บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

กระบวนการแก้ปัญหาค่าขอบของสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน โดยใช้วิธีของเทย์เลอร์อันดับสี่ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และปรับค่าเริ่มต้นที่ไม่ทราบให้สอดคล้องกับค่าขอบด้วยวิธีบรอยเดน ผู้วิจัยได้ดำเนินการศึกษาตามหัวข้อต่อไปนี้

1. ขั้นตอนการปรับปัญหาค่าขอบของสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน
2. ปัญหาค่าขอบของสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน
3. วิธียิงเป้าโดยใช้วิธีบรอยเดนปรับค่าเริ่มต้น
4. การแก้ปัญหาค่าขอบของสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน

ขั้นตอนการปรับปัญหาค่าขอบของสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน

สมการที่เราจะแก้ปัญหานั้นเป็นสมการที่สามารถปรับเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ได้ กล่าวคือ ปริพันธ์เป็นแบบแยกได้ และสมการเชิงฟังก์ชันมีจุดร่วม

ปรับปัญหาของสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ จากปัญหาทั่วไป (1.1) และ (1.2) มีข้อสมมติเกี่ยวกับปัญหาดังนี้

1) ฟังก์ชัน f เป็นแบบที่อนุพันธ์อันดับสูงสุดแยกจากตัวแปรอื่น ๆ และฟังก์ชันที่มีอยู่ในสมการมีอนุพันธ์เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง นั่นคือ สมการอยู่ในรูปแบบ

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{Y}'(x), \mathbf{U}'(h(x))) = \phi(x, \mathbf{U}'(x), \mathbf{U}'(h(x))) - y^{(n)}(x)$$

เมื่อ $\mathbf{Y}'(x) = (y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \ldots, y'(x), y(x))$,
$\mathbf{U}'(x) = (y^{(n-1)}(x), y^{(n-2)}(x), \ldots, y'(x), y(x))$ และ ϕ มีอนุพันธ์ย่อยเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุกจุดในโดเมน

2) ฟังก์ชัน K_1 และ K_2 อยู่ในแบบที่ฟังก์ชันของ x สามารถแยกปริพันธ์ นั่นคือ ฟังก์ชันอยู่ในรูปแบบ

$$\mathrm{K}_1(x, t, \mathbf{Y}'(t), \mathbf{Y}'(h(t))) = \sum_{i=1}^{k_1} \mathrm{p}_i(x)\mathrm{r}_i(t, \mathbf{Y}'(t), \mathbf{Y}'(h(t)))$$

และ

$$\mathrm{K}_2(x, t, \mathbf{Y}'(t), \mathbf{Y}'(h(t))) = \sum_{i=1}^{k_2} \mathrm{q}_i(x)\mathrm{s}_i(t, \mathbf{Y}'(t), \mathbf{Y}'(h(t)))$$

เมื่อ p_i, q_i, r_i และ s_i เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุกจุดทุกอันดับ

3) สมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน เงื่อนไขค่าเริ่มต้นหรือค่าขอบเป็นแบบเชิงเส้น ปัญหาที่เราพิจารณาอยู่ในรูปแบบ ดังนี้

สมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบวอลแตร์รา

$$\left.\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= \phi(x, \mathbf{U}'(x), \mathbf{U}'(h(x))) + \sum_{i=1}^{k_1} \mathrm{p}_i(x)\int_a^x \mathrm{r}_i(t, \mathbf{Y}'(t), \mathbf{Y}'(h(t)))dt \\ \mathbf{g}(\mathbf{Y}'(t_0), &\mathbf{Y}'(t_1), \ldots, \mathbf{Y}'(t_k)) = \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

เราให้ $\quad u_i(x) = \int_a^x \mathrm{r}_i(t, \mathbf{Y}(t), \mathbf{Y}'(h(t)))dt$ และ $u_i'(x) = \mathrm{r}_i(x, \mathbf{Y}'(x), \mathbf{Y}'(h(x)))$

โดยมีเงื่อนไข $\quad u_i(a) = 0$

เราสามารถเขียนระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงฟังก์ชันได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= \phi(x, \mathbf{U}'(x), \mathbf{U}'(h(x))) + \sum_{i=1}^{k_1} \mathrm{p}_i(x)u_i(x) \\ u_i'(x) &= \mathrm{r}_i(x, \mathbf{U}'(x), \mathbf{U}'(h(x))) \end{aligned}\right\} \quad (3.2a)$$

