ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

การคำนวณแอมพลิจูดของการเปลี่ยนสถานะ (Transition Amplitude)

การคำนวณแอมพลิจูดของการเปลี่ยนสถานะ (Transition amplitude)

แอมพลิจูดของคลื่นตำแหน่ง (Spatial wave amplitude)

เพื่ออธิบายการคำนวณแอมพลิจูดของการเปลี่ยนสถานะเริ่มจากพิจารณาแอมพลิจูดของคลื่นตำแหน่งในสมการที่ 4-38 จะได้ว่า

$$I_{spatial} = \int d^3\bar{q}_1 \ldots d^3\bar{q}_{10} d^3\bar{q}_{1'} \ldots d^3\bar{q}_{4'} \phi_{\varphi,X} \hat{O}_{spatial} \phi_{uudss,\bar{u}\bar{u}\bar{d}\bar{s}\bar{s}} \tag{ก-1}$$

โดยที่

$$\hat{O}_{spatial} = Y_{1\mu}(\bar{q}_3 - \bar{q}_8)\delta^{(3)}(\bar{q}_3 + \bar{q}_8)Y_{1\eta}(\bar{q}_4 - \bar{q}_7)\delta^{(3)}(\bar{q}_4 + \bar{q}_7)Y_{1\lambda}(\bar{q}_5 - \bar{q}_6)\delta^{(3)}(\bar{q}_5 + \bar{q}_6)$$
$$\delta^{(3)}(\bar{q}_1 - \bar{q}_{1'})\delta^{(3)}(\bar{q}_2 - \bar{q}_{3'})\delta^{(3)}(\bar{q}_9 - \bar{q}_{2'})\delta^{(3)}(\bar{q}_{10} - \bar{q}_{4'}) \tag{ก-2}$$

$$\varphi_{uuds\bar{s},\bar{u}\bar{u}\bar{d}s\bar{s}} = \varphi_{uuds\bar{s}}\varphi_{\bar{u}\bar{u}\bar{d}s\bar{s}}\delta^{(3)}(\bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \bar{q}_3 + \bar{q}_4 + \bar{q}_5 - \bar{k})\delta^{(3)}(\bar{q}_6 + \bar{q}_7 + \bar{q}_8 + \bar{q}_9 + \bar{q}_{10} + \bar{k}) \tag{ก-3}$$

$$\varphi_{\phi,X} = \varphi_\phi \varphi_X \delta^{(3)}(\bar{q}_{1'} + \bar{q}_{2'} - \bar{q})\delta^{(3)}(\bar{q}_{3'} + \bar{q}_{4'} + \bar{q}) \tag{ก-4}$$

$$\varphi_{uuds\bar{s}}(\bar{q}_1 \ldots \bar{q}_5) = N_{uuds\bar{s}} \exp\left\{-\frac{R_B^2}{4}\left[(\bar{q}_2 - \bar{q}_3)^2 + \frac{1}{3}(\bar{q}_2 + \bar{q}_3 - 2\bar{q}_4)^2 + \frac{1}{6}(\bar{q}_2 + \bar{q}_3 + \bar{q}_4 - 3\bar{q}_5)^2 + \frac{1}{10}(\bar{q}_2 + \bar{q}_3 + \bar{q}_4 + \bar{q}_5 - 4\bar{q}_1)^2\right\}\right] Y_{1\kappa}\left(\frac{\bar{q}_2 + \bar{q}_3 + \bar{q}_4 + \bar{q}_5 - 4\bar{q}_1}{\sqrt{20}}\right) \tag{ก-5}$$

$$\varphi_{\bar{u}\bar{u}\bar{d}s\bar{s}}(\bar{q}_6 \ldots \bar{q}_{10}) = N_{\bar{u}\bar{u}\bar{d}s\bar{s}} \exp\left\{-\frac{R_B^2}{4}\left[(\bar{q}_6 - \bar{q}_7)^2 + \frac{1}{3}(\bar{q}_6 + \bar{q}_7 - 2\bar{q}_8)^2 + \frac{1}{6}(\bar{q}_6 + \bar{q}_7 + \bar{q}_8 - 3\bar{q}_{10})^2 + \frac{1}{10}(\bar{q}_6 + \bar{q}_7 + \bar{q}_8 + \bar{q}_{10} - 4\bar{q}_9)^2\right\}\right] Y_{1\iota}\left(\frac{\bar{q}_6 + \bar{q}_7 + \bar{q}_8 + \bar{q}_{10} - 4\bar{q}_9}{\sqrt{20}}\right) \tag{ก-6}$$

$$\phi_\varphi(\vec{q}_{1'},\vec{q}_{2'}) = N_\phi \exp\left(-\frac{R_M{}^2}{8}(\vec{q}_{1'}-\vec{q}_{2'})^2\right) \tag{ก-7}$$

$$\varphi_X(\vec{q}_{3'},\vec{q}_{4'}) = N_X \exp\left(-\frac{R_M{}^2}{8}(\vec{q}_{3'}-\vec{q}_{4'})^2\right) \tag{ก-8}$$

