บทที่ 4
ผลการวิจัย

ในบทนี้ผู้วิจัยจะกล่าวถึงทฤษฎีบทและการพิสูจน์เกี่ยวกับจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าแบบวนบนรูปทั่วไปของฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0 ภายใต้ปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ โดยขยายกรอบแนวคิดจากงานวิจัยที่ได้ศึกษา ดังนี้

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะเป็นทฤษฎีบทที่เป็นหัวใจหลักของงานวิจัยนี้ นั่นคือ

ทฤษฎีบท 4.1 ให้ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (X,d) และให้ $p: X\times X \to [0,\infty)$ เป็นฟังก์ชัน τ^0 บน X กำหนดให้ T เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน A และ B และ Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $x\in A\cup B$ และให้ $\varphi:[0,\infty)\to[0,1)$ เป็นฟังก์ชัน MT ซึ่ง

$$D_p(Tx,Ty)\le \varphi(p(x,y))p(x,y) \text{ สำหรับทุก } x\in A \text{และ } y\in B$$

แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A\cap B$

พิสูจน์ จากบทตั้ง 2.2.4 เราสามารถนิยามฟังก์ชัน $k:[0,\infty)\to[0,1)$ ที่เป็นฟังก์ชัน MT โดย $k(t)=\dfrac{\varphi(t)+1}{2}$ ดังนั้น จะได้ว่า $\varphi(t)<k(t)$ และ $0<k(t)<1$ สำหรับทุก $t\in[0,\infty)$

กำหนดให้ $x_0\in A$ และ $x_1\in Tx_0\subseteq B$

ถ้า $D_p(Tx_0,Tx_1)=0$ จะได้ว่า $Tx_0=Tx_1$ นั่นคือ $x_1\in Tx_1$ แสดงว่า $F_T\neq\phi$

แต่ถ้า $D_p(Tx_0,Tx_1)>0$ จะได้ว่า จะมี $x_2\in Tx_1\subseteq A$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} p(x_1,x_2) &\le D_p(Tx_0,Tx_1)\\ &\le \varphi(p(x_0,x_1))p(x_0,x_1)\\ &< k(p(x_0,x_1))p(x_0,x_1)\end{aligned}$$

นั่นคือ $p(x_1,x_2)<k(p(x_0,x_1))p(x_0,x_1)$

ถ้า $D_p(Tx_1,Tx_2)=0$ ซึ่งจะได้ว่า $Tx_1=Tx_2$ นั่นคือ $x_2\in Tx_2$ แสดงว่า $F_T\neq\phi$

แต่ถ้า $D_p(Tx_1,Tx_2)>0$ จะได้ว่า จะมี $x_3\in Tx_2\subseteq B$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} p(x_2,x_3) &\le D_p(Tx_1,Tx_2)\\ &\le \varphi(p(x_1,x_2))p(x_1,x_2)\\ &< k(p(x_1,x_2))p(x_1,x_2)\end{aligned}$$

นั่นคือ $p(x_2,x_3)<k(p(x_1,x_2))p(x_1,x_2)$

ในทำนองเดียวกัน เราจะได้ลำดับ $\{x_n\}$ โดยที่ $x_{n+1} \in Tx_n$ ซึ่งจะพบว่า $x_{2n} \in A$, $x_{2n+1} \in B$, $p(x_n, x_{n+1}) > 0$ และ $p(x_{n+1}, x_{n+2}) < k(p(x_n, x_{n+1}))p(x_n, x_{n+1})$ สำหรับ $n \in \mathbb{N}$

เนื่องจาก $k(t) < 1$ สำหรับทุก $t \in [0,\infty)$ ดังนั้น $\{p(x_n, x_{n+1})\}$ เป็นลำดับลดโดยแท้ในช่วง $[0,\infty)$ กำหนดให้ $\delta := \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_{n-1}) = \inf_{n\in\mathbb{N}} p(x_n, x_{n+1}) \geq 0$

