

มหาวิทยาลัยบูรพา
Burapha University

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

- **รายนามผู้เชี่ยวชาญในการตรวจเครื่องมือวิจัย**

รายนามผู้เชี่ยวชาญ

1. ผศ.ดร.รณสรพร ชื่นรัมย์ หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ต.คอหงส์
อ.หาดใหญ่ จ.สงขลา 90110
2. นายอนัน จันทรัตน์ ครู คศ.3
หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย สตูล
ต.ฉลุง อ.เมือง จ.สตูล 91140
3. นายเจษฎา เลี่ยนกั้วา ครู คศ.3
โรงเรียนนวิชรธรรมสถิตย์
ต.ตำนาค อ.เมือง จ.พัทลุง 93000



ที่ ศธ ๖๖๑๕.๑/ว ๐๔๒๖

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
จ.ชลบุรี ๒๐๑๓๓

๖๗ มิถุนายน พ.ศ. ๒๕๕๖

เรื่อง ขอความอนุเคราะห์ตรวจสอบเครื่องมือวิทยานิพนธ์

เรียน รองศาสตราจารย์ ดร.รณสรณ์ ชินรัมย์

ด้วยนายอิสมาแอล หมาคโตะไล่ะ นิสิตระดับปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา แผน ก ภาคพิเศษ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา กำลังดำเนินการทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง พืชคณิตนามธรรมเบื้องต้นสำหรับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อารักษ์ ชัยวร เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาหลัก ในการนี้ เพื่อให้การทำวิทยานิพนธ์ดำเนินไปด้วยความเรียบร้อย และมีประสิทธิภาพ คณะวิทยาศาสตร์ จึงขอความอนุเคราะห์ท่านตรวจสอบเครื่องมือวิทยานิพนธ์

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาให้ความอนุเคราะห์ด้วย จักขอบคุณยิ่ง

ขอแสดงความนับถือ


(ผู้ช่วยศาสตราจารย์เอกรัฐ ศรีสุข)

รองคณบดีฝ่ายวิจัยและบัณฑิตศึกษา ปฏิบัติการแทน
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

สำนักงานคณบดี ฝ่ายวิจัยและบัณฑิตศึกษา

โทรศัพท์ ๐๓๘-๑๐๓๐๘๕

โทรสาร ๐๓๘-๑๐๓๐๕๑



ที่ ศธ ๖๖๑๕.๓/๑ ๐๕๕๖

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
ค.แสนสุข อ.เมือง จ.ชลบุรี ๒๐๑๓๑

๑๗ มิถุนายน พ.ศ. ๒๕๕๖

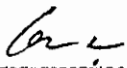
เรื่อง ขอความอนุเคราะห์ตรวจสอบเครื่องมือวิทยานิพนธ์

เรียน นายอนันต์ จันทร์

ด้วยนายอิสมาแอต หนาคโตะโส๊ะ นิสิตระดับปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา
แผน ก ภาคพิเศษ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา กำลังดำเนินการทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง
พืชคณิตนามธรรมเบื้องต้นสำหรับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.
อารีรักษ์ ชัยวร เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาหลัก ในการนี้ เพื่อให้การทำวิทยานิพนธ์ดำเนินไปด้วยความเรียบร้อย
และมีประสิทธิภาพ คณะวิทยาศาสตร์ จึงขอความอนุเคราะห์ท่านตรวจสอบเครื่องมือวิทยานิพนธ์

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาให้ความอนุเคราะห์ด้วย จักขอบคุณยิ่ง

ขอแสดงความนับถือ


(ผู้ช่วยศาสตราจารย์เอกรัฐ ศรีสุข)

รองคณบดีฝ่ายวิจัยและบัณฑิตศึกษา ปฏิบัติการแทน
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

สำนักงานคณบดี ฝ่ายวิจัยและบัณฑิตศึกษา

โทรศัพท์ ๐๓๘-๑๐๓๐๘๕

โทรสาร ๐๓๘-๑๐๓๐๕๑



ที่ ศธ ๖๖๑๕.๑/ว ๐๙๒๖

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
ต.แสนสุข อ.เมือง จ.ชลบุรี ๒๐๑๓๑

๑๗ มิถุนายน พ.ศ. ๒๕๕๖

เรื่อง ขอความอนุเคราะห์ตรวจสอบเครื่องมือวิทยานิพนธ์

เรียน นายเจษฎา เลี่ยนกัศว

ด้วยนายอัสมาแอล หมดโค๊ะโละ ปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา
แผน ก ภาคพิเศษ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา กำลังดำเนินการทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง
พืชคณิตนามธรรมเบื้องต้นสำหรับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.
อารีรักษ์ ชัยวร เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาหลัก ในการนี้ เพื่อให้การทำวิทยานิพนธ์ดำเนินไปด้วยความเรียบร้อย
และมีประสิทธิภาพ คณะวิทยาศาสตร์ จึงขอความอนุเคราะห์ท่านตรวจสอบเครื่องมือวิทยานิพนธ์

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาให้ความอนุเคราะห์ด้วย จักขอบคุณยิ่ง

ขอแสดงความนับถือ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์เอกวิธ ศรีสุข)

รองคณบดีฝ่ายวิจัยและบัณฑิตศึกษา ปฏิบัติการแทน
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

สำนักงานคณบดี ฝ่ายวิจัยและบัณฑิตศึกษา

โทรศัพท์ ๐๓๘-๑๐๓๐๘๕

โทรสาร ๐๓๘-๑๐๓๐๕๑

ภาคผนวก ข

- ตารางแสดงระดับความเหมาะสมของบทเรียนเรื่องพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น โดยผู้เชี่ยวชาญ 3 คน
- ตารางแสดงระดับความเหมาะสมของบทเรียนเรื่องพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น โดยนักศึกษา 10 คน
- ตารางแสดงดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวังของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย
- ตารางแสดงค่าความยากง่ายของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย
- แบบประเมินค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ของผู้ทรงคุณวุฒิที่มีต่อแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น
- แบบประเมินค่าความยากง่าย ของผู้ทรงคุณวุฒิที่มีต่อแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น

ตารางที่ 7 ระดับความเหมาะสมของบทเรียนเรื่องพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น โดยผู้เชี่ยวชาญ 3 คน

ข้อที่/คนที่	1	2	3
1. บทเรียนมีความสอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง	4	5	5
2. แบบทดสอบย่อย มีความเหมาะสม	5	5	5
3. จำนวนตัวอย่างในบทเรียนมีความเหมาะสม	5	4	5
4. องค์ประกอบทั้งหมดของบทเรียนมีความเหมาะสม	4	5	5
5. เนื้อหาในบทเรียนสอดคล้องกับหลักสูตรสถานศึกษา	4	5	5
6. ระยะเวลาที่ดำเนินการสอนมีความเหมาะสม	4	5	5
7. บทเรียนมีประโยชน์ต่อผู้สอน และผู้เรียน	5	4	5
เฉลี่ย	4.71		

จากตารางที่ 7 ค่าเฉลี่ยของระดับความเหมาะสมของบทเรียน เรื่องพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น สำหรับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย มีค่าเท่ากับ 4.71 ซึ่งแปลผลได้ว่าบทเรียนเล่มนี้มีความเหมาะสมอยู่ในระดับมากที่สุด

ตารางที่ 8 ระดับความเหมาะสมของบทเรียนเรื่องพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น โดยนักศึกษา 10 คน

ข้อที่/คนที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1. บทเรียนมีความสอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง	4	5	5	5	4	5	4	5	5	5
2. แบบทดสอบย่อย มีความเหมาะสม	5	4	4	4	4	4	5	5	5	4
3. จำนวนตัวอย่างในบทเรียนมีความเหมาะสม	4	5	5	4	4	5	5	5	5	5
4. องค์ประกอบทั้งหมดของบทเรียนมีความเหมาะสม	4	5	4	4	4	4	5	5	5	5
5. เนื้อหาในบทเรียนสอดคล้องกับหลักสูตรสถานศึกษา	4	5	5	4	4	5	5	4	5	4
6. ระยะเวลาที่ดำเนินการสอนมีความเหมาะสม	4	5	4	4	4	5	4	5	5	5
7. บทเรียนมีประโยชน์ต่อผู้สอน และผู้เรียน	4	5	5	5	5	4	5	5	5	5
เฉลี่ย	4.59									