จากนั้นปริพันธ์ $d^3\vec{q}_{1'}\ldots d^3\vec{q}_{4'}d^3\vec{q}_1\ldots d^3\vec{q}_6$ ด้วยฟังก์ชันเดลต้า $\delta^{(3)}(\vec{q}_3+\vec{q}_8)\delta^{(3)}(\vec{q}_4+\vec{q}_7)$ $\delta^{(3)}(\vec{q}_5+\vec{q}_6)\delta^{(3)}(\vec{q}_1-\vec{q}_{1'})\delta^{(3)}(\vec{q}_2-\vec{q}_{3'})\delta^{(3)}(\vec{q}_9-\vec{q}_{2'})\delta^{(3)}(\vec{q}_{10}-\vec{q}_{4'})\delta^{(3)}(\vec{q}_{1'}+\vec{q}_{2'}-\vec{q})$ $\delta^{(3)}(\vec{q}_{3'}+\vec{q}_{4'}+\vec{q})\delta^{(3)}(\vec{q}_1+\vec{q}_2+\vec{q}_3+\vec{q}_4+\vec{q}_5-\vec{k})\delta^{(3)}(\vec{q}_6+\vec{q}_7+\vec{q}_8+\vec{q}_9+\vec{q}_{10}+\vec{k})$

จะลดรูปเหลือเพียง

$$\begin{aligned}I_{spatial} = \int d^3\vec{q}_7\ldots d^3\vec{q}_{10} N\delta^{(3)}(\vec{0})\exp\Big(&-\tfrac{1}{5}(4\vec{k}^2+5\vec{q}^2+10\vec{q}_7^2+10\vec{q}_8^2+10\vec{k}\cdot\vec{q}_9-5\vec{q}\cdot\vec{q}_9+10\vec{q}_9^2\\&+10\vec{k}\cdot\vec{q}_{10}+5\vec{q}\cdot\vec{q}_{10}+10\vec{q}_9\cdot\vec{q}_{10}+10\vec{q}_{10}^2+10\vec{q}_8\cdot(\vec{k}+\vec{q}_9+\vec{q}_{10})+10\vec{q}_7\cdot(\vec{k}+\vec{q}_8+\vec{q}_9\\&+\vec{q}_{10}))R_B^2-\tfrac{1}{4}(\vec{q}^2-2\vec{q}\cdot\vec{q}_9+2\vec{q}_9^2+2\vec{q}\cdot\vec{q}_{10}+2\vec{q}_{10}^2)\,R_M^2\Big)Y_{1,\nu}\left(\frac{-\vec{k}-5\vec{q}_9}{2\sqrt{5}}\right)Y_{1,\mu}\left(-2\vec{q}_8\right)\\&Y_{1,\lambda}\left(-2\vec{q}_7\right)Y_{1,\kappa}\left(\frac{\vec{k}-\vec{q}-4(\vec{q}-\vec{q}_9)+\vec{q}_9}{2\sqrt{5}}\right)Y_{1,\eta}\left(-2(-\vec{k}-\vec{q}_7-\vec{q}_8-\vec{q}_9-\vec{q}_{10})\right)\end{aligned} \tag{ก-9}$$