เนื่องจาก k เป็นฟังก์ชัน MT ดังนั้น จะมี $c \in (0,1)$ และ $\varepsilon > 0$ ซึ่ง $k(s) \leq c$ สำหรับทุก $s \in [\delta, \delta+\varepsilon)$ และเนื่องจาก $\delta := \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+1}) = \inf_{n\in\mathbb{N}} p(x_n, x_{n+1}) \geq 0$ นั่นคือ จะมี $\ell \in \mathbb{N}$ ที่เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง

$$\delta \leq p(x_n, x_{n+1}) < \delta + \varepsilon$$

สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ เมื่อ $n \geq \ell$

กำหนดให้ $v_n = x_{n+\ell-1}$ ดังนั้น เราจะพบว่า

$$p(v_{n+1}, v_{n+2}) \leq k\big(p(v_n, v_{n+1})\big)\, p(v_n, v_{n+1}) \leq cp(v_n, v_{n+1})$$

เพราะฉะนั้น เราจะได้ว่า

$$p(v_{n+1}, v_{n+2}) \leq cp(v_n, v_{n+1}) \leq \ldots \leq c^n p(v_1, v_2) \text{ สำหรับทุก } n \in \mathbb{N}$$

ดังนั้น สำหรับ $n, m \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $m > n$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} p(v_n, v_m) &\leq p(v_n, v_{n+1}) + p(v_{n+1}, v_{n+2}) + \cdots + p(v_{m-1}, v_m) \\ &< \mathrm{c}^{n-1} p(v_1, v_2) + c^n p(v_1, v_2) + \cdots + c^{m-2} p(v_1, v_2) \\ &= \frac{c^{n-1}(1 - c^{m-n-1})}{1-c} p(v_1, v_2) \\ &= \frac{c^{n-1} - c^{m-2}}{1-c} p(v_1, v_2) \\ &< \frac{c^{n-1}}{1-c} p(v_1, v_2) \qquad (4.1) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $0 < \mathrm{c} < 1$ ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} \sup\{p(v_n, v_m) : m > n\} = 0$

เพราะฉะนั้นลำดับ $\{v_n\}$ เป็นลำดับโคชี เนื่องจาก (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ ดังนั้น จะมี $v \in X$ ซึ่ง $v_n \to v$ เมื่อ $n \to \infty$ เนื่องจาก $\{x_{2n}\} \subseteq A$ และ $\{x_{2n-1}\} \subseteq B$ ดังนั้น $\{v_{2n}\} \subseteq A$ และ $\{v_{2n-1}\} \subseteq B$ เนื่องจาก A และ B เป็นเซตปิด และ $v_{2n} \to v$ และ $v_{2n-1} \to v$ เมื่อ $n \to \infty$ จะทำให้ได้ว่า $v \in A$ และ $v \in B$ ตามลำดับ แสดงว่า $v \in A \cap B$ และจากเงื่อนไข ($\tau 2$) และ (4.1) จะได้ว่า สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

$$p(v_n, v) \leq \frac{c^{n-1}}{1-c} p(v_1, v_2)$$

จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} p(v_n, v) = 0$

แต่เนื่องจาก

$$\begin{aligned} p(v,Tv) &\leq p(v,v_{n+1}) + p(v_{n+1},Tv) \\ &\leq p(v,v_{n+1}) + D_p(Tv_n,Tv) \\ &\leq p(v,v_{n+1}) + \varphi(p(v_n,v))p(v_n,v) \end{aligned}$$

ดังนั้น สำหรับ $n \to \infty$ จะได้ว่า $p(v,Tv)=0$ และ เนื่องจาก Tv เป็นเซตปิด แสดงว่า $v \in Tv$

บทแทรก 4.2 ให้ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (X,d) และให้ $p: X \times X \to [0,\infty)$ เป็นฟังก์ชัน τ^0 บน X กำหนดให้ T เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน A และ B ซึ่ง Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $x \in A \cup B$ ถ้า มีค่าคงที่ $k \in (0,1)$ ซึ่ง

$$D_p(Tx,Ty) \leq kp(x,y) \text{ สำหรับทุก } x \in A \text{และ } y \in B$$

แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A \cap B$

พิสูจน์ ให้ฟังก์ชัน $\varphi:[0,\infty) \to [0,1)$ กำหนดโดย $\varphi(t)=k \in (0,1)$ สำหรับทุก $t \in [0,\infty)$ เราจะได้ว่า φ เป็นฟังก์ชัน MT จากทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่า T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A \cap B$

จากทฤษฎีบท 4.1 จะทำให้เราได้บทแทรก 4.3 ซึ่งเป็นทฤษฎีบทในงานวิจัยของ Neammanee and Kaewkhao (2011) ดังนี้