โดยมีเงื่อนไขค่าขอบ

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{g}(\mathbf{Y}'(t_0), \mathbf{Y}'(t_1), \ldots, \mathbf{Y}'(t_k)) = \mathbf{0} \\ &u_i(a) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k_1;\ t_0 = a,\ t_k = x \end{aligned}\right\} \quad (3.2b)$$

สมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบเฟรดโฮล์ม

$$\left.\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= \phi(x, \mathbf{U}'(x), \mathbf{U}'(h(x))) + \sum_{i=1}^{k_2} \mathrm{q}_i(x)\int_a^b \mathrm{s}_i(t, \mathbf{Y}'(t), \mathbf{Y}'(h(t)))dt \\ \mathbf{g}(\mathbf{Y}'(t_0), &\mathbf{Y}'(t_1), \ldots, \mathbf{Y}'(t_k)) = \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \quad (3.3)$$

เราให้ $\quad u_i(x) = \int_a^x \mathrm{s}_i(t, \mathbf{Y}'(t), \mathbf{Y}'(h(t)))dt$ และ $u_i'(x) = \mathrm{s}_i(x, \mathbf{Y}'(x), \mathbf{Y}'(h(x)))$

โดยมีเงื่อนไข $\quad u_i(a) = 0$

เราสามารถเขียนระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงฟังก์ชันได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= \phi(x, \mathbf{U}'(x), \mathbf{U}'(h(x))) + \sum_{i=1}^{k_2} \mathrm{q}_i(x)c_i \\ u_i'(x) &= \mathrm{s}_i(x, \mathbf{Y}(x), \mathbf{Y}'(h(x))) \end{aligned}\right\} \quad (3.4a)$$

โดยมีเงื่อนไขค่าขอบ

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{g}(\mathbf{Y}'(t_0), \mathbf{Y}'(t_1), \ldots, \mathbf{Y}'(t_k)) = \mathbf{0} \\ &u_i(a) = 0,\ u_i(b) = c_i,\ i = 1, 2, \ldots, k_2;\ t_0 = a,\ t_k = b \end{aligned}\right\} \quad (3.4b)$$

ปัญหาค่าขอบของสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน

การแก้ปัญหาค่าขอบของสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน โดยใช้วิธีของเทย์เลอร์อันดับสี่ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และปรับค่าเริ่มต้นที่ไม่ทราบให้สอดคล้องกับค่าขอบด้วยวิธีบรอยเดนได้เลือกตัวอย่างสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันเพื่อทดลองหาผลเฉลย โดยการเลือกตัวอย่างผู้วิจัยคัดเลือกตัวอย่างเพื่อนำเสนอโดยใช้ตัวอย่างมีความครอบคลุมปัญหาที่ปรากฏทั่ว ๆไป โดยมีแนวทางดังนี้

1. เป็นปัญหาสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบวอลแตร์ราและเฟรดโฮล์มลักษณะแบบแยกปริพันธ์ได้

2. เป็นปัญหาสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันทั้งแบบเชิงเส้น (Linear) และแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear) และสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง

3. เงื่อนไขค่าขอบหลายจุดและเป็นสมการเชิงเส้น

4. เป็นปัญหาที่ทราบผลเฉลยแท้จริง เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของวิธีการ

5. สมการเชิงฟังก์ชันมีจุดร่วม กล่าวคือสมการ $x = h(x)$ มีผลเฉลยในช่วงที่กำหนด

เหตุผลที่เลือกปัญหามีสมบัติดังกล่าว เป็นดังต่อไปนี้

ในข้อที่ 1. ปัญหาสมการปริพันธ์เป็นแบบที่สามารถแยกได้ ทำให้สามารถแปลงสมการปริพันธ์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ได้ ในข้อที่ 3. เงื่อนไขค่าขอบเป็นสมการแบบเชิงเส้น ทำให้สามารถใช้วิธีของบรอยเดนในการแก้ปัญหา ในข้อที่ 5. เพื่อที่จะได้จุดเริ่มต้นร่วมกัน ทำให้สามารถใช้วิธีเชิงตัวเลขแก้ปัญหาได้

ปัญหาที่ 1. สมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันวอลแตร์ราที่เป็นแบบเชิงเส้นอันดับสอง (แปลงจากปัญหาของ Rashed, 2004)

$$y''(x) = g(x) - y'(x) - e^{-x} y(\frac{x}{2}) - \int_0^x \frac{y(t)}{t+3}\,dt$$