กำจัดพจน์ที่อยู่ในรูป $\vec{q}_i\cdot\vec{k}$ และ $\vec{q}_i\cdot\vec{q}$ โดยการแปลง $\vec{q}_7$ $\vec{q}_8$ $\vec{q}_9$ และ $\vec{q}_{10}$ ให้อยู่ในรูป $\vec{q}_n=\vec{x}_n+\alpha_n\vec{k}+\beta_n\vec{q}$ โดยที่

$$\begin{gathered}\alpha_7=\alpha_8=-\frac{2R_B^2+R_M^2}{10R_B^2+3R_M^2},\ \ \alpha_9=\alpha_{10}=-\frac{2R_B^2}{10R_B^2+3R_M^2}\\ \beta_7=\beta_8=0\text{、}\ \beta_9=-\beta_{10}=\frac{1}{2}\end{gathered} \tag{ก-10}$$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
I_{spatial} = \int d^3\vec{q}_7 \ldots d^3\vec{q}_{10} N\delta^{(3)}(\vec{0})\exp\Bigg(& -\frac{1}{100R_B^2+30R_M^2}(4\vec{k}^2 R_B^2 R_M^2 + 5\vec{q}^2(10R_B^4+3R_B^2R_M^2) \\
& +5(10R_B^2+3R_M^2)(R_M^2(\vec{x}_9^2+\vec{x}_{10}^2)+4R_B^2(\vec{x}_7^2+\vec{x}_8^2+\vec{x}_9^2+\vec{x}_9\vec{x}_{10}+\vec{x}_{10}^2+\vec{x}_8(\vec{x}_9+\vec{x}_{10}) \\
& +\vec{x}_7(\vec{x}_8+\vec{x}_9+\vec{x}_{10}))))\Bigg) Y_{1,\eta}\left(-2(\vec{k}\alpha_7+\vec{x}_7)\right) Y_{1,\kappa}\left(\frac{\vec{k}(1+5\alpha_9)+5(\vec{q}(-1+\beta_9)+\vec{x}_9)}{2\sqrt{5}}\right) \\
& Y_{1,\lambda}\left(2(\vec{k}(1+\alpha_7+\alpha_8+\alpha_9+\alpha_{10})+\vec{q}(\beta_9+\beta_{10})+\vec{x}_7+\vec{x}_8+\vec{x}_9+\vec{x}_{10})\right) \\
& Y_{1,\mu}\left(-2(\vec{k}\alpha_8+\vec{x}_8)\right) Y_{1,\nu}\left(-\frac{\vec{k}+5(\vec{k}\alpha_9+\vec{q}\beta_9+\vec{x}_9)}{2\sqrt{5}}\right)
\end{aligned}
$$

(ก-11)

โดยที่ $\delta^{(3)}(\vec{0})$ บ่งบอกถึงระบบมีการอนุรักษ์โมเมนตัม จากสมการที่ ก-11 จะเห็นว่ามีพจน์ $\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j$ ซึ่งไม่สะดวกในการปริพันธ์ จึงต้องกำจัดทิ้งโดยกำหนดให้อยู่ในรูป $\vec{x}_m = b_m\vec{p}_7 + c_m\vec{p}_8 + d_m\vec{p}_9 + e_m\vec{p}_{10}$ โดยที่

$$
\begin{aligned}
& b_7 = \frac{4R_B^2+R_M^2}{R_B^2}, \quad b_8 = \frac{-2R_B^2-R_M^2}{2R_B^2}, \quad b_9 = -1, \quad b_{10} = -1, \quad c_7 = 0 \\
& c_8 = \frac{R_B^2}{4R_B^2+R_M^2}, \quad c_9 = c_{10} = -\frac{2R_B^4}{24R_B^4+10R_B^2R_M^2+R_M^4}, \quad d_7 = d_8 = 0 \\
& d_9 = -1, \quad d_{10} = \frac{2R_B^2}{4R_B^2+R_M^2}, \quad e_7 = e_8 = e_9 = 0, \quad e_{10} = -1
\end{aligned}
$$

(ก-12)

สมการที่ ก-11 จึงเขียนใหม่ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
I_{spatial} = \int d^3\vec{q}_7 \ldots d^3\vec{q}_{10} N\delta^{(3)}(\vec{0})\exp\Big(& -Q_k^2\vec{k}^2 - Q_q^2\vec{q}^2 - Q_{p_7}^2\vec{p}_7^{\,2} - Q_{p_8}^2\vec{p}_8^{\,2} - Q_{p_9}^2\vec{p}_9^{\,2} \\
& -Q_{p_{10}}^2\vec{p}_{10}^{\,2}\Big) Y_{1,\kappa}\left(\frac{\vec{k}(1+5\alpha_9)+5(\vec{q}(-1+\beta_9)-\vec{p}_7+c_9\vec{p}_8-\vec{p}_9)}{2\sqrt{5}}\right) \\
& Y_{1,\eta}\left(-2(\vec{k}\alpha_7+b_7\vec{p}_7)\right) Y_{1,\lambda}\Big(2(\vec{k}(1+\alpha_7+\alpha_8+\alpha_9+\alpha_{10})+\vec{q}(\beta_9+\beta_{10}) \\
& -2\vec{p}_7+b_7\vec{p}_7+b_8\vec{p}_7+c_8\vec{p}_8+c_9\vec{p}_8+c_{10}\vec{p}_8-\vec{p}_9+d_{10}\vec{p}_9-\vec{p}_{10})\Big) \\
& Y_{1,\mu}\left(-2(\vec{k}\alpha_8+b_8\vec{p}_7+c_8\vec{p}_8)\right) Y_{1,\nu}\left(-\frac{\vec{k}+5\vec{k}\alpha_9+5\vec{q}\beta_9-5\vec{p}_7+5c_9\vec{p}_8-5\vec{p}_9}{2\sqrt{5}}\right)
\end{aligned}
$$