บทแทรก 4.3 ให้ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (X,d) กำหนดให้ T เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน A และ B ซึ่ง Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $x \in A \cup B$ ถ้า มีค่าคงที่ $k \in (0,1)$ ซึ่ง

$$H(Tx,Ty) \leq kd(x,y) \text{ สำหรับทุก } x \in A \text{และ } y \in B$$

แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A \cap B$

พิสูจน์ ให้ฟังก์ชัน $\varphi:[0,\infty) \to [0,1)$ ซึ่งนิยามโดย $\varphi(t)=k \in (0,1)$ สำหรับทุก $t \in [0,\infty)$ และเนื่องจากฟังก์ชันอิงระยะทาง d เป็นฟังก์ชัน τ^0 ดังนั้น จากทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่า T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A \cap B$

ตัวอย่าง 4.4 ให้ $X=\mathbb{R}, A=\{0,1\}$ และ $B=\{1,2\}$ เมื่อ $d(x,y)=|x-y|$ สำหรับ $x,y \in X$ แล้ว (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์และให้การส่ง $T: A \cup B \to P(X)$ กำหนดโดย

$$Tx=\begin{cases} \{1,2\} & ; x=0, \\ \{1\} & ; x \in \{1,2\} \end{cases}$$

จากเงื่อนไขดังกล่าวเห็นได้ชัดว่า T เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน A และ B ซึ่ง Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $x \in A \cup B = \{0,1,2\}$ และ $F_T = \{1\} \subseteq A \cap B$

ซึ่งเราจะพบว่า $H(T0,T1) = 1$, $H(T0,T2) = 1$, $H(T1,T2) = 0$ และ $d(0,1) = 1$ ดังนั้น จึงไม่มีค่าคงที่ $k \in (0,1)$ ที่ทำให้ $H(T0,T1) \le kd(0,1)$ ทำให้บทแทรก 4.3 ซึ่งเป็นทฤษฎีบทในงานวิจัยของ Neammanee and Kaewkhao (2011) ไม่สามารถบอกได้ว่า T จะมีจุดตรึงใน $A \cap B$

แต่พบว่า สำหรับ $p: X \times X \to [0,\infty)$ กำหนดโดย

$$p(x,y) = \max\{2(x-y), 3(y-x)\} \text{ สำหรับ } x,y \in X$$

และ $\varphi:[0,\infty) \to [0,1)$ กำหนดโดย $\varphi(t) = \dfrac{9}{10}$ สำหรับทุก $t \in [0,\infty)$

จะได้ว่า

$$D_p(T0,T1) = 2 \le \frac{9}{10}(3) = \varphi(p(0,1))p(0,1),$$

$$D_p(T0,T2) = 2 \le \frac{9}{10}(6) = \varphi(p(0,2))p(0,2),$$

และ
$$D_p(T1,T2) = 0 \le \frac{9}{10}(3) = \varphi(p(1,2))p(1,2)$$

ทำให้ได้ว่า $D_p(Tx,Ty) \le \varphi(p(x,y))p(x,y)$ สำหรับทุก $x \in A$ และ $y \in B$

และเนื่องจาก p เป็นฟังก์ชัน τ^0 บน X และ φ เป็นฟังก์ชัน MT

ซึ่งสอดคล้องกับ บทแทรก 4.2 ทำให้ได้ว่า $F_T \neq \phi$ และ $F_T \subseteq A \cap B$

ตัวอย่าง 4.5 ให้ $X = \mathbb{R}, A = [0,1]$ และ $B = [1,2]$ เมื่อ $d(x,y) = |x-y|$ สำหรับ $x,y \in X$ แล้ว (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์และให้การส่ง $T: A \cup B \to P(X)$ กำหนดโดย

$$Tx = \begin{cases} \{1, 2-x\} & ; x \in [0,1), \\ \{1\} & ; x \in [1,2] \end{cases}$$

จากเงื่อนไขดังกล่าวเห็นได้ชัดว่า T เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน A และ B ซึ่ง Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $x \in A \cup B = [0,2]$ และ $F_T = \{1\} \subseteq A \cap B = \{1\}$

ซึ่งเราจะพบว่า สำหรับ $x \in [0,1)$ และ $y = 1$ จะได้ว่า $H(Tx,Ty) = 1-x$ และ $d(x,y) = 1-x$ ดังนั้น จึงไม่มีค่าคงที่ $k \in (0,1)$ ที่ทำให้ $H(Tx,Ty) \le kd(x,y)$ ทำให้บทแทรก 4.3 ซึ่งเป็นทฤษฎีบทในงานวิจัยของ Neammanee and Kaewkhao (2011) ไม่สามารถบอกได้ว่า T จะมีจุดตรึงใน $A \cap B$

