. นักเรียนสามารถประยุกต์ความรู้เรื่องพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้นได้

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียน

เรื่อง พีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น

คำสั่ง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด

1. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ กำหนดฟังก์ชัน $*$ จาก $A \times A \to A$ โดยที่ $a * b = b$
   เพื่อความสะดวกจึงขอเขียนเป็นตารางดังนี้

$*$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	3

ข้อใดไม่ถูกต้อง

ก. $1 * 2 = 2$

ข. $2 * 3 = 3 * 2$

ค. $(A,*)$มีสมบัติสลับที่

ง. $(A,*)$ไม่มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่

2. กำหนด $S = \{1, 2, 3\}$ และ $*$ เป็นการดำเนินการบน S นิยามดังนี้ $a * b =$ เศษเหลือที่เกิดจากการหาร b ด้วย a

ข้อใดถูกต้อง

ก. $1 * 3 = 1$

ข. $2 * 3 = 1$

ค. $3 * 2 = 1$

ง. $1 * 2 = 1$

3. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ กำหนดการดำเนินการ $*$ ดังนี้ $a * b = a + b - 3$ สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{R}$

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{R},*)$ มีสมบัติปิด

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{R},*)$ มีสมบัติสลับที่

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

4. ถ้า $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค แล้ว $*$ มีสมบัติข้อใด

ก. สมบัติปิด

ข. สมบัติเปลี่ยนกลุ่ม

ค. สมบัติสลับที่

ง. สมบัติการมีเอกลักษณ์และตัวผกผัน

5. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 การหารเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{R}$

ข้อความที่ 2 การลบเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

6. ถ้า $(S,*)$ เป็นกึ่งกรุปแล้ว ข้อความใดไม่ถูกต้อง

ก. S เป็นเซตไม่ว่าง และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค

ข. $(S,*)$ มีสมบัติปิด

ค. $(S,*)$ มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม

ง. $(S,*)$ มีสมบัติสลับที่

7. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{R},+)$ เป็นกึ่งกรุป

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z}^{+},-)$ เป็นกึ่งปรุป

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

8. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{R},\cdot)$ เป็นกึ่งกรุปสลับที่

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{N},+)$ เป็นกึ่งกรุปสลับที่

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

9. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(M_n, +)$ เป็นกรุป

ข้อความที่ 2 $(M_n, \cdot)$ เป็นกรุป

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

10.พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{C}, \cdot)$ เป็นกรุป

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z}^-, \cdot)$ เป็นกรุป

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

11.กำหนดเอกภพสัมพัทธ์คือ $\mathbb{R}$ จงหาตัวผกผันภายใต้การกระทำต่อไปนี้

$$a \odot b = a + b - 10$$

ก. $20 - a$

ข. $a - 20$

ค. $10 - a$

ง. $a - 10$

12.พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $a * b = 15 + a - b$ มีสมบัติสลับที่ สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{R}$

ข้อความที่ 2 $a * b = \frac{3a}{b+2}$ มีสมบัติสลับที่ สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{R}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

13.พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{Z}, -)$ เป็นกรุปสลับที่

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z}, +)$ เป็นกรุปสลับที่

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

14.พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{Z}, +)$ เป็นกรุปย่อยของ $(\mathbb{R}, +)$

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{N}, +)$ เป็นกรุปย่อยของ $(\mathbb{R}, +)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

15. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ไม่เป็นริง

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ไม่เป็นริง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

16. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ เป็นริง

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ เป็นริง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

17. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ เป็นฟิลด์

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ เป็นฟิลด์

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

18. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ไม่เป็นฟิลด์

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ไม่เป็นฟิลด์

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง

ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

19. กำหนด a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$ ใช้สมบัติทางคณิตศาสตร์ข้อใด

ก. การลบด้วยจำนวนที่เท่ากัน

ข. การบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน

ค. การคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน

ง. การหารด้วยจำนวนที่เท่ากัน

20. ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้องเมื่อกำหนด a, b และ c เป็นจำนวนจริง

ก. ถ้า $a + c = b + c$ แล้ว $a = b$

ข. ถ้า $ac = bc$ โดยที่ $c \neq 0$ แล้ว $a = b$

ค. ถ้า $ac = d$ แล้ว $a = \frac{d}{c}$

ง. ถ้า $a + b + c = 0$ แล้ว $a + b = -c$

เฉลยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียน

1. ง
2. ข
3. ก
4. ก
5. ค
6. ง
7. ข
8. ข
9. ข
10. ง
11. ค
12. ง
13. ค
14. ข
15. ง
16. ก
17. ข
18. ง
19. ค
20. ค