(ก-13)

โดยที่

$$Q_k^{\,2} = \frac{2R_B^2 R_M^2}{50R_B^2 + 15R_M^2}\,,\quad Q_q^{\,2} = \frac{R_B^2}{2}\,,\quad Q_{p_7}^2 = 20R_B^2 + 11R_M^2 + \frac{3R_M^4}{2R_B^2}$$
$$Q_{p_8}^2 = \frac{2R_B^6}{24R_B^4 + 10R_B^2R_M^2 + R_M^4}\,,\quad Q_{p_9}^2 = \frac{12R_B^4 + 8R_B^2R_M^2 + R_M^4}{8R_B^2 + 2R_M^2}\,,\quad Q_{p_{10}}^2 = \frac{1}{2}(4R_B^2 + R_M^2) \tag{ก-14}$$

ขั้นตอนต่อไปเป็นการอธิบายกระบวนการประละลัย โดยดำเนินการภาพฉายลงบนคลื่นที่เปลี่ยนสถานะจาก S สู่ P จะได้แอมพลิจูดของคลื่นตำแหน่งว่า

$$I_{spatial,\,L=0,\,\ell_f=1} = \int d\Omega_k d\Omega_q Y_{0,0}^{*}(\hat{k}) Y_{1,m_f}^{*}(\hat{q}) I_{spatial} \tag{ก-15}$$

การปริพันธ์สามารถคำนวณได้โดยใช้คุณสมบัติของฮาร์มอนิคทรงกลมในปริภูมิโมเมนตัมและคุณสมบัติของปริพันธ์เกาส์เซียน

$$Y_{1,m}(\vec{y} + \vec{z}) = Y_{1,m}(\vec{y}) + Y_{1,m}(\vec{z})\,,\quad Y_{1,m}(\vec{y}) = yY_{1,m}(\hat{y}) \tag{ก-16}$$

$$Y_{1,m}(\hat{y}) = (-1)^m Y_{1,-m}^{*}(\hat{y}) \tag{ก-17}$$

$$\int d\Omega_y Y_{1,m}(\hat{y}) = 0 \tag{ก-18}$$

$$\int d\Omega_y Y_{1,a}(\hat{y}) Y_{1,b}^{*}(\hat{y}) = \delta_{a,b} \tag{ก-19}$$

$$\int d\Omega_y Y_{1,a}(\hat{y}) Y_{1,b}(\hat{y}) Y_{1,c}(\hat{y}) = 0 \tag{ก-20}$$

$$\int d\Omega_y Y_{1,a}(\hat{y})Y_{1,b}(\hat{y})Y_{1,c}(\hat{y})Y_{1,d}(\hat{y}) = \frac{3\delta_{a+b,2}\delta_{c+d,-2}}{10\pi} - \frac{3\delta_{a+b,1}\delta_{c+d,-1}}{20\pi} - \frac{3\delta_{a+b,-1}\delta_{c+d,1}}{20\pi} + \frac{3\delta_{a+b,-2}\delta_{c+d,2}}{10\pi} + \frac{(-1)^{b+d}\delta_{a,-b}\delta_{c,-d}}{4\pi} + \frac{1}{20\pi}(-1)^{a+b+c+d}(1+\delta_{a,0})(1+\delta_{d,0})\delta_{a,-b}\delta_{c,-d}$$