แต่พบว่า สำหรับ $p: X\times X \to [0,\infty)$ กำหนดโดย

$$p(x,y)=\max\{2(x-y),3(y-x)\} \text{ สำหรับ } x,y\in X$$

และ $\varphi:[0,\infty)\to[0,1)$ กำหนดโดย $\varphi(t)=\dfrac{3}{4}$ สำหรับทุก $t\in[0,\infty)$ จะได้ว่า

สำหรับทุก $x\in[0,1)$ และ $y\in[1,2]$

$$D_p(Tx,Ty)=2(1-x)\le\frac{3}{4}(3(1-x))\le\frac{3}{4}(3(y-x))=\varphi(p(x,y))p(x,y)$$

และสำหรับทุก $x=1$ และ $y\in[1,2]$

$$D_p(Tx,Ty)=0\le\frac{3}{4}(3(y-1))=\varphi(p(x,y))p(x,y)$$

ทำให้ได้ว่า $D_p(Tx,Ty)\le\varphi(p(x,y))p(x,y)$ สำหรับทุก $x\in A$ และ $y\in B$

และเนื่องจาก p เป็นฟังก์ชัน τ^0 บน X และ φ เป็นฟังก์ชัน MT

ซึ่งสอดคล้องกับ บทแทรก 4.2 ทำให้ได้ว่า $F_T\neq\phi$ และ $F_T\subseteq A\cap B$

ตัวอย่าง 4.6 ให้ $X=\mathbb{R}, A=[-2,1]$ และ $B=[-1,2]$ เมื่อ $d(x,y)=|x-y|$ สำหรับ $x,y\in X$ แล้ว (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์และให้การส่ง $T:A\cup B\to P(X)$ กำหนดโดย

$$Tx=\begin{cases}\{0,1,-x\} & ;x\in[-2,-1),\\ \{0,1\} & ;x\in[-1,2]\end{cases}$$

จากเงื่อนไขดังกล่าวเห็นได้ชัดว่า T เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน A และ B ซึ่ง Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $x\in A\cup B=[-2,2]$ และ $F_T=\{0,1\}\subseteq A\cap B=[-1,1]$

เราจะพบว่า สำหรับ $x\in[-2,-1)$ และ $y=-1$ จะได้ว่า $H(Tx,Ty)=|1+x|$ และ $d(x,y)=y-x$ ซึ่งทำให้ $H(Tx,Ty)=|1+x|=-(1+x)=-1-x=d(x,y)$

ดังนั้น จึงไม่มีค่าคงที่ $k\in(0,1)$ ที่ทำให้ $H(Tx,Ty)\le kd(x,y)$ ทำให้บทแทรก 4.3 ซึ่งเป็นทฤษฎีบทในงานวิจัยของ Neammanee and Kaewkhao (2011) ไม่สามารถบอกได้ว่า T จะมีจุดตรึงใน $A\cap B$

แต่พบว่า สำหรับ $p:X\times X\to[0,\infty)$ กำหนดโดย

$$p(x,y)=\max\{2(x-y),3(y-x)\} \text{ สำหรับ } x,y\in X$$

และ $\varphi:[0,\infty)\to[0,1)$ กำหนดโดย $\varphi(t)=\dfrac{3}{4}$ สำหรับทุก $t\in[0,\infty)$ จะได้ว่า

สำหรับทุก $x\in[-2,-1)$ และ $y\in[-1,2]$

$$D_p(Tx,Ty)=-2(1+x)\le\frac{3}{4}(-3(1+x))\le\frac{3}{4}(3(-1-x))\le\frac{3}{4}(3(y-x))=\varphi(p(x,y))p(x,y)$$

และสำหรับทุก $x \in [-1,1]$ และ $y \in [-1,2]$

$$D_p(Tx,Ty) = 0 \le \frac{3}{4}(3(y-x)) = \varphi(p(x,y))p(x,y)$$

ทำให้ได้ว่า $D_p(Tx,Ty) \le \varphi(p(x,y))p(x,y)$ สำหรับทุก $x \in A$ และ $y \in B$
และเนื่องจาก p เป็นฟังก์ชัน τ^0 บน X และ φ เป็นฟังก์ชัน MT
ซึ่งสอดคล้องกับ บทแทรก 4.2 ทำให้ได้ว่า $F_T \ne \phi$ และ $F_T \subseteq A \cap B$