จากตารางที่ 8 ค่าเฉลี่ยของระดับความเหมาะสมของบทเรียน เรื่องพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น สำหรับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่ประเมิน โดยนักศึกษาคณาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่ มีค่าเท่ากับ 4.59 ซึ่งแปลผลได้ว่าบทเรียนเล่มนี้มีความเหมาะสมอยู่ในระดับมากที่สุด

ตารางที่ 9 ดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวังของแบบทดสอบ
วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องพืชคณิตนามธรรมเบื้องต้น สำหรับนักเรียนระดับชั้น
มัธยมศึกษาตอนปลาย

ข้อที่	คะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			ดัชนีความสอดคล้อง (IOC)	คุณภาพของ แบบทดสอบ
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3		
1	1	1	-1	0.33	ปรับปรุง
2	1	1	1	1.00	ใช้ได้
3	1	1	1	1.00	ใช้ได้
4	1	1	1	1.00	ใช้ได้
5	0	1	1	0.67	ใช้ได้
6	1	1	1	1.00	ใช้ได้
7	1	1	0	0.67	ใช้ได้
8	1	1	1	1.00	ใช้ได้
9	1	1	-1	0.33	ปรับปรุง
10	1	1	1	1.00	ใช้ได้
11	1	1	1	1.00	ใช้ได้
12	1	1	1	1.00	ใช้ได้
13	1	1	1	1.00	ใช้ได้
14	1	1	0	0.67	ใช้ได้
15	1	1	1	1.00	ใช้ได้
16	1	1	1	1.00	ใช้ได้
17	1	1	1	1.00	ใช้ได้
18	1	1	1	1.00	ใช้ได้
19	1	1	1	1.00	ใช้ได้
20	1	1	1	1.00	ใช้ได้
21	1	1	1	1.00	ใช้ได้
22	1	1	0	0.67	ใช้ได้
23	0	1	1	0.67	ใช้ได้
24	1	1	1	1.00	ใช้ได้

ตารางที่ 9 (ต่อ)

ข้อที่	คะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			ดัชนีความสอดคล้อง (IOC)	คุณภาพของ แบบทดสอบ
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3		
25	1	1	1	1.00	ใช้ได้
26	1	1	1	1.00	ใช้ได้
27	1	1	1	1.00	ใช้ได้
28	1	1	0	0.67	ใช้ได้
29	0	1	1	0.67	ใช้ได้
30	1	1	1	1.00	ใช้ได้
31	1	1	1	1.00	ใช้ได้
32	1	1	1	1.00	ใช้ได้
33	1	1	1	1.00	ใช้ได้
34	1	1	1	1.00	ใช้ได้
35	1	1	1	1.00	ใช้ได้
36	1	0	1	0.67	ใช้ได้
37	1	1	1	1.00	ใช้ได้
38	1	1	1	1.00	ใช้ได้
39	1	1	1	1.00	ใช้ได้
40	1	1	1	1.00	ใช้ได้

จากตารางที่ 9 เราสามารถนำข้อสอบมาใช้ได้เลยทั้งสิ้น 38 ข้อ และต้องปรับปรุงเพิ่มเติมอีก 2 ข้อ โดยที่ผู้วิจัยเลือกมา 20 ข้อ เพื่อนำมาใช้ทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน โดยถือหลักว่าข้อสอบต้องครอบคลุมผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง สามารถรายละเอียดของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ได้ที่ภาคผนวก ง

ตารางที่ 10 ค่าความยากง่ายของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องพีชคณิตนามธรรม
เบื้องต้น สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย

ข้อที่	คะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			ระดับค่าความยากง่าย	การแปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3		
1	3	2	3	2.67	ปานกลาง
2	4	4	4	4.00	ยาก
3	3	1	3	2.33	ง่าย
4	3	3	4	3.33	ปานกลาง
5	4	4	4	4.00	ยาก
6	4	2	4	3.33	ปานกลาง
7	3	2	3	2.67	ปานกลาง
8	4	3	4	3.67	ยาก
9	3	2	3	2.67	ปานกลาง
10	3	3	3	3.00	ปานกลาง
11	4	3	4	3.67	ยาก
12	3	2	3	2.67	ปานกลาง
13	4	3	4	3.67	ยาก
14	4	3	4	3.67	ยาก
15	3	3	4	3.33	ปานกลาง
16	3	3	4	3.33	ปานกลาง
17	4	4	4	4.00	ยาก
18	4	3	4	3.67	ยาก
19	4	3	4	3.67	ยาก
20	4	4	4	4.00	ยาก
21	3	4	4	3.67	ยาก
22	3	4	3	3.33	ปานกลาง
23	3	3	3	3.00	ปานกลาง
24	3	3	3	3.00	ปานกลาง

ตารางที่ 10 (ต่อ)

ข้อที่	คะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			ระดับค่าความยากง่าย	การแปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3		
25	4	3	4	3.67	ยาก
26	3	3	4	3.33	ปานกลาง
27	4	4	4	4.00	ยาก
28	3	3	4	3.33	ปานกลาง
29	3	3	4	3.33	ปานกลาง
30	4	3	4	3.67	ยาก
31	4	3	4	3.67	ยาก
32	4	3	4	3.67	ยาก
33	2	3	3	2.67	ปานกลาง
34	3	3	4	3.33	ปานกลาง
35	4	3	4	3.67	ยาก
36	3	1	2	2.00	ง่าย
37	3	1	2	2.00	ง่าย
38	3	1	2	2.00	ง่าย
39	3	1	2	2.00	ง่าย
40	4	3	4	3.33	ยาก

จากตารางที่ 10 ค่าความยากง่ายที่ปรากฏ เราสามารถนำมาใช้ในการจัดทำแบบทดสอบ
วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนได้ โดยผู้วิจัยเลือกข้อสอบ 20 ข้อที่สอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
เพื่อนำมาใช้ทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ผู้วิจัยเลือกข้อ 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 17,
18, 23, 26, 28, 30, 31, 32, 34, 35, 38, 40 สามารถดูรายละเอียดของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์
ทางการเรียนได้ที่ภาคผนวก ง

**แบบประเมินค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ของผู้ทรงคุณวุฒิที่มีต่อ
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
เรื่องพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น**

คำชี้แจง ขอให้ท่านผู้เชี่ยวชาญได้กรุณาแสดงความคิดเห็นของท่านที่มีต่อแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น โดยใส่เครื่องหมาย (✓) ลงในช่องความคิดเห็นของท่านพร้อมเขียนข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ เพื่อการนำไปพิจารณาปรับปรุงในขั้นตอนต่อไป

เกณฑ์การประเมิน

สัญลักษณ์	ความหมาย
-1	ท่านแน่ใจแล้วว่าข้อสอบข้อนั้น ไม่สอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
0	ท่านไม่แน่ใจว่าข้อสอบข้อนั้น สอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
+1	ท่านแน่ใจแล้วว่าข้อสอบข้อนั้น สอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง



โรงเรียนจุฬาราชวิทยาลัย สกลนคร อำเภอเมือง จังหวัดสกลนคร

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 16

แบบทดสอบหลังเรียน วิชาพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบปรนัยชนิด 4 ตัวเลือก ทั้งหมด จำนวน 20 ข้อ 20 คะแนน
2. เวลาในการทำแบบทดสอบทั้งสิ้น 1 ชั่วโมง
3. ให้นักเรียนทำเครื่องหมายกากบาทลงในกระดาษคำตอบ สำหรับข้อที่นักเรียนเลือกตอบ
4. ใช้ปากกาหมึกสีดำ หรือสีน้ำเงินในการทำแบบทดสอบ
5. หากมีการทศเลข อนุญาตให้ทศลงในแบบทดสอบ
6. ห้ามนำแบบทดสอบและกระดาษคำตอบออกนอกห้องสอบ
7. ไม่อนุญาตให้ผู้เข้าสอบออกจากห้องสอบก่อนหมดเวลาสอบ

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการดำเนินการทวิภาค
2. นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับกึ่งกรุป
3. นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับกรุป
4. นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับริง
5. นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับฟิลด์
6. นักเรียนสามารถประยุกต์ความรู้เรื่องพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้นได้