โดย $\quad g(x) = 2\frac{[1-\ln(x+3)]}{(x+3)^2} + \frac{2\ln(x+3)}{x+3} + e^{-t}\ln^2(\frac{x}{2}) + 3) + \frac{\ln^3(x+3) - \ln^3(3)}{3}$

เงื่อนไขค่าขอบ

$$y(0) = \ln^2(3)$$

$$y(1.1) = \ln^2(4.1) \qquad ;0 \le x \le 1.1$$

ผลเฉลยแท้จริงคือ $\quad y(x) = \ln^2(x+3)$

ปัญหาที่ 2. สมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันวอลแตร์ราที่เป็นแบบเชิงเส้นอันดับสอง

$$y''(x) = -\left(\frac{4\pi^2}{9} + \frac{9}{4\pi^2}\right)y(x) + \frac{9}{4\pi^2}\left(\frac{x-0.5}{2}\right)y'\left(\frac{x+0.5}{2}\right) + \int_{x}^{\frac{x+0.5}{2}} (x-t)y(t)dt$$

เงื่อนไขค่าขอบ

$$y(0) + 2y(0.5) - 2y(1) = 0$$

$$2y(0) + y(0.5) + y(1) = \sqrt{3} \qquad ;\ 0 \le x \le 1$$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \sin(\frac{2\pi x}{3})$

ปัญหาที่ 3. สมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันเฟรดโฮล์มที่เป็นแบบเชิงเส้นอันดับสาม

$$y'''(x) = -xy''(1-x) + y''(x) + xy'(1-x) + \int_0^1 ty(t)y'(t)dt - \frac{e^2}{4} - e - x + \frac{5}{12}$$

เงื่อนไขค่าขอบ

$$y(1) - y''(1) - y(0) = 0$$

$$2y''(0) - y'(0) + y''(1) = e$$

$$y'(1) - y''(1) + y''(0) = 3 \qquad ;\ 0 \le x \le 1$$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = e^x + x$

ปัญหาที่ 4. สมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันเฟรดโฮล์มที่เป็นแบบไม่เชิงเส้นอันดับสาม

$$y'''(x) = y''(x)^2 - 2y''(\frac{1}{x}) - y'(x)y''(x) + 2x^2y'(\frac{1}{x}) + \int_1^2 y'(t)^2 dt - \frac{28}{3}$$

เงื่อนไขค่าขอบ

$$2y(1) - y'(2) + y''(1) = 2$$

$$y''(2) - 2y''(1) + y(1) = 0$$

$$y'(2) - y(1) - y(2) = -3 \qquad ;\ 1 \le x \le 2$$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = x^2 + 1$

ปัญหาที่ 5. สมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันวอลแตร์ราที่เป็นแบบไม่เชิงเส้นอันดับสาม

$$y'''(x) = \cos 2x \cdot y''(\frac{\pi}{2} - x) - y'(x)y'(\frac{\pi}{2} - x) - 4y'(x) + \frac{\sin 4x}{8} + \int_0^x y(t)^2 dt$$

เงื่อนไขค่าขอบ

$$y(0) + 3y'(\frac{\pi}{2}) + y(0) = 0$$

$$y''(0) + y(\frac{\pi}{2}) + y''(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$$

$$y''(0) + y'(\frac{\pi}{2}) + y(0) = -1 \qquad ; 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \sin 2x + x$

วิธียิงเป้าโดยใช้วิธีบรอยเดนปรับค่าเริ่มต้น

จากสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันแปลงเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน ดังที่กล่าวใน (3.1)-(3.4b) และหาจุดเริ่มต้นของสมการเชิงฟังก์ชัน $x = h(x)$ ได้ $x = a$ ซึ่งจะเป็นจุดเริ่มต้นในการดำเนินการแก้ปัญหา