จากทฤษฎีบท 4.1 และการพิสูจน์ทฤษฎีบทดังกล่าว ได้นำไปสู่การขยายผลทฤษฎีบทเกี่ยวกับจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าแบบวนบนรูปทั่วไปของฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0 ภายใต้ปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ของผลรวมของเซตจำกัด ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.7 ให้ $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (X,d) และให้ $p: X \times X \to [0,\infty)$ เป็นฟังก์ชัน τ^0 บน X กำหนดให้ $T: \bigcup_{i=1}^{n} A_i \to 2^X$ เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ และ Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ และเมื่อ $A_{n+1} = A_1$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(a) $Ta_i \subseteq A_{i+1}$ สำหรับ $a_i \in A_i$ และ $1 \le i \le n$

(b) มีฟังก์ชัน $\varphi: [0,\infty) \to [0,1)$ ที่เป็นฟังก์ชัน MT ซึ่ง
$D_p(Tx,Ty) \le \varphi(p(x,y))p(x,y)$ สำหรับทุก $x \in A_i$ และ $y \in A_{i+1}$ เมื่อ $1 \le i \le n$
แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

พิสูจน์ การพิสูจน์จะคล้ายกับทฤษฎีบท 4.1 โดยให้ $k: [0,\infty) \to [0,1)$ เป็นฟังก์ชัน MT โดย $k(t) = \dfrac{\varphi(t)+1}{2}$ ดังนั้น จะได้ว่า $\varphi(t) < k(t)$ และ $0 < k(t) < 1$ สำหรับทุก $t \in [0,\infty)$ และเราจะสร้างลำดับ $\{x_n\}$ ในลักษณะเดียวกับทฤษฎีบท 4.1 ซึ่งเราจะได้ $x_1 \in A_1$, $x_2 \in Tx_1 \subseteq A_2$, $x_3 \in Tx_2 \subseteq A_3, \ldots, x_n \in Tx_{n-1} \subseteq A_n$, $x_{n+1} \in Tx_n \subseteq A_1$, $x_{n+2} \in Tx_{n+1} \subseteq A_2, \ldots$ ดังนั้น เราจะได้ลำดับ $\{x_n\}$ โดยที่ $x_{n+1} \in Tx_n$ ซึ่งจะพบว่า $x_{kn+1} \in A_1$, $x_{kn+2} \in A_2, \ldots, x_{(k+1)n+1} \in A_1$ สำหรับ $k \in \{0,1,2,\ldots\}$, $p(x_i,x_{i+1}) > 0$ และ $p(x_{i+1},x_{i+2}) < k(p(x_i,x_{i+1}))p(x_i,x_{i+1})$ สำหรับ $i \in \mathbb{N}$ เนื่องจาก $k(t) < 1$ สำหรับทุก $t \in [0,\infty)$ ดังนั้น $\{x_n\}$ เป็นลำดับลดอย่างเข้มในช่วง $[0,\infty)$ กำหนดให้ $\delta := \lim_{n\to\infty} p(x_n,x_{n+1}) = \inf_{n\in\mathbb{N}} p(x_n,x_{n+1}) \ge 0$ นั่นคือ จะมี $\ell \in \mathbb{N}$ ซึ่ง

$$\delta \le p(x_n,x_{n+1}) < \delta + \varepsilon$$

สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ เมื่อ $n \ge \ell$ และกำหนดให้ $v_n = x_{n+\ell-1}$ เนื่องจาก k เป็นฟังก์ชัน MT ดังนั้น จะมี $c \in (0,1)$ และ $\varepsilon > 0$ ซึ่ง $k(s) \le c$ สำหรับทุก $s \in [\delta, \delta+\varepsilon)$

ดังนั้น เราจะพบว่า สำหรับ $n, m \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $m > n$ จะได้ว่า

$$p(v_n, v_m) < \frac{c^{n-1}}{1-c} p(v_1, v_2) \tag{4.2}$$

เนื่องจาก $0<c<1$ เมื่อ $n \to \infty$ ดังนั้น $\limsup_{n\to\infty} \{p(v_n, v_m) : m > n\} = 0$