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียน

เรื่อง พิชิตคณิตนามธรรมเบื้องต้น

คำสั่ง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด

1. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ กำหนดฟังก์ชัน $*$ จาก $A \times A \rightarrow A$ โดยที่ $a * b = b$ เพื่อความสะดวกจึงขอเขียนเป็นตารางดังนี้

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	3

ข้อใดไม่ถูกต้อง

- ก. $1 * 2 = 2$
ข. $2 * 3 = 3 * 2$
ค. $(A, *)$ มีสมบัติสลับที่
ง. $(A, *)$ ไม่มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับการดำเนินการทวิภาค

IOC	+1	+1	+1
-----	----	----	----

2. กำหนด $S = \{1, 2, 3\}$ และ $*$ เป็นการดำเนินการบน S นิยามดังนี้ $a * b =$ เศษเหลือที่เกิดจากการหาร b ด้วย a

ข้อใดถูกต้อง

- ก. $1 * 3 = 1$
ข. $2 * 3 = 1$
ค. $3 * 2 = 1$
ง. $1 * 2 = 1$

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับการดำเนินการทวิภาค

IOC	+1	+1	+1
-----	----	----	----

3. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ กำหนดการดำเนินการ $*$ ดังนี้ $a * b = a + b - 3$ สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{R}$

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{R}, *)$ มีสมบัติปิด

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{R}, *)$ มีสมบัติสลับที่

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับการดำเนินการทวิภาค

IOC	+1	+1	+1
-----	----	----	----

4. ถ้า $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค แล้ว $*$ มีสมบัติข้อใด

- ก. สมบัติปิด
- ข. สมบัติเปลี่ยนกลุ่ม
- ค. สมบัติสลับที่
- ง. สมบัติการมีเอกลักษณ์และตัวผกผัน

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับการดำเนินการทวิภาค

IOC	+1	+1	+1
-----	----	----	----

5. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 การหารเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{R}$

ข้อความที่ 2 การลบเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับการดำเนินการทวิภาค

IOC	+1	+1	+1
-----	----	----	----

6. ถ้า $(S,*)$ เป็นกึ่งกรุปแล้ว ข้อความใดไม่ถูกต้อง

- ก. S เป็นเซตไม่ว่าง และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค
- ข. $(S,*)$ มีสมบัติปิด
- ค. $(S,*)$ มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม
- ง. $(S,*)$ มีสมบัติสลับที่

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับกึ่งกรุป

IOC	+1	+1	0
-----	----	----	---

7. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{R}, +)$ เป็นกึ่งกรุป

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z}^+, -)$ เป็นกึ่งกรุป

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับกึ่งกรุป

IOC	+1	+1	+1
-----	----	----	----

8. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{R}, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุปสลับที่

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{N}, +)$ เป็นกึ่งกรุปสลับที่

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับกึ่งกรุป

IOC	+1	+1	+1
-----	----	----	----

9. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 ($M_n, +$) เป็นกรุปข้อความที่ 2 ($M_n, \cdot$) เป็นกรุป

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
 ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
 ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
 ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับกรุป

IOC	+1	+1	+1
-----	----	----	----

10. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 ($\mathbb{C}, \cdot$) เป็นกรุปข้อความที่ 2 ($\mathbb{Z}^-, \cdot$) เป็นกรุป

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
 ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
 ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
 ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับกรุป

IOC	+1	+1	+1
-----	----	----	----

11. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์คือ $\mathbb{R}$ จงหาตัวผกผันภายใต้การกระทำต่อไปนี้

$$a \odot b = a + b - 10$$

- ก. $20 - a$
 ข. $a - 20$
 ค. $10 - a$
 ง. $a - 10$

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับกรุป

IOC	+1	+1	+1
-----	----	----	----

12. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $a * b = 15 + a - b$ มีสมบัติสลับที่ สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{R}$

ข้อความที่ 2 $a * b = \frac{3a}{b+2}$ มีสมบัติสลับที่ สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{R}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับกรุป

IOC	+1	+1	0
-----	----	----	---

13. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{Z}, -)$ เป็นกรุปสลับที่

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z}, +)$ เป็นกรุปสลับที่

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับกรุป

IOC	0	+1	+1
-----	---	----	----

14. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{Z}, +)$ เป็นกรุปย่อยของ $(\mathbb{R}, +)$

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{N}, +)$ เป็นกรุปย่อยของ $(\mathbb{R}, +)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับกรุป

IOC	+1	+1	+1
-----	----	----	----

15. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ไม่เป็นริงข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ไม่เป็นริง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
 ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
 ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
 ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับริง

IOC	+1	+1	+1
-----	----	----	----

16. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ เป็นริงข้อความที่ 2 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ เป็นริง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
 ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
 ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
 ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับริง

IOC	+1	+1	+1
-----	----	----	----

17. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ เป็นฟีลด์ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ เป็นฟีลด์

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
 ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
 ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
 ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับฟีลด์

IOC	+1	+1	+1
-----	----	----	----

18. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 ($\mathbb{Q}, +, \cdot$) ไม่เป็นฟิลด์

ข้อความที่ 2 ($\mathbb{Z}, +, \cdot$) ไม่เป็นฟิลด์

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับฟิลด์

IOC	+1	+1	+1
-----	----	----	----

19. กำหนด a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$ ใช้สมบัติทางคณิตศาสตร์

ข้อใด

- ก. การลบด้วยจำนวนที่เท่ากัน
- ข. การบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน
- ค. การคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน
- ง. การหารด้วยจำนวนที่เท่ากัน

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนประยุกต์ความรู้เรื่อง
พีชคณิตนามธรรมเบื้องต้นได้

IOC	+1	+1	+1
-----	----	----	----

20. ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้องเมื่อกำหนด a, b และ c เป็นจำนวนจริง

- ก. ถ้า $a + c = b + c$ แล้ว $a = b$
- ข. ถ้า $ac = bc$ โดยที่ $c \neq 0$ แล้ว $a = b$
- ค. ถ้า $ac = d$ แล้ว $a = \frac{d}{c}$
- ง. ถ้า $a + b + c = 0$ แล้ว $a + b = -c$

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนประยุกต์ความรู้เรื่อง
พีชคณิตนามธรรมเบื้องต้นได้

IOC	+1	+1	+1
-----	----	----	----

เฉลยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียน

1. ง
2. ข
3. ก
4. ก
5. ค
6. ง
7. ข
8. ข
9. ข
10. ง
11. ค
12. ง
13. ค
14. ข
15. ง
16. ก
17. ข
18. ง
19. ค
20. ค

แบบประเมินค่าความยากง่าย ของผู้ทรงคุณวุฒิที่มีต่อ
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
เรื่องพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น

คำชี้แจง ขอให้ท่านผู้เชี่ยวชาญได้กรุณาแสดงความคิดเห็นของท่านในด้านความยากง่ายที่มีต่อแบบทดสอบ
วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น โดยใส่เครื่องหมาย (✓) ลงใน
ช่องความคิดเห็นของท่าน

เกณฑ์การประเมิน

สัญลักษณ์	ความหมาย
1	ข้อสอบข้อนั้นง่ายมาก
2	ข้อสอบข้อนั้นง่าย
3	ข้อสอบข้อนั้นมีความยากระดับปานกลาง
4	ข้อสอบข้อนั้นยาก
5	ข้อสอบข้อนั้นยากมาก



โรงเรียนจุฬาราชวิทยาลัย สตูล อำเภอเมือง จังหวัดสตูล

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 16

แบบทดสอบหลังเรียน วิชาพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

คำชี้แจง

8. แบบทดสอบปรนัยชนิด 4 ตัวเลือก ทั้งหมด จำนวน 20 ข้อ 20 คะแนน
9. เวลาในการทำแบบทดสอบทั้งสิ้น 1 ชั่วโมง
10. ให้นักเรียนทำเครื่องหมายกากบาทลงในกระดาษคำตอบ สำหรับข้อที่นักเรียนเลือกตอบ
11. ใช้ปากกาหมึกสีดำ หรือสีน้ำเงินในการทำแบบทดสอบ
12. หากมีการทดเลข อนุญาตให้ทกลงในแบบทดสอบ
13. ห้ามนำแบบทดสอบและกระดาษคำตอบออกนอกห้องสอบ
14. ไม่อนุญาตให้ผู้เข้าสอบออกจากห้องสอบก่อนหมดเวลาสอบ