การแก้ปัญหาค่าขอบของสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน กระทำโดยแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญด้วยวิธีของเทย์เลอร์อันดับสี่และแก้สมการโดยใช้วิธีของบรอยเดน มีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดค่าเริ่มต้น $\mathbf{U}'(a)$, $\mathbf{U}'(h(a))$, c_i, $u_i(a)$ และ $D_0 = I$ เป็นเมทริกซ์เริ่มต้ (โดยที่ $a = h(a)$)
2. คำนวณค่าอนุพันธ์ต่างๆ เพื่อใช้ในสูตรของเทย์เลอร์อันดับสี่ (2.1) (ถ้า $x < a$ ให้ $h < 0$ ถ้า $x > a$ ให้ $h > 0$)
3. หาผลเฉลยปัญหาค่าเริ่มต้นโดยวิธีของเทย์เลอร์อันดับสี่ (2.1) จะได้ $\mathbf{Y}'(t_k)$ และ $\mathbf{Y}'(\mathbf{h}(t_k))$
3. สำหรับ $i = 0, 1, \ldots, N$ (N เป็นจำนวนสูงสุดในการกระทำ)

   3.1 หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

   $$D_i\mathbf{b}_i = -\mathbf{F}(\mathbf{z}_i)$$

   3.2 ให้ค่า $\mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{z}_i + \mathbf{b}_i$

   3.3 หาผลเฉลยปัญหาค่าเริ่มต้น โดยวิธีของเทย์เลอร์อันดับสี่ (2.1) ได้ค่า $\mathbf{F}(\mathbf{z}_{i+1})$ โดยใช้จุดเริ่มต้น $\mathbf{z}_{i+1}$

3.4 คำนวณค่า $\mathbf{b}_i\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}}$ และ $\mathbf{a}_i = \dfrac{1}{\mathbf{b}_i\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}}}\mathbf{F}(\mathbf{z}_{i+1})$ และปรับเปลี่ยนเมทริกซ์ D_i จากสูตร

$$D_{i+1} = D_i + \mathbf{a}_i\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}}$$

4. หยุดกระทำเมื่อ i มีค่ามากพอ หรือเมื่อ $\|\mathbf{b}_i\| < \varepsilon$ หรือ $\|\mathbf{F}(\mathbf{z}_i)\| < \varepsilon$ เมื่อ ε เป็นค่าน้อย ๆ

การแก้ปัญหาค่าขอบของสมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน

จะแสดงการแก้ปัญหาที่ 5. โดยละเอียดดังต่อไปนี้

สมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน

$$y'''(x) = \cos 2x \cdot y''(\frac{\pi}{2} - x) - y(x)y'(\frac{\pi}{2} - x) - 4y'(x) + \frac{\sin 4x}{8} + \int_0^x y(t)^2\,dt \tag{3.5}$$

เงื่อนไขค่าขอบ

$$\begin{aligned} &y'(0) + 3y'(\frac{\pi}{2}) + y(0) = 0 \\ &y'(0) + y(\frac{\pi}{2}) + y''(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \\ &y'(0) + y'(\frac{\pi}{2}) + y(0) = -1 \end{aligned} \tag{3.6}$$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \sin 2x + x$

ขั้นแรก กำหนดให้ $u(x) = \int_0^x y(t)^2\,dt$ เมื่อ $h(x) = \frac{\pi}{2} - x$

สมการปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงฟังก์ชันแปลงเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงฟังก์ชัน

$$\left.\begin{aligned} &y'''(x) = \cos 2x \cdot y''(\frac{\pi}{2} - x) - y'(x)y'(\frac{\pi}{2} - x) - 4y'(x) + \frac{\sin 4x}{8} + u(x) \\ &u'(x) = y(x)^2 \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

เงื่อนไขค่าขอบ

$$\begin{aligned} &y'(0) + 3y'(\frac{\pi}{2}) + y(0) = 0 \\ &y'(0) + y(\frac{\pi}{2}) + y''(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \\ &y'(0) + y'(\frac{\pi}{2}) + y(0) = -1 \\ &u(0) = 0 \end{aligned}$$

1. กำหนดจุดเริ่มต้น $a=\frac{\pi}{4}$ ที่ทำให้ $\frac{\pi}{4}=(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}$ นั่นคือ ($a=h(a)$) และ

$$D_0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

กำหนดค่าเริ่มต้น $\mathbf{z}_0=[y(\frac{\pi}{4}),\ y'(\frac{\pi}{4}),\ y''(\frac{\pi}{4}),\ u(\frac{\pi}{4})]^t=[1.5,\ 1,\ -3,\ 1]^t$