เพราะฉะนั้นลำดับ $\{v_n\}$ เป็นลำดับโคชี เนื่องจาก (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ ดังนั้น จะมี $v \in X$ ซึ่ง $v_n \to v$ เมื่อ $n \to \infty$ ดังนั้น $v \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

และจากเงื่อนไข ($\tau 2$) และ (4.2) จะได้ว่า สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

$$p(v_n, v) \le \frac{c^{n-1}}{1-c} p(v_1, v_2)$$

ทำให้ได้ว่า $\lim_{n\to\infty} p(v_n, v) = 0$ ดังนั้น $p(v, Tv) = 0$ เนื่องจาก Tv เป็นเซตปิด แสดงว่า $v \in Tv$

บทแทรก 4.8 ให้ $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (X,d) และให้ $p: X \times X \to [0,\infty)$ เป็นฟังก์ชัน τ^0 บน X กำหนดให้ $T: \bigcup_{i=1}^{n} A_i \to 2^X$ เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ และ Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ และเมื่อ $A_{n+1} = A_1$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(a) $Ta_i \subseteq A_{i+1}$ สำหรับ $a_i \in A_i$ และ $1 \le i \le n$

(b) $\exists k \in (0,1)$ ซึ่ง $D_p(Tx, Ty) \le kp(x, y)$ สำหรับทุก $x \in A_i$ และ $y \in A_{i+1}$ เมื่อ $1 \le i \le n$

แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

พิสูจน์ ให้ฟังก์ชัน $\varphi: [0,\infty) \to [0,1)$ นิยามโดย $\varphi(t) = k \in (0,1)$ สำหรับทุก $t \in [0,\infty)$ เป็นฟังก์ชัน MT ดังนั้น จากทฤษฎีบท 4.7 จะได้ว่า T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

จากทฤษฎีบท 4.7 จะทำให้เราได้บทแทรก 4.9 ซึ่งเป็นทฤษฎีบทของในงานวิจัยของ Neammanee and Kaewkhao (2011) ดังนี้

บทแทรก 4.9 ให้ $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (X,d) กำหนดให้ $T: \bigcup_{i=1}^{n} A_i \to 2^X$ เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ และ Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ และเมื่อ $A_{n+1} = A_1$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(a) $Ta_i \subseteq A_{i+1}$ สำหรับ $a_i \in A_i$ และ $1 \le i \le n$;

(b) $\exists k \in (0,1)$ ซึ่ง $H(Tx,Ty) \le kd(x,y)$ สำหรับทุก $x \in A_i$ และ $y \in A_{i+1}$ เมื่อ $1 \le i \le n$

แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

พิสูจน์ บทแทรกให้ฟังก์ชัน $\varphi:[0,\infty)\to[0,1)$ นิยามโดย $\varphi(t)=k$ เมื่อ $k\in(0,1)$ สำหรับทุก $t\in[0,\infty)$ เป็นฟังก์ชัน MT และเนื่องจากฟังก์ชันอิงระยะทาง d เป็นฟังก์ชัน τ^0 ดังนั้น จากทฤษฎีบท 4.5 จะได้ว่า T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

ตัวอย่าง 4.10 ให้ $X=\mathbb{R}, A_1=\{0,1,2\}$. $A_2=\{1,2,3\}$ และ $A_3=\{2,3\}$ เมื่อ $d(x,y)=|x-y|$ สำหรับ $x,y\in X$ แล้ว (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์และให้การส่ง $T:A_1\cup A_2\cup A_3\to P(X)$ กำหนดโดย

$$Tx=\begin{cases}\{2,3\} & ; x=0,\\ \{2\} & ; x\in\{1,2,3\}\end{cases}$$

จากเงื่อนไขดังกล่าวเห็นได้ชัดว่า T เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน $A_1\cup A_2\cup A_3$ ซึ่ง Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $x\in A_1\cup A_2\cup A_3=\{0,1,2,3\}$ และ $F_T=\{2\}\subseteq A_1\cap A_2\cap A_3$

เราจะพบว่า $H(T0,T1)=1$ ซึ่งไม่มีจำนวน $k\in(0,1)$ ที่ทำให้ $H(T0,T1)\le kd(0,1)$ ทำให้บทแทรก 4.7 ซึ่งเป็นทฤษฎีบทในงานวิจัยของ Neammanee and Kaewkhao (2011) ไม่สามารถบอกได้ว่า T จะมีจุดตรึงใน $A_1\cap A_2\cap A_3$