(ก-21)

$$\int d\bar{p}_l \bar{p}_l^n \exp\left(-Q_{p_l}^2 \bar{p}_l^2\right) = 0 \text{ โดยที่ } n = 1, 3, 5, \ldots \qquad \text{(ก-22)}$$

$$\int d\bar{p}_l \bar{p}_l^2 \exp\left(-Q_{p_l}^2 \bar{p}_l^2\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4(Q_{p_l}^2)^{3/2}} \qquad \text{(ก-23)}$$

$$\int d\bar{p}_l \bar{p}_l^4 \exp\left(-Q_{p_l}^2 \bar{p}_l^2\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{8(Q_{p_l}^2)^{5/2}} \qquad \text{(ก-24)}$$

$$\int d\bar{p}_l \bar{p}_l^6 \exp\left(-Q_{p_l}^2 \bar{p}_l^2\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{16(Q_{p_l}^2)^{7/2}} \qquad \text{(ก-25)}$$

เนื่องจากพิจารณาในระบบที่มีโมเมนตัมต่ำจึงสามารถใช้การประมาณให้เหลือเพียงพจน์ที่โดดเด่นได้ (Leading-order) นั่นคือโมเมนตัม q ส่วนพจน์อื่นเช่น $\bar{q}^n$ $\bar{k}^n$ $\bar{p}_l^{n-1} \cdot \bar{p}_l^{m-1}$ โดยที่ $n > 1,\ m > 1$ จะละทิ้งเนื่องจากมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับพจน์ที่โดดเด่น เมื่อทำการปริพันธ์และกำหนดให้พารามิเตอร์เชิงรัศมีมีค่า $R_{\Lambda} = 4.1\,GeV^{-1}$ และ $R_B = 3.1\,GeV^{-1}$ จะได้แอมพลิจูดของคลื่นตำแหน่งที่อยู่ในรูป

$$I_{spatial,\,L=0,\,\ell_f=1} = F_{L=0\,\ell_f=1} N f(\mu,\eta,\lambda,\kappa,\nu,m_l)\bar{q}\exp\left(-0.441\bar{k}^2 - 4.805\bar{q}^2\right) \qquad \text{(ก-26)}$$

โดยที่ $F_{L=0,\ell_f=1}$ คือค่าคงที่

แอมพลิจูดของการเปลี่ยนสถานะ

หลังจากคำนวณแอมพลิจูดของคลื่นตำแหน่งแล้วก็จะนำมาแทนค่าลงในสมการที่ 4-34

$$T_{if} = \lambda_{38}\lambda_{47}\lambda_{56} \langle f | \sum_{\mu,\eta,\lambda} (-1)^{1+\mu+\eta+\lambda} \sigma^{38}_{-\mu}\sigma^{47}_{-\eta}\sigma^{56}_{-\lambda} 1^{38}_F 1^{47}_F 1^{56}_F 1^{38}_C 1^{47}_C 1^{56}_C F_{L=0,\ell_f=1} N$$
$$f(\mu,\eta,\lambda,\kappa,\nu,m_f)\bar{q}\exp\left(-0.441\bar{k}^2 - 4.805\bar{q}^2\right)|i\rangle \qquad (ก\text{-}27)$$

เมื่อกำหนดให้

$$\hat{O}' = \sum_{\mu,\eta,\lambda} (-1)^{1+\mu+\eta+\lambda} \sigma^{38}_{-\mu}\sigma^{47}_{-\eta}\sigma^{56}_{-\lambda} 1^{38}_F 1^{47}_F 1^{56}_F 1^{38}_C 1^{47}_C 1^{56}_C \qquad (ก\text{-}28)$$

จะได้แอมพลิจูดของคลื่นตำแหน่งดังสมการที่ 4-40

$$T_{if}(\bar{q},\bar{k}) = \lambda_{38}\lambda_{47}\lambda_{56}\ F_{L=0,\ell_f=1} f(\kappa,\nu,\mu,\eta,\lambda)\bar{q}\exp\left\{-Q_q^2\bar{q}^2 - Q_k^2\bar{k}^2\right\} \langle f|\hat{O}'|i\rangle \qquad (ก\text{-}29)$$