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการดำเนินการทวิภาค
2. นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับกึ่งกรุป
3. นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับกรุป
4. นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับริง
5. นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับฟิลด์
6. นักเรียนสามารถประยุกต์ความรู้เรื่องพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้นได้

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียน

เรื่อง พีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น

คำสั่ง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด

1. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ กำหนดฟังก์ชัน $*$ จาก $A \times A \rightarrow A$ โดยที่ $a * b = b$ เพื่อความสะดวกจึงขอเขียนเป็นตารางดังนี้

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	3

ข้อใดไม่ถูกต้อง

- ก. $1 * 2 = 2$
- ข. $2 * 3 = 3 * 2$
- ค. $(A, *)$ มีสมบัติสลับที่
- ง. $(A, *)$ ไม่มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ

เกี่ยวกับการดำเนินการทวิภาค

ความยากง่าย	4	4	4
-------------	---	---	---

2. กำหนด $S = \{1, 2, 3\}$ และ $*$ เป็นการดำเนินการบน S นิยามดังนี้ $a * b =$ เศษเหลือที่เกิดจากการหาร b ด้วย a

ข้อใดถูกต้อง

- ก. $1 * 3 = 1$
- ข. $2 * 3 = 1$
- ค. $3 * 2 = 1$
- ง. $1 * 2 = 1$

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ

เกี่ยวกับการดำเนินการทวิภาค

ความยากง่าย	3	1	3
-------------	---	---	---

3. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ กำหนดการดำเนินการ $*$ ดังนี้ $a * b = a + b - 3$ สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{R}$

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{R}, *)$ มีสมบัติปิด

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{R}, *)$ มีสมบัติสลับที่

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับการดำเนินการทวิภาค

ความยากง่าย	3	3	4
-------------	---	---	---

4. ถ้า $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค แล้ว $*$ มีสมบัติข้อใด

- ก. สมบัติปิด
- ข. สมบัติเปลี่ยนกลุ่ม
- ค. สมบัติสลับที่
- ง. สมบัติการมีเอกลักษณ์และตัวผกผัน

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับการดำเนินการทวิภาค

ความยากง่าย	4	2	4
-------------	---	---	---

5. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 การหารเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{R}$

ข้อความที่ 2 การลบเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับการดำเนินการทวิภาค

ความยากง่าย	4	3	4
-------------	---	---	---

6. ถ้า $(S,*)$ เป็นกึ่งกรุปแล้ว ข้อความใดไม่ถูกต้อง

- ก. S เป็นเซตไม่ว่าง และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค
- ข. $(S,*)$ มีสมบัติปิด
- ค. $(S,*)$ มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม
- ง. $(S,*)$ มีสมบัติสลับที่

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับกึ่งกรุป

ความยากง่าย	3	3	2
-------------	---	---	---

7. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{R}, +)$ เป็นกึ่งกรุป

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z}^+, -)$ เป็นกึ่งกรุป

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับกึ่งกรุป

ความยากง่าย	3	3	3
-------------	---	---	---

8. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{R}, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุปสลับที่

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{N}, +)$ เป็นกึ่งกรุปสลับที่

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับกึ่งกรุป

ความยากง่าย	3	2	3
-------------	---	---	---

9. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(M_n, +)$ เป็นกรุปข้อความที่ 2 $(M_n, \cdot)$ เป็นกรุป

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
 ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
 ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
 ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับกรุป

ความยากง่าย	4	4	4
-------------	---	---	---

10. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{C}, \cdot)$ เป็นกรุปข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z}^-, \cdot)$ เป็นกรุป

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
 ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
 ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
 ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับกรุป

ความยากง่าย	4	3	4
-------------	---	---	---

11. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์คือ $\mathbb{R}$ จงหาตัวผกผันภายใต้การกระทำต่อไปนี้

$$a \odot b = a + b - 10$$

- ก. $20 - a$
 ข. $a - 20$
 ค. $10 - a$
 ง. $a - 10$

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับกรุป

ความยากง่าย	3	3	3
-------------	---	---	---

12. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $a * b = 15 + a - b$ มีสมบัติสลับที่ สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{R}$

ข้อความที่ 2 $a * b = \frac{3a}{b+2}$ มีสมบัติสลับที่ สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{R}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับกรุป

ความยากง่าย	4	3	3
-------------	---	---	---

13. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{Z}, -)$ เป็นกรุปสลับที่

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z}, +)$ เป็นกรุปสลับที่

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับกรุป

ความยากง่าย	3	3	4
-------------	---	---	---

14. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{Z}, +)$ เป็นกรุปย่อยของ $(\mathbb{R}, +)$

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{N}, +)$ เป็นกรุปย่อยของ $(\mathbb{R}, +)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับกรุป

ความยากง่าย	4	3	4
-------------	---	---	---

15. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ไม่เป็นริงข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ไม่เป็นริง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
 ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
 ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
 ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับริง

ความยากง่าย

4

3

4

16. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ เป็นริงข้อความที่ 2 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ เป็นริง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
 ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
 ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
 ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับริง

ความยากง่าย

4

3

4

17. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ เป็นฟีลด์ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ เป็นฟีลด์

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
 ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
 ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
 ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ
เกี่ยวกับฟีลด์

ความยากง่าย

3

3

4

18. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ไม่เป็นฟิลด์

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ไม่เป็นฟิลด์

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับฟิลด์

ความยากง่าย	3	4	4
-------------	---	---	---

19. กำหนด a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$ ใช้สมบัติทางคณิตศาสตร์

ข้อใด

- ก. การลบด้วยจำนวนที่เท่ากัน
- ข. การบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน
- ค. การคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน
- ง. การหารด้วยจำนวนที่เท่ากัน

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนประยุกต์ความรู้เรื่องพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้นได้

ความยากง่าย	3	1	2
-------------	---	---	---

20. ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้องเมื่อกำหนด a, b และ c เป็นจำนวนจริง

- ก. ถ้า $a + c = b + c$ แล้ว $a = b$
- ข. ถ้า $ac = bc$ โดยที่ $c \neq 0$ แล้ว $a = b$
- ค. ถ้า $ac = d$ แล้ว $a = \frac{d}{c}$
- ง. ถ้า $a + b + c = 0$ แล้ว $a + b = -c$

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนประยุกต์ความรู้เรื่องพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้นได้

ความยากง่าย	4	3	4
-------------	---	---	---

เฉลยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียน

1. ง
2. ข
3. ก
4. ก
5. ค
6. ง
7. ข
8. ข
9. ข
10. ง
11. ค
12. ง
13. ค
14. ข
15. ง
16. ก
17. ข
18. ง
19. ค
20. ค

มหาวิทยาลัยบูรพา
Burapha University

ภาคผนวก ค

- ตารางแสดงคะแนนจากแบบทดสอบย่อย เรื่องพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น
- ตารางแสดงคะแนนจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น

ตารางที่ 11 คะแนนจากแบบทดสอบย่อย เรื่องพืชชนิดนามธรรมเบื้องต้น

คนที่	คะแนนจากแบบทดสอบย่อย (ครั้งละ 15 คะแนน)			
	ครั้งที่ 1	ครั้งที่ 2	ครั้งที่ 3	ครั้งที่ 4
1	11	12	10	9
2	12	13	10	11
3	14	14	10	12
4	13	13	7	5
5	13	13	10	10
6	11	13	9	8
7	13	13	10	8
8	13	9	3	7
9	12	12	12	9
10	11	12	8	9
11	15	11	9	12
12	12	11	5	5
13	11	14	5	6
14	13	9	11	9
15	13	11	10	7
16	13	12	9	9
17	10	13	10	7
18	10	12	12	11
19	14	10	11	10
20	15	9	10	8
21	12	12	8	10
22	13	13	9	11
23	10	14	12	9
24	13	11	9	11
รวม	297	286	219	222

ตารางที่ 12 คะแนนแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น

คนที่	คะแนนจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน (ครั้งละ 20 คะแนน)	
	ก่อนเรียน	หลังเรียน
1	2	16
2	7	8
3	2	11
4	6	15
5	7	16
6	4	16
7	5	13
8	3	12
9	6	16
10	7	15
11	7	12
12	5	15
13	4	11
14	4	14
15	6	12
16	5	16
17	1	14
18	5	14
19	6	14
20	3	14
21	1	14
22	5	16
23	3	11
24	3	14