หาอนุพันธ์ของสมการ (3.7) เพื่อใช้ในสูตรของเทย์เลอร์อันดับสี่ ได้ดังนี้

$$y'''(x)=\cos 2x\cdot y''(h(x))-y'(x)y'(h(x))-4y'(x)+\frac{\sin 4x}{8}+u(x)$$

$$y^{(4)}(x)=\frac{-\cos 2x\cdot y'''(h(x))}{4}-\frac{\sin 2x\cdot y''(h(x))}{2}+\frac{y(x)y'(h(x))}{2}-\frac{y'(x)y'(h(x))}{2}$$
$$-4y''(x)+\frac{\cos 4x}{2}+u'(x)-x^2$$

$$y^{(5)}(x)=\frac{\cos 2x\cdot y^{(4)}(h(x))}{4}+\sin 2x\cdot y'''(h(x))-\cos 2x\cdot y''(h(x))-\frac{y(x)y''(h(x))}{2}+y'(x)y''(h(x))$$
$$-\frac{y''(x)y'(h(x))}{2}-4y'''(x)-2\sin 4x+u''(x)-2x$$

$$y^{(6)}(x)=\frac{-\cos 2x\cdot y^{(5)}(h(x))}{4}-\frac{3\sin 2x\cdot y^{(4)}(h(x))}{2}+3\cos 2x\cdot y'''(h(x))+2\sin 2x\cdot y''(h(x))$$
$$+\frac{y(x)y^{(4)}(h(x))}{2}-\frac{3y'(x)y'''(h(x))}{2}+\frac{3y''(x)y''(h(x))}{2}-\frac{y'''(x)y'(h(x))}{2}$$
$$-4y'''(x)-8\cos 4x+u'''(x)-2$$

เมื่อ $x_1=\frac{\pi}{2}-x$

$$y'''(h(x))=\cos 2x_1\cdot y''(x)-y'(h(x))y'(x)-4y'(h(x))+\frac{\sin 4x_1}{8}+u(x_1)$$

$$y^{(4)}(h(x))=\frac{-\cos 2x_1\cdot y'''(x)}{4}-\frac{\sin 2x_1\cdot y''(x)}{2}+\frac{y(h(x))y'(x)}{2}-\frac{y'(h(x))y'(x)}{2}$$
$$-4y''(h(x))+\frac{\cos 4x_1}{2}+u'(x_1)-x_1^2$$

$$y^{(5)}(h(x))=\frac{\cos 2x_1\cdot y^{(4)}(x)}{4}+\sin 2x_1\cdot y'''(x)-\cos 2x_1\cdot y''(x)-\frac{y(h(x))y''(x)}{2}+y'(h(x))y''(x)$$
$$-\frac{y''(h(x))y'(x)}{2}-4y'''(h(x))-2\sin 4x_1+u''(x_1)-2x_1$$

$$y^{(6)}(h(x))=\frac{-\cos 2x_1\cdot y^{(5)}(x)}{4}-\frac{3\sin 2x_1\cdot y^{(4)}(x)}{2}+3\cos 2x_1\cdot y'''(x)+2\sin 2x_1\cdot y''(x)$$
$$+\frac{y(h(x))y^{(4)}(x)}{2}-\frac{3y'(h(x))y'''(x)}{2}+\frac{3y''(h(x))y''(x)}{2}-\frac{y'''(h(x))y'(x)}{2}$$

$$-4y'''(h(x))-8\cos 4x_1+u'''(x_1)-2$$

$$u'(x)=y(x)^2$$

$$u''(x)=2y(x)y'(x)$$

$$u'''(x)=2y(x)y''(x)+2y'(x)^2$$

$$u^{(4)}(x)=2y(x)y'''(x)+6y'(x)y''(x)$$

$$u'(x_1)=y(h(x))^2$$

$$u''(x_1)=2y(h(x))y'(h(x))$$

$$u'''(x_1)=2y(h(x))y''(h(x))+2y'(h(x))^2$$

$$u^{(4)}(x_1)=2y(h(x))y'''(h(x))+6y'(h(x))y''(h(x))$$

หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ข้างต้นโดยวิธีของเทย์เลอร์อันดับสี่ โดยสูตร

$$y(x_{i+1})=y(x_i)+hy'(x_i)+\frac{h^2}{2}y''(x_i)+\frac{h^3}{6}y'''(x_i)+\frac{h^4}{24}y^{(4)}(x_i)$$