ค่าแท้จริงของแอมพลิจูดของคลื่นตำแหน่งที่ได้จากการปริพันธ์

สมการที่ ก-26 สามารถให้อยู่ในรูปที่กระจายพจน์ทั้งหมดและแทนค่าพารามิเตอร์เชิงรัศมี $R_M = 4.1\, GeV^{-1}$ และ $R_B = 3.1\, GeV^{-1}$ โดยจะได้ค่าที่แท้จริงคือ

$$\begin{aligned} I_{spatial\ l=0\ \ell_f=1} = N\bar{q}e^{-0.441\bar{k}^2-4.805\bar{q}^2} \Big(& -2.642\times10^{-9}(-1)^{\mu+\nu}\delta_{\eta,-\nu}\delta_{\lambda,-\mu}\delta_{m_f,\kappa} \\ & -2.642\times10^{-9}(-1)^{\mu+\nu}\delta_{\eta,-\mu}\delta_{\lambda,-\nu}\delta_{m_f,\kappa} \\ & +1.299\times10^{-9}\delta_{\eta,2-\lambda}\delta_{\mu,-2-\nu}\delta_{m_f,\kappa} \\ & -6.496\times10^{-10}\delta_{\eta,1-\lambda}\delta_{\mu,-1-\nu}\delta_{m_f,\kappa} \\ & -6.496\times10^{-10}\delta_{\eta,-1-\lambda}\delta_{\mu,1-\nu}\delta_{m_f,\kappa} \\ & +1.299\times10^{-9}\delta_{\eta,-2-\lambda}\delta_{\mu,2-\nu}\delta_{m_f,\kappa} \\ & -1.559\times10^{-9}(-1)^{\lambda+\nu}\delta_{\eta,-\lambda}\delta_{\mu,-\nu}\delta_{m_f,\kappa} \\ & +2.165\times10^{-10}(-1)^{\eta+\lambda+\mu+\nu}\delta_{\eta,-\lambda}\delta_{\mu,-\nu}\delta_{m_f,\kappa} \\ & +2.165\times10^{-10}(-1)^{\eta+\lambda+\mu+\nu}\delta_{0,\eta}\delta_{\eta,-\lambda}\delta_{\mu,-\nu}\delta_{m_f,\kappa} \\ & +2.165\times10^{-10}(-1)^{\eta+\lambda+\mu+\nu}\delta_{0,\nu}\delta_{\eta,-\lambda}\delta_{\mu,-\nu}\delta_{m_f,\kappa} \\ & +2.165\times10^{-10}(-1)^{\eta+\lambda+\mu+\nu}\delta_{0,\eta}\delta_{0,\nu}\delta_{\eta,-\lambda}\delta_{\mu,-\nu}\delta_{m_f,\kappa} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2.642\times10^{-9}(-1)^{\lambda+\mu}\delta_{\eta,-\mu}\delta_{\kappa,-\lambda}\delta_{m_f,\nu}\\
&+2.642\times10^{-9}(-1)^{\lambda+\mu}\delta_{\eta,-\lambda}\delta_{\kappa,-\mu}\delta_{m_f,\nu}\\
&-1.299\times10^{-9}\delta_{\eta,2-\kappa}\delta_{\lambda,-2-\mu}\delta_{m_f,\nu}\\
&+6.496\times10^{-10}\delta_{\eta,1-\kappa}\delta_{\lambda,-1-\mu}\delta_{m_f,\nu}\\
&+6.496\times10^{-10}\delta_{\eta,-1-\kappa}\delta_{\lambda,1-\mu}\delta_{m_f,\nu}\\
&-1.299\times10^{-9}\delta_{\eta,-2-\kappa}\delta_{\lambda,2-\mu}\delta_{m_f,\nu}\\
&+1.559\times10^{-9}(-1)^{\kappa+\mu}\delta_{\eta,-\kappa}\delta_{\lambda,-\mu}\delta_{m_f,\nu}\\
&-2.165\times10^{-10}(-1)^{\eta+\kappa+\lambda+\mu}\delta_{\eta,-\kappa}\delta_{\lambda,-\mu}\delta_{m_f,\nu}\\
&-2.165\times10^{-10}(-1)^{\eta+\kappa+\lambda+\mu}\delta_{0,\eta}\delta_{\eta,-\kappa}\delta_{\lambda,-\mu}\delta_{m_f,\nu}\\
&-2.165\times10^{-10}(-1)^{\eta+\kappa+\lambda+\mu}\delta_{0,\mu}\delta_{\eta,-\kappa}\delta_{\lambda,-\mu}\delta_{m_f,\nu}\\
&-2.165\times10^{-10}(-1)^{\eta+\kappa+\lambda+\mu}\delta_{0,\eta}\delta_{0,\mu}\delta_{\eta,-\kappa}\delta_{\lambda,-\mu}\delta_{m_f,\nu}\Big)
\end{aligned}
\qquad (ก\text{-}30)
$$