รวม	107	329
-----	-----	-----

การหาประสิทธิภาพของบทเรียน (E_1/E_2) ตามเกณฑ์ 65/65 จากตารางที่ 11 และตารางที่ 12 คำนวณได้ดังนี้

$$E_1 = \frac{\frac{\sum x}{N} \times 100}{A}$$

$$= \frac{\frac{297 + 286 + 219 + 222}{24} \times 100}{60}$$

$$= 71.11$$

$$E_2 = \frac{\frac{\sum x}{N} \times 100}{B}$$

$$= \frac{\frac{329}{24} \times 100}{20}$$

$$= 68.54$$

ดังนั้น ประสิทธิภาพของบทเรียนเรื่องพืชชนิดนามธรรมเบื้องต้น สำหรับนักเรียน ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย เท่ากับ 71.11/68.54

การหาดัชนีประสิทธิผล จากตารางที่ 12 คำนวณได้ดังนี้

$$\text{ดัชนีประสิทธิผล} = \frac{\text{ผลรวมคะแนนทดสอบหลังเรียน} - \text{ผลรวมคะแนนทดสอบก่อนเรียน}}{(\text{จำนวนผู้เรียน} \times \text{คะแนนเต็ม}) - \text{ผลรวมคะแนนทดสอบก่อนเรียน}}$$

$$= \frac{329 - 107}{(24 \times 20) - 107}$$

$$= 0.60$$

ดังนั้น คำนีประสิทธิผลหลังจากเรียนโดยใช้บทเรียนเรื่องพืชคณิตนามธรรมเบื้องต้น
สำหรับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย เท่ากับ 0.60 หรือคิดเป็นร้อยละ 60

มหาวิทยาลัยบูรพา
Burapha University

ภาคผนวก ง

- บทเรียนเรื่องพิษคณิตนามธรรมเบื้องต้น สำหรับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย
- แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องพิษคณิตนามธรรมเบื้องต้น สำหรับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย

บทเรียน

เรื่อง พืชคณิตนามธรรมเบื้องต้น

สำหรับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย

อิสมาแอล หมาดโตะโตะ

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย สตูล

ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2556

คำนำ

หนังสือ พีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น สำหรับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย เล่มนี้ ผู้เขียนรวบรวมขึ้นเพื่อเป็นการแนะนำพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น(ELEMENTARY ABSTRACT ALGEBRA) ซึ่งเป็นสาขาหนึ่งของวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งเหมาะสมกับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่เรียนในแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ และคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์ประยุกต์ รวมถึงบุคคลทั่วไปที่มีความสนใจ

หนังสือเล่มนี้ประกอบด้วย 4 บท ซึ่งแต่ละบทจะเป็นพื้นฐานในการศึกษาบทต่อไป นอกจากนี้ ผู้เรียนสามารถศึกษาได้เข้าใจมากยิ่งขึ้นถ้าได้ทำแบบฝึกหัดท้ายบทเพิ่มเติมโดยเนื้อหาประกอบด้วย

บทที่ 1 ประกอบด้วยเนื้อหาเรื่องการดำเนินการทวิภาค

บทที่ 2 ประกอบด้วยเนื้อหาเรื่องกึ่งกรุป

บทที่ 3 ประกอบด้วยเนื้อหาเรื่องกรุป

บทที่ 4 ประกอบด้วยเนื้อหาเรื่องริง และฟีลด์

สุดท้ายนี้ ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณบิดา และมารดาเป็นอย่างสูง สำหรับความรักและกำลังใจ ตลอดจน ขอบขอบคุณอาจารย์ของผู้เขียนทุกท่านที่ทำให้ผู้เขียนรัก และซาบซึ้งในคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้เขียนมีอาจลืมพระคุณได้

นายอิสมาแอล หมาดโตะโสะ

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
บทที่ 1 การดำเนินการทวิภาค	1
แบบทดสอบย่อยประจำบทที่ 1	9
บทที่ 2 กึ่งกรุป	14
แบบทดสอบย่อยประจำบทที่ 2	24
บทที่ 3 กรุป	29
แบบทดสอบย่อยประจำบทที่ 3	43
บทที่ 4 รিংและฟีลด์	48
แบบทดสอบย่อยประจำบทที่ 4	64
เฉลยแบบทดสอบย่อยประจำบทที่ 1	68
เฉลยแบบทดสอบย่อยประจำบทที่ 2	69
เฉลยแบบทดสอบย่อยประจำบทที่ 3	70
เฉลยแบบทดสอบย่อยประจำบทที่ 4	71

สัญลักษณ์ที่ควรทราบ

$\mathbb{R}$	แทนเซตของจำนวนจริง
$\mathbb{R}^+$	แทนเซตของจำนวนจริงบวก
$\mathbb{R}^-$	แทนเซตของจำนวนจริงลบ
$\mathbb{Z}$	แทนเซตของจำนวนเต็ม
$\mathbb{Z}^+$	แทนเซตของจำนวนเต็มบวก
$\mathbb{Z}^-$	แทนเซตของจำนวนเต็มลบ
$\mathbb{Z}^0$	แทนเซตของจำนวนเต็มศูนย์
$\mathbb{N}$	แทนเซตของจำนวนนับ
$\mathbb{Q}$	แทนเซตของจำนวนตรรกยะ
$\mathbb{Q}'$	แทนเซตของจำนวนอตรรกยะ
$\mathbb{C}$	แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน
M_n	แทนเมทริกซ์จัตุรัสที่มี n แถว และ n หลัก และมีสมาชิกเป็นจำนวนจริงทั้งหมด

บทที่ 1

การดำเนินการทวิภาค

ก่อนที่กล่าวถึงระบบคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นพื้นฐานในการศึกษาเกี่ยวกับโครงสร้างทางพีชคณิต (Algebraic structure) สิ่งที่มีความสำคัญ และเป็นส่วนหนึ่งในระบบคณิตศาสตร์ก็คือ การดำเนินการทวิภาค (Binary operation) ซึ่งไม่จำเป็นจะต้องเป็นการกระทำบวก ลบ คูณ หรือหาร เท่านั้น แต่อาจเป็นการกระทำอื่นๆ ตามเงื่อนไขที่กำหนดไว้

บทนิยาม 1.1

กำหนดให้ A และ B เป็นเซตไม่ว่าง เรียก f ว่า ฟังก์ชัน (function) จาก A ไปยัง (into) B ก็ต่อเมื่อ

1. f เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B
2. สำหรับแต่ละ $a \in A$ จะมี $b \in B$ เพียงสมาชิกเดียวเท่านั้นที่ $(a, b) \in f$

ถ้า $(a, b) \in f$ แล้วเรียก b ว่า ภาพ(Image) ของ a ภายใต้ f และเขียนแทน b ด้วย $f(a)$ นั่นคือ $b = f(a)$

บทนิยาม 1.2

กำหนดให้ A เป็นเซตไม่ว่าง จะเรียก $*$ ว่า การดำเนินการทวิภาค(Binary operation) บน A ก็ต่อเมื่อ $*$ เป็นฟังก์ชันจาก $A \times A$ ไปยัง A

จากบทนิยาม 1.2 อาจกล่าวได้ว่า การดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซต A เป็นกฎ (rule) ซึ่งกำหนดว่า ทุกคู่อันดับ $(a, b) \in A \times A$ ต้องไปเกี่ยวข้องกับสมาชิกของ A ได้เพียงตัวเดียวเท่านั้น

ตัวอย่าง 1.2.1 ให้ $A = \{a, b, c\}$ และนิยามการดำเนินการ $*$ บน A ดังตารางต่อไปนี้

$*$	a	b	c
a	c	b	a
b	a	c	b
c	b	c	b

จากตารางทำให้ทราบว่า

$$\begin{array}{lll}
 a * a = c \in A & a * b = b \in A & a * c = a \in A \\
 b * a = a \in A & b * b = c \in A & b * c = b \in A \\
 c * a = b \in A & c * b = c \in A & c * c = b \in A
 \end{array}$$

ดังนั้น $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน A

หมายเหตุ การดำเนินการในตัวอย่าง 1.2.1 เรียกว่า ตารางเคย์เลย์(Cayley table) เพื่อเป็นเกียรติแก่นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ อาร์เธอร์ เคย์เลย์(Arthur Cayley)