และกำหนดค่า $h=\frac{\pi}{40}$ ค่า $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ และ $u(x)$ ที่ขาดหายไปได้จากสูตร

$$y(x)=y(x)+hy'(x)+\frac{h^2}{2}y''(x)+\frac{h^3}{6}y'''(x)+\frac{h^4}{24}y^{(4)}(x)$$

$$y'(x)=y'(x)+hy''(x)+\frac{h^2}{2}y'''(x)+\frac{h^3}{6}y^{(4)}(x)+\frac{h^4}{24}y^{(5)}(x)$$

$$y''(x)=y''(x)+hy'''(x)+\frac{h^2}{2}y^{(4)}(x)+\frac{h^3}{6}y^{(5)}(x)+\frac{h^4}{24}y^{(6)}(x)$$

$$u(x)=u(x)+hu'(x)+\frac{h^2}{2}u''(x)+\frac{h^3}{6}u'''(x)+\frac{h^4}{24}u^{(4)}(x)$$

และกำหนดค่า $h=-\frac{\pi}{40}$ ค่า $y(h(x))$, $y'(h(x))$, $y''(h(x))$ และ $u(h(x))$ ที่ขาดหายไปได้จากสูตร

$$y(h(x))=y(h(x))+hy'(h(x))+\frac{h^2}{2}y''(h(x))+\frac{h^3}{6}y'''(h(x))+\frac{h^4}{24}y^{(4)}(h(x))$$

$$y'(h(x))=y'(h(x))+hy''(h(x))+\frac{h^2}{2}y'''(h(x))+\frac{h^3}{6}y^{(4)}(h(x))+\frac{h^4}{24}y^{(5)}(h(x))$$

$$y''(h(x))=y''(h(x))+hy'''(h(x))+\frac{h^2}{2}y^{(4)}(h(x))+\frac{h^3}{6}y^{(5)}(h(x))+\frac{h^4}{24}y^{(6)}(h(x))$$

$$u(h(x))=u(h(x))+hu'(h(x))+\frac{h^2}{2}u''(h(x))+\frac{h^3}{6}u'''(h(x))+\frac{h^4}{24}u^{(4)}(h(x))$$

2. โดยจุดเริ่มต้น $\mathbf{z}_0=[y(\frac{\pi}{4}),\ y'(\frac{\pi}{4}),\ y''(\frac{\pi}{4}),\ u(\frac{\pi}{4})]^T$ แก้สมการเชิงอนุพันธ์จะได้

จุดปลายเป็น $\mathbf{Y}(t_k) = [y(\frac{\pi}{2}),\ y^{'}(\frac{\pi}{2}),\ y^{''}(\frac{\pi}{2}),\ u(\frac{\pi}{2})]$ และจุดต้นเป็น

$[y(0),\ y^{'}(0),\ y^{''}(0),\ u(0)]$

$$\text{ฟังก์ชัน } \mathbf{F} \text{ คือ } \mathbf{F}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} y^{'}(0) + 3y^{'}(\frac{\pi}{2}) + y(0) \\ y^{''}(0) + y(\frac{\pi}{2}) + y^{''}(\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2} \\ y^{''}(0) + y^{'}(\frac{\pi}{2}) + y(0) + 1 \\ u(0) \end{bmatrix}$$

ตรวจสอบว่า $\mathbf{Y}^{'}(t_k)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขค่าขอบหรือไม่ ถ้าสอดคล้องเราจะหยุด และได้ $\mathbf{Y}^{'}(t_0)$ เป็นผลเฉลย ถ้ายังไม่สอดคล้องให้ทำขั้นตอนที่ 3 ต่อไป

3. สำหรับ $i = 0, 1, \ldots, N$ กระทำดังนี้

3.1 หาผลเฉลยระบบสมการเชิงเส้น $D_i \mathbf{b}_i = -\mathbf{F}(\mathbf{z}_i)$

3.2 ให้ $\mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{z}_i + \mathbf{b}_i$

3.3 คำนวณค่า $\mathbf{F}(\mathbf{z}_{i+1})$ โดยใช้จุดเริ่มต้น $\mathbf{z}_{i+1}$

3.4 คำนวณค่า $\mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^{T}$ และ $\mathbf{a}_i = \frac{1}{\mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^{T}} \mathbf{F}(\mathbf{z}_{i+1})$ และปรับเปลี่ยนเมทริกซ์ D_i จากสูตร

$$D_{i+1} = D_i + \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i^{T}$$

4. หยุดกระทำเมื่อ i มีค่ามากพอ หรือเมื่อ $\|\mathbf{b}_i\| < \varepsilon$ หรือ $\|\mathbf{F}(\mathbf{z}_i)\| < \varepsilon$ เมื่อ ε เป็นค่าน้อย ๆ