ภาคผนวก ข

ความสัมพันธ์ระหว่างกลุ่มการเรียงสับเปลี่ยน S_4 และแบบรูป $[\lambda]$

ความสัมพันธ์ระหว่างกลุ่มการเรียงสับเปลี่ยน S_4 และแบบรูป $[\lambda]$

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างกลุ่มการเรียงสับเปลี่ยนอันดับที่ 4 หรือ S_4 และแบบรูป $[\lambda]$ ต่าง ๆ เริ่มจากแบบรูป $[1111]$ จากสมการที่ 3-1 จะพบว่าสมาชิกทั้งหมดของ S_4 คือ

$$\begin{aligned} S_4 = \{&(1), (12), (13), (14), (23), (24), (34), (123), (124), (132), (134), (142), \\ &(143), (234), (243), (1234), (1243), (1324), (1342), (1432), (1423), \\ &(12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \end{aligned} \qquad (ข\text{-}1)$$

สมาชิกแต่ละตัวจะอยู่ภายใต้ความสัมพันธ์ของสมการที่ 2-8 โดยที่ $n = 4$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + m\alpha_m = 4, \quad (m \le 4) \qquad (ข\text{-}2)$$

โดยที่ α_k คือจำนวนของวัฏจักรที่มีดีกรี k สมการที่ ข-2 มีความสัมพันธ์กับแบบรูป $[\lambda]$ ด้วยสมการที่ 2-10 และ 2-11 ดังนี้

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_m &= \lambda_1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_m &= \lambda_2 \\ \alpha_3 + \ldots + \alpha_m &= \lambda_3 \\ \ldots \quad &\ldots \\ \alpha_m &= \lambda_m \end{aligned} \qquad (ข\text{-}3)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = n, \quad (m \le n, \ \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_m) \qquad (ข\text{-}4)$$

เราสามารถจำแนกสมาชิกได้ 5 คลาสสังยุคด้วยนิยามของคลาสสังยุคจากสมการที่ 2-9

$$S_\chi = \chi \, S \, \chi^{-1} \qquad (ข\text{-}5)$$

คลาสสังยุคที่ 1 มีสมาชิกคือ $\{(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)\}$

<u>ตัวอย่าง</u>

จากสมการที่ ข-5

$$\begin{aligned} S_\chi &= \chi\, S\, \chi^{-1} \\ (1423) &= (1234)(1243)(1234)^{-1} \\ &= (1234)(1243)(1432) \\ &= (1423) \end{aligned} \qquad (ข\text{-}6)$$

สมาชิกทุกตัวของคลาสสังยุคที่ 1 สามารถเขียนให้อยู่ในแบบรูป α ได้ด้วยสมการที่ ข-2 ดังนี้

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 &= 4 \\ 0+0+0+4\alpha_4 &= 4 \\ 4\alpha_4 &= 4 \end{aligned} \qquad (ข\text{-}7)$$

โดยที่ $\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 1$
แบบรูป α ในสมการที่ ข-7 สมมารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการที่ ข-3 และ ข-4 ได้ว่า

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= 1 = \lambda_1 \\ \alpha_4 &= 1 = \lambda_2 \\ \alpha_4 &= 1 = \lambda_3 \\ \alpha_4 &= 1 = \lambda_4 \end{aligned} \qquad (ข\text{-}8)$$

โดยที่ $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = 1$ จะได้ว่า

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1+1+1+1 = 4 \qquad (ข\text{-}9)$$

ดังนั้นแบบรูป $[\lambda]$ ที่ได้จากแบบรูป $4\alpha_4 = 4$ คือ

$$[\lambda] = [\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4] = [1111] \qquad (ข\text{-}10)$$

คลาสสังยุคที่ 2 มีสมาชิกคือ $\{(123),(124),(132),(134),(142),(143),(234),(243)\}$

<u>ตัวอย่าง</u>

$$
\begin{aligned}
S_\chi &= \chi\, S\, \chi^{-1} \\
(234) &= (123)(124)(123)^{-1} \\
&= (123)(124)(132) \\
&= (234)
\end{aligned}
\tag{ข-11}
$$

เช่นเดียวกับคลาสสังยุคที่ 1 สมาชิกทุกตัวของคลาสสังยุคที่ 1 สามารถเขียนให้อยู่ในแบบรูป α ได้ด้วยสมการที่ ข-2 ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 &= 4 \\
\alpha_1 + 0 + 3\alpha_3 + 0 &= 4 \\
\alpha_1 + 3\alpha_3 &= 4
\end{aligned}
\tag{ข-12}
$$