ตัวอย่าง 1.2.2 ให้ $A = \{1,2,3\}$ กำหนดฟังก์ชัน $*$ จาก $A \times A \rightarrow A$ โดยที่ $a * b = b$

เพื่อความสะดวกจึงขอเขียนเป็นตารางดังนี้

*	1	2	3
1	1	2	3
2	1	2	3
3	1	2	3

จากตารางทำให้ทราบว่า

$$\begin{array}{lll} 1 * 1 = 1 \in A & 1 * 2 = 2 \in A & 1 * 3 = 3 \in A \\ 2 * 1 = 1 \in A & 2 * 2 = 2 \in A & 2 * 3 = 3 \in A \\ 3 * 1 = 1 \in A & 3 * 2 = 2 \in A & 3 * 3 = 3 \in A \end{array}$$

ดังนั้น $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน A

ตัวอย่าง 1.2.3 ให้ $A = \{0,2,4,6,8\}$ กำหนดฟังก์ชัน $\blacksquare$ จาก $A \times A \rightarrow A$ โดยที่ $a \blacksquare b$ คือเลขหลัก

หน่วยของ ab

เพื่อความสะดวกจึงขอเขียนเป็นตารางดังนี้

	0	2	4	6	8
0	0	0	0	0	0
2	0	4	8	2	6
4	0	8	6	4	2
6	0	2	4	6	8
8	0	6	2	8	4

จากตารางทำให้ทราบว่า

$$\begin{array}{l} 0 \blacksquare 0 = 0 \in A, 0 \blacksquare 2 = 0 \in A, 0 \blacksquare 4 = 0 \in A, 0 \blacksquare 6 = 0 \in A, 0 \blacksquare 8 = 0 \in A \\ 2 \blacksquare 0 = 0 \in A, 2 \blacksquare 2 = 4 \in A, 2 \blacksquare 4 = 8 \in A, 2 \blacksquare 6 = 2 \in A, 2 \blacksquare 8 = 6 \in A \\ 4 \blacksquare 0 = 0 \in A, 4 \blacksquare 2 = 8 \in A, 4 \blacksquare 4 = 6 \in A, 4 \blacksquare 6 = 4 \in A, 4 \blacksquare 8 = 2 \in A \\ 6 \blacksquare 0 = 0 \in A, 6 \blacksquare 2 = 2 \in A, 6 \blacksquare 4 = 4 \in A, 6 \blacksquare 6 = 6 \in A, 6 \blacksquare 8 = 8 \in A \\ 8 \blacksquare 0 = 0 \in A, 8 \blacksquare 2 = 6 \in A, 8 \blacksquare 4 = 2 \in A, 8 \blacksquare 6 = 8 \in A, 8 \blacksquare 8 = 4 \in A \end{array}$$

ดังนั้น $\blacksquare$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน A

ตัวอย่าง 1.2.4 การบวกเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{R}$

เนื่องจาก

ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$ แล้ว $a + b \in \mathbb{R}$

ดังนั้น การบวกเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{R}$

ตัวอย่าง 1.2.5 การคูณเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{R}$

เนื่องจาก

ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$ แล้ว $a \cdot b \in \mathbb{R}$

ดังนั้น การคูณเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{R}$

ตัวอย่าง 1.2.6 การหารไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{R}$

เนื่องจาก

ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$ และ $b = 0$ แล้ว $\frac{a}{b}$ ไม่สามารถหาค่าได้

ดังนั้น การหารไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{R}$

ตัวอย่าง 1.2.7 การหารเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{R} - \{0\}$

ถ้า $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ แล้ว $\frac{a}{b} \in \mathbb{R} - \{0\}$

ทั้งนี้เนื่องจากการหารจำนวนจริงนั้นตัวส่วนเป็นศูนย์ไม่ได้

ดังนั้น การหารเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{R} - \{0\}$

ตัวอย่าง 1.2.8 การบวกเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}$

เนื่องจาก

ถ้า $a, b \in \mathbb{Z}$ แล้ว $a + b \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น การบวกเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}$

ตัวอย่าง 1.2.9 การลบเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}$

เนื่องจาก

$$\text{ถ้า } a, b \in \mathbb{Z} \text{ แล้ว } a - b \in \mathbb{Z}$$

ดังนั้น การลบเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}$

ตัวอย่าง 1.2.10 การคูณเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}$

เนื่องจาก

$$\text{ถ้า } a, b \in \mathbb{Z} \text{ แล้ว } a \cdot b \in \mathbb{Z}$$

ดังนั้น การคูณเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}$

ตัวอย่าง 1.2.11 การหารไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}$

เนื่องจาก

$$\text{ถ้า } a = 1, b = 2 \text{ แล้ว } \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

ดังนั้น การหารไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}$

ตัวอย่าง 1.2.12 การบวกเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}^+$

เนื่องจาก

$$\text{ถ้า } a, b \in \mathbb{Z}^+ \text{ แล้ว } a + b \in \mathbb{Z}^+$$

ดังนั้น การบวกเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}^+$

ตัวอย่าง 1.2.13 การลบไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}^+$

เนื่องจาก

$$\text{ถ้า } a = 1, b = 2 \in \mathbb{Z} \text{ แล้ว } a - b = 1 - 2 = -1 \notin \mathbb{Z}^+$$

ดังนั้น การลบไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}^+$

ตัวอย่าง 1.2.14 การคูณเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}^+$

เนื่องจาก

$$\text{ถ้า } a, b \in \mathbb{Z}^+ \text{ แล้ว } a \cdot b \in \mathbb{Z}^+$$

ดังนั้น การคูณเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}^+$

ตัวอย่าง 1.2.15 การหารไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}^+$

เนื่องจาก

$$\text{ถ้า } a = 1, b = 2 \text{ แล้ว } \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}^+$$

ดังนั้น การหารไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}^+$

ตัวอย่าง 1.2.16 การบวกเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{C}$

เนื่องจาก

$$\text{ถ้า } a + bi, c + di \in \mathbb{C}$$

$$\text{แล้ว } (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \in \mathbb{C}$$

ดังนั้น การบวกเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{C}$

ตัวอย่าง 1.2.17 การลบเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{C}$

เนื่องจาก

$$\text{ถ้า } a + bi, c + di \in \mathbb{C}$$

$$\text{แล้ว } (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i \in \mathbb{C}$$

ดังนั้น การลบเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{C}$

ตัวอย่าง 1.2.18 การคูณเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{C}$

เนื่องจาก

$$\text{ถ้า } a + bi, c + di \in \mathbb{C}$$

$$\text{แล้ว } (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \in \mathbb{C}$$

ดังนั้น การคูณเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{C}$

ตัวอย่าง 1.2.19 การหารเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{C}$

เนื่องจาก

ถ้า $a + bi, c + di \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\text{แล้ว } \frac{(a+bi)}{(c+di)} &= \frac{(a+bi)}{(c+di)} \cdot \frac{(c-di)}{(c-di)} \\ &= \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2} i \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

ดังนั้น การหารเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{C}$

ตัวอย่าง 1.2.20 การบวกเป็นการดำเนินการทวิภาคบน M_n

เนื่องจาก

$$\text{ถ้า } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \in M_n$$

$$\begin{aligned}\text{แล้ว } A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{bmatrix} \in M_n\end{aligned}$$

ดังนั้น การบวกเป็นการดำเนินการทวิภาคบน M_n

ตัวอย่าง 1.2.21 การลบเป็นการดำเนินการทวิภาคบน M_n

เนื่องจาก

$$\text{ถ้า } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \in M_n$$

$$\begin{aligned}\text{แล้ว } A - B &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - b_{n1} & \cdots & a_{nn} - b_{nn} \end{bmatrix} \in M_n\end{aligned}$$

ดังนั้น การลบเป็นการดำเนินการทวิภาคบน M_n

ตัวอย่าง 1.2.22 การคูณเป็นการดำเนินการทวิภาคบน M_n

เนื่องจาก

$$\text{ถ้า } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \in M_n$$

$$\begin{aligned} \text{แล้ว } AB &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1n}b_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + \cdots + a_{nn}b_{n1} & \cdots & a_{n1}b_{nn} + \cdots + a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix} \in M_n \end{aligned}$$

ดังนั้น การคูณเป็นการดำเนินการทวิภาคบน M_n

จากตัวอย่าง พบว่าการดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซต A ทุกคู่อันดับ $(a, b) \in A \times A$ จะได้ $a * b \in A$ เรียกสมบัตินี้ว่า **สมบัติปิด (Closure property)** หรือกล่าวว่ามีสมบัติปิดภายใต้การดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซต A

บทนิยาม 1.3

ระบบคณิตศาสตร์ ประกอบด้วยเซตที่มีสมาชิก และการดำเนินการทวิภาคบนเซตตั้งแต่หนึ่งการกระทำขึ้นไป

ตัวอย่าง 1.3.1 $(\mathbb{Z}, +)$ เป็นระบบคณิตศาสตร์

ตัวอย่าง 1.3.2 $(\mathbb{Z}, +, -)$ เป็นระบบคณิตศาสตร์

ตัวอย่าง 1.3.3 $(\mathbb{Z}, +, -, \times)$ เป็นระบบคณิตศาสตร์

แบบทดสอบย่อยประจำบทที่ 1

คำสั่ง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด

1. การดำเนินการทวิภาคมีสมบัติอะไร

- ก. ปิด
- ข. เปลี่ยนกลุ่ม
- ค. มีสมาชิกเอกลักษณ์
- ง. มีสมาชิกผกผัน

2. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 การบวกเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{R}$

ข้อความที่ 2 การคูณเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{R}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

3. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 การหารเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{R}$

ข้อความที่ 2 การลบเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{R}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

4. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 การบวกเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}$

ข้อความที่ 2 การลบไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

5. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 การคูณไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}$

ข้อความที่ 2 การหารเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

6. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 การลบเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}^+$

ข้อความที่ 2 การหารเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}^+$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

7. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 การบวกเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{C}$

ข้อความที่ 2 การคูณไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{C}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

8. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 การบวกไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน M_n

ข้อความที่ 2 การคูณไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน M_n

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

9. กำหนดให้ $A = \{a, b, c, d\}$ และการดำเนินการ Δ บน A ดังตารางต่อไปนี้

Δ	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

ข้อใดถูกต้อง

- ก. $b\Delta a \neq a\Delta b$
- ข. $b\Delta c = c\Delta b$
- ค. $c\Delta d \neq a\Delta b$
- ง. $d\Delta a = b\Delta b$

10. กำหนด $S = \{1,2,3\}$ และ $*$ เป็นการดำเนินการบน S นิยามโดย $a * b =$ เศษเหลือที่เกิดจากการ b หาร a
ข้อความใดถูกต้อง

- ก. $1 * 3 = 1$
- ข. $2 * 3 = 1$
- ค. $3 * 2 = 1$
- ง. $1 * 2 = 1$

11. กำหนด $A = \{1,2,3\}$ และการดำเนินการ $*$ บน A ดังตารางต่อไปนี้

$*$	1	2	3
1	2	3	2
2	1	3	2
3	3	2	1

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน A

ข้อความที่ 2 $(A, *)$ เป็นระบบคณิตศาสตร์

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

12. กำหนด $A = \{n|n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$ ที่มี $\otimes$ เป็นการดำเนินการบน A โดยที่กำหนด

$$a \otimes b = a - b \text{ สำหรับทุก } a, b \in A$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $\otimes$ ไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน A

ข้อความที่ 2 $b \otimes a = b - a$ สำหรับทุก $a, b \in A$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

13. กำหนด A เป็นเซตไม่ว่าง และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค เราเรียก $(A,*)$ ว่าจะไร

- ก. ระบบ
- ข. ระบบปิด
- ค. ระบบคณิตศาสตร์
- ง. ระบบการดำเนินการทวิภาค

14. กำหนดการดำเนินการ φ บน $\mathbb{R}$ ดังนี้ $a\varphi b = (a+b)(a-b)$ สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{R}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{R}, \varphi)$ เป็นระบบคณิตศาสตร์

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{R}, \varphi)$ มีสมบัติการสลับที่

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

15. กำหนดการดำเนินการ $\ominus$ บน $\mathbb{Z}$ ดังนี้ $a \ominus b = ab + 1$ สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{Z}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 $(\mathbb{Z}, \ominus)$ มีสมบัติการสลับที่

ข้อความที่ 2 $(\mathbb{Z}, \ominus)$ มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ข. ข้อความที่ 1 ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อความที่ 1 ไม่ถูกต้อง และข้อความที่ 2 ถูกต้อง
- ง. ข้อความที่ 1 และข้อความที่ 2 ไม่ถูกต้อง

บทที่ 2

กึ่งกรุป

บทนิยาม 2.1

กำหนดให้ S เป็นเซตไม่ว่าง และ $*$ เป็น การดำเนินการทวิภาค (Binary operation) บน S จะเรียก ระบบคณิตศาสตร์ $(S, *)$ ว่า กึ่งกรุป (Semigroup) ก็ต่อเมื่อ

$$(a * b) * c = a * (b * c) \text{ สำหรับทุก } a, b, c \in S$$

ตัวอย่าง 2.1.1 $(\mathbb{Z}, +)$ เป็นกึ่งกรุป

เนื่องจาก

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

สำหรับทุก $a, b, c \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $(\mathbb{Z}, +)$ เป็นกึ่งกรุป

ตัวอย่าง 2.1.2 $(\mathbb{Z}, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป

เนื่องจาก

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

สำหรับทุก $a, b, c \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $(\mathbb{Z}, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป

ตัวอย่าง 2.1.3 $(\mathbb{Z}^+, +)$ เป็นกึ่งกรุป

เนื่องจาก

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

สำหรับทุก $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$

ดังนั้น $(\mathbb{Z}^+, +)$ เป็นกึ่งกรุป

ตัวอย่าง 2.1.4 $(\mathbb{Z}^+, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป

เนื่องจาก

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

สำหรับทุก $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$

ดังนั้น $(\mathbb{Z}^+, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป

ตัวอย่าง 2.1.5 $(\mathbb{Z}^+, -)$ ไม่เป็นกึ่งกรุป

เนื่องจาก

$$\text{ให้ } a = 1, b = 2, c = 3$$

ได้ว่า

$$(1 - 2) - 3 = -4$$

$$1 - (2 - 3) = 2$$

$$\text{นั่นคือ } (1 - 2) - 3 \neq 1 - (2 - 3)$$

ดังนั้น $(\mathbb{Z}^+, -)$ ไม่เป็นกึ่งกรุป

ตัวอย่าง 2.1.6 $(\mathbb{R}, +)$ เป็นกึ่งกรุป

เนื่องจาก

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

สำหรับทุก $a, b, c \in \mathbb{R}$

ดังนั้น $(\mathbb{R}, +)$ เป็นกึ่งกรุป

ตัวอย่าง 2.1.7 $(\mathbb{R}, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป

เนื่องจาก

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

สำหรับทุก $a, b, c \in \mathbb{R}$

ดังนั้น $(\mathbb{R}, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป

ตัวอย่าง 2.1.8 $(\mathbb{R}, -)$ ไม่เป็นกึ่งกรุป

เนื่องจาก

$$\text{ให้ } a = \frac{1}{2}, b = -1, c = -2 \text{ ได้ว่า}$$

$$\left(\frac{1}{2} - (-1)\right) - (-2) = \frac{7}{2}$$

$$\frac{1}{2} - ((-1) - (-2)) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{นั่นคือ } \frac{7}{2} \neq -\frac{1}{2}$$

ดังนั้น $(\mathbb{R}, -)$ ไม่เป็นกึ่งกรุป

ตัวอย่าง 2.1.9 $(\mathbb{C}, +)$ เป็นกึ่งกรุป

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} ((a + bi) + (c + di)) + (e + fi) &= ((a + c) + e) + ((b + d) + f)i \\ &= (a + c + e) + (b + d + f)i \\ (a + bi) + ((c + di) + (e + fi)) &= (a + (c + e)) + (b + (d + f))i \\ &= (a + c + e) + (b + d + f)i \end{aligned}$$

สำหรับทุก $a + bi, c + di, e + fi \in \mathbb{C}$

ดังนั้น $(\mathbb{C}, +)$ เป็นกึ่งกรุป

ตัวอย่าง 2.1.10 $(\mathbb{C}, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป

เนื่องจาก

$$((a + bi) \cdot (c + di)) \cdot (e + fi) = (a + bi) \cdot ((c + di) \cdot (e + fi))$$