โดยที่ $\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1, \quad \alpha_4 = 0$ ซึ่งสมมารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการที่ ข-3 และ ข-4 ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_3 &= 1 + 1 = 2 = \lambda_1 \\
\alpha_3 &= 1 = \lambda_2 \\
\alpha_3 &= 1 = \lambda_3
\end{aligned}
\tag{ข-13}
$$

$$
\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + 1 + 1 = 4 \tag{ข-14}
$$

ดังนั้นแบบรูป $[\lambda]$ ที่ได้จากแบบรูป $\alpha_1 + 3\alpha_3 = 4$ คือ

$$
[\lambda] = [\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3] = [211] \tag{ข-15}
$$

คลาสสังยุคที่ 3 มีสมาชิกคือ $\{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

<u>ตัวอย่าง</u>

$$
\begin{aligned}
S_\chi &= \chi\, S\, \chi^{-1} \\
(13)(24) &= \big((12)(34)\big)\big((13)(24)\big)\big((12)(34)\big)^{-1} \\
&= (12)(34)(13)(24)(12)(34) \\
&= (13)(24)
\end{aligned}
\tag{ข-16}
$$

เขียนให้อยู่ในแบบรูป α

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 &= 4 \\ 0 + 2\alpha_2 + 0 + 0 &= 4 \\ 2\alpha_2 &= 4\end{aligned} \tag{ข-17}$$

โดยที่ $\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 0$ จากนั้นจัดให้อยู่ในรูปสมการที่ ข-3 และ ข-4 ได้ว่า

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= 2 = \lambda_1 \\ \alpha_2 &= 2 = \lambda_2\end{aligned} \tag{ข-18}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2 + 2 = 4 \tag{ข-19}$$

ดังนั้นแบบรูป $[\lambda]$ ที่ได้จากแบบรูป $2\alpha_2 = 4$ คือ

$$[\lambda] = [\lambda_1 \lambda_2] = [22] \tag{ข-20}$$

คลาสสังยุคที่ 4 มีสมาชิกคือ $\{(12), (13), (14), (23), (24), (34)\}$

<u>ตัวอย่าง</u>

$$\begin{aligned}S_\chi &= \chi\, S\, \chi^{-1} \\ (23) &= (12)(13)(12)^{-1} \\ &= (12)(13)(12) \\ &= (23)\end{aligned} \tag{ข-21}$$

เขียนให้อยู่ในแบบรูป α โดยที่ $\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 0$

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 &= 4 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 0 + 0 &= 4 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 &= 4\end{aligned} \tag{ข-22}$$

จากนั้นจัดให้อยู่ในรูปสมการที่ ข-3 และ ข-4 ได้ว่า

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 3 = \lambda_1 \\ \alpha_2 &= 1 = \lambda_2 \end{aligned} \quad (ข\text{-}23)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 3 + 1 = 4 \quad (ข\text{-}24)$$

ดังนั้นแบบรูป $[\lambda]$ ที่ได้จากแบบรูป $\alpha_1 + 2\alpha_2 = 4$ คือ

$$[\lambda] = [\lambda_1 \lambda_2] = [31] \quad (ข\text{-}25)$$

คลาสสังยุคที่ 5 มีสมาชิกคือ $\{(1)\}$

ตัวอย่าง

$$\begin{aligned} S_\chi &= \chi\, S\, \chi^{-1} \\ (1) &= (1)(1)(1)^{-1} \\ &= (1)(1)(1) \\ &= (1) \end{aligned} \quad (ข\text{-}26)$$

เขียนให้อยู่ในแบบรูป α โดยที่ $\alpha_1 = 4, \ \ \alpha_2 = 0, \ \ \alpha_3 = 0, \ \ \alpha_4 = 0$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 &= 4 \\ \alpha_1 + 0 + 0 + 0 &= 4 \\ \alpha_1 &= 4 \end{aligned} \quad (ข\text{-}27)$$

จัดให้อยู่ในรูปสมการที่ ข-3 และ ข-4 ได้ว่า

$$\alpha_1 = 4 = \lambda_1 \quad (ข\text{-}28)$$

$$\lambda_1 = 4 \quad (ข\text{-}29)$$

ดังนั้นแบบรูป $[\lambda]$ ที่ได้จากแบบรูป $\alpha_1 = 4$ คือ

$$[\lambda] = [\lambda_1] = [4] \quad (ข\text{-}30)$$