สำหรับทุก $a + bi, c + di, e + fi \in \mathbb{C}$

ดังนั้น $(\mathbb{C}, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป

ตัวอย่าง 2.1.11 $(M_n, +)$ เป็นกึ่งกรุป

เนื่องจาก

การบวกเป็นการดำเนินการทวิภาคบน M_n จากตัวอย่าง 1.2.21 และ

$$\text{ให้ } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \in M_n$$

$$\begin{aligned} (A + B) + C &= \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) + c_{11} & \cdots & (a_{1n} + b_{1n}) + c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1} + b_{n1}) + c_{n1} & \cdots & (a_{nn} + b_{nn}) + c_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} + c_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} + c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} + c_{n1} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} + c_{nn} \end{bmatrix} \\ A + (B + C) &= \begin{bmatrix} a_{11} + (b_{11} + c_{11}) & \cdots & a_{1n} + (b_{1n} + c_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + (b_{n1} + c_{n1}) & \cdots & a_{nn} + (b_{nn} + c_{nn}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} + c_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} + c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} + c_{n1} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} + c_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

พบว่า $(A + B) + C = A + (B + C)$

ดังนั้น $(M_n, +)$ เป็นกึ่งกรุป

ตัวอย่าง 2.1.12 $(M_n, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป

เนื่องจาก

การคูณเป็นการดำเนินการทวิภาคบน M_n จากตัวอย่าง 1.2.22 และ

จากสมบัติของเมทริกซ์ พบว่าเมทริกซ์มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ภายใต้การคูณ นั่นคือ

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \text{ สำหรับทุก } A, B, C \in M_n$$

ดังนั้น $(M_n, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป

ตัวอย่าง 2.1.13 ให้ $\mathbb{Z}^+$ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก นิยาม $\blacksquare$ บนเซต $\mathbb{Z}^+$ ดังนี้ $a \blacksquare b = ab + ba$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} (a \blacksquare b) \blacksquare c &= (ab + ba) \blacksquare c \\ &= (ab + ba)c + c(ab + ba) \\ &= abc + bac + cab + cba \\ &= 4abc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \blacksquare (b \blacksquare c) &= a \blacksquare (bc + cb) \\ &= a(bc + cb) + (bc + cb)a \\ &= abc + acb + bca + cba \\ &= 4abc \end{aligned}$$

สำหรับทุก $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$

ดังนั้น $(\mathbb{Z}^+, \blacksquare)$ เป็นกึ่งกรุป

ตัวอย่าง 2.1.14 ให้ $\mathbb{Z}^+$ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก นิยาม ∇ บนเซต $\mathbb{Z}^+$ ดังนี้ $a \nabla b = a + b - 1$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} (a \nabla b) \nabla c &= (a + b - 1) \nabla c \\ &= (a + b - 1) + c - 1 \\ &= a + b + c - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \nabla (b \nabla c) &= a \nabla (b + c - 1) \\ &= a + (b + c - 1) - 1 \\ &= a + b + c - 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(\mathbb{Z}^+, \nabla)$ เป็นกึ่งกรุป

ตัวอย่าง 2.1.15 $(\mathbb{Q}, +)$ เป็นกึ่งกรุป

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} &= \frac{adf + cbf + ebd}{bdf} \\ \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) &= \frac{adf + cbf + ebd}{bdf}\end{aligned}$$

สำหรับทุก $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$

ดังนั้น $(\mathbb{Q}, +)$ เป็นกึ่งกรุป

ตัวอย่าง 2.1.16 $(\mathbb{Q}, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} &= \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) \\ &= \frac{ace}{bdf}\end{aligned}$$

สำหรับทุก $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$

ดังนั้น $(\mathbb{Q}, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป

ตัวอย่าง 2.1.17 $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ เป็นกึ่งกรุป

เนื่องจาก

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

สำหรับทุก $a, b, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

ดังนั้น $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ เป็นกึ่งกรุป

บทนิยาม 2.2

เอกลักษณ์ซ้าย(ขวา) (Left [right] identity) ของกึ่งกรุป S คือสมาชิก e ของ S ซึ่ง

$$ex = x[xe = x] \text{ สำหรับทุก } x \in S$$

และเอกลักษณ์สองด้าน(Two-sided identity) หรือเอกลักษณ์ (Identity) ของกึ่งกรุป S

คือสมาชิกของ S ที่เป็นทั้งเอกลักษณ์ซ้าย และเอกลักษณ์ขวาของ S

ตัวอย่าง 2.2.1 $(\mathbb{R}, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์ คือ 1

เนื่องจาก

$(\mathbb{R}, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป จากตัวอย่าง 2.1.7 และ

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \text{ สำหรับทุก } a \in \mathbb{R}$$

ดังนั้น $(\mathbb{R}, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์ คือ 1

ตัวอย่าง 2.2.2 $(\mathbb{Z}^+, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์ คือ 1

เนื่องจาก

$(\mathbb{Z}^+, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป จากตัวอย่าง 2.1.4 และ

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \text{ สำหรับทุก } a \in \mathbb{Z}^+$$

ดังนั้น $(\mathbb{Z}^+, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์ คือ 1

ตัวอย่าง 2.2.3 $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์ คือ 0

เนื่องจาก

$(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ เป็นกึ่งกรุป จากตัวอย่าง 2.1.17 และ

$$a + 0 = 0 + a = a \text{ สำหรับทุก } a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

ดังนั้น $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์ คือ 0

ตัวอย่าง 2.2.4 $(\mathbb{Z}, +)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์ คือ 0

เนื่องจาก

$(\mathbb{Z}, +)$ เป็นกึ่งกรุป จากตัวอย่าง 2.1.1 และ

$$a + 0 = 0 + a = a \text{ สำหรับทุก } a \in \mathbb{Z}$$

ดังนั้น $(\mathbb{Z}, +)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์ คือ 0

ตัวอย่าง 2.2.5 $(\mathbb{R}, +)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์ คือ 0

เนื่องจาก

$(\mathbb{R}, +)$ เป็นกึ่งกรุป จากตัวอย่าง 2.1.6 และ

$$a + 0 = 0 + a = a \text{ สำหรับทุก } a \in \mathbb{R}$$

ดังนั้น $(\mathbb{R}, +)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์ คือ 0

ตัวอย่าง 2.2.6 $(\mathbb{R}, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์ คือ 1

เนื่องจาก

$(\mathbb{R}, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป จากตัวอย่าง 2.1.7 และ

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \text{ สำหรับทุก } a \in \mathbb{R}$$

ดังนั้น $(\mathbb{R}, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์ คือ 1

ตัวอย่าง 2.2.7 $(\mathbb{C}, +)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์ คือ $0 + 0i$

เนื่องจาก

$(\mathbb{C}, +)$ เป็นกึ่งกรุป จากตัวอย่าง 2.1.9 และ

$$\begin{aligned} (a + bi) + (0 + 0i) &= (0 + 0i) + (a + bi) \\ &= a + bi \text{ สำหรับทุก } a + bi \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

ดังนั้น $(\mathbb{C}, +)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์ คือ $0 + 0i$

ตัวอย่าง 2.2.8 $(\mathbb{C}, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์ คือ $1 + 0i$

เนื่องจาก

$(\mathbb{C}, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป จากตัวอย่าง 2.1.10 และ

$$\begin{aligned} (a + bi) \cdot (1 + 0i) &= (1 + 0i) \cdot (a + bi) \\ &= a + bi \text{ สำหรับทุก } a + bi \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

ดังนั้น $(\mathbb{C}, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์ คือ $1 + 0i$

ตัวอย่าง 2.2.9 $(\mathbb{Q}, +)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์ คือ 0

เนื่องจาก

$(\mathbb{Q}, +)$ เป็นกึ่งกรุป จากตัวอย่าง 2.1.15 และ

$$\frac{a}{b} + 0 = 0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \text{ สำหรับทุก } \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ โดยที่ } b \neq 0$$

ดังนั้น $(\mathbb{Q}, +)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์ คือ 0

ตัวอย่าง 2.2.10 $(\mathbb{Q}, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์ คือ 1

เนื่องจาก

$(\mathbb{Q}, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป จากตัวอย่าง 2.1.16 และ

$$\frac{a}{b} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \text{ สำหรับทุก } \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ โดยที่ } b \neq 0$$

ดังนั้น $(\mathbb{Q}, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีเอกลักษณ์ คือ 1