แต่พบว่า สำหรับ $p:X\times X\to[0,\infty)$ กำหนดโดย

$$p(x,y)=\max\{2(x-y),3(y-x)\} \text{ สำหรับ } x,y\in X$$

และ $\varphi:[0,\infty)\to[0,1)$ กำหนดโดย $\varphi(t)=\dfrac{3t}{3t+1}$ สำหรับทุก $t\in[0,\infty)$

จะได้ว่า

$$D_p(T0,T1)=2\le\frac{9}{10}(3)=\varphi(p(0,1))p(0,1),$$

$$D_p(T0,T2)=2\le\frac{18}{19}(6)=\varphi(p(0,2))p(0,2),$$

$$D_p(T0,T3)=2\le\frac{18}{19}(6)=\varphi(p(0,3))p(0,3),$$

$$D_p(T1,T2)=0\le\frac{9}{10}(3)=\varphi(p(1,2))p(1,2),$$

$$D_p(T1,T3)=0\le\frac{18}{19}(6)=\varphi(p(1,3))p(1,3),$$

$$D_p(T2,T1) = 0 \le \frac{6}{7}(2) = \varphi(p(2,1))p(2,1),$$

$$D_p(T2,T3) = 0 \le \frac{9}{10}(3) = \varphi(p(2,3))p(2,3),$$

$$D_p(T1,T3) = 0 \le \frac{18}{19}(6) = \varphi(p(1,3))p(1,3),$$

$$D_p(T2,T0) = 2 \le \frac{12}{13}(4) = \varphi(p(2,0))p(2,0),$$

$$D_p(T3,T0) = 2 \le \frac{12}{13}(6) = \varphi(p(3,0))p(3,0),$$

$$D_p(T3,T1) = 0 \le \frac{12}{13}(4) = \varphi(p(3,1))p(3,1),$$

และ $$D_p(T3,T2) = 0 \le \frac{6}{7}(2) = \varphi(p(3,2))p(3,2)$$

ทำให้ได้ว่า $D_p(Tx,Ty) \le \varphi(p(x,y))p(x,y)$ สำหรับทุก $x \in A_i$ และ $y \in A_{i+1}$ และเนื่องจาก p เป็นฟังก์ชัน τ^0 บน X และ φ เป็นฟังก์ชัน MT ซึ่งสอดคล้องกับ ทฤษฎีบท 4.7 ทำให้ได้ว่า $F_T \neq \phi$ และ $F_T \subseteq A_1 \cap A_2 \cap A_3$

ตัวอย่าง 4.11 ให้ $X = \mathbb{R}, A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{1,2,3\}$ และ $A_3 = \{1,2,4\}$ เมื่อ $d(x,y) = |x-y|$ สำหรับ $x,y \in X$ แล้ว (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์และให้การส่ง $T : A_1 \cup A_2 \cup A_3 \to P(X)$ กำหนดโดย

$$Tx = \begin{cases} \{1,2\} & ; x \in \{1,2,3\}, \\ \{1\} & ; x \in \{4\} \end{cases}$$

จากเงื่อนไขดังกล่าวเห็นได้ชัดว่า T เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ซึ่ง Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1,2,3,4\}$ และ $F_T = \{1,2\} \subseteq A_1 \cap A_2 \cap A_3$

เราจะพบว่า $H(T4,T2) = 2$ และ $d(4,2) = 2$ ซึ่งไม่มีค่าคงที่ $k \in (0,1)$ ที่ทำให้ $H(T4,T2) \le kd(4,2)$ ทำให้บทแทรก 4.7 ซึ่งเป็นทฤษฎีบทในงานวิจัยของ Neammanee and Kaewkhao (2011) ไม่สามารถบอกได้ว่า T จะมีจุดตรึงใน $A_1 \cap A_2 \cap A_3$

แต่พบว่า สำหรับ $p : X \times X \to [0,\infty)$ กำหนดโดย

$$p(x,y) = \max\{2(x-y), 3(y-x)\} \text{ สำหรับ } x,y \in X$$

และ $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ กำหนดโดย $\varphi(t) = \frac{9}{10}$ สำหรับทุก $t \in [0,\infty)$

จะได้ว่า $D_p(T1,T2) = 0 \le \frac{9}{10}(3) = \varphi(p(1,2))p(1,2)$,

$$D_p(T1,T3) = 0 \le \frac{9}{10}(6) = \varphi(p(1,3))p(1,3) \ ,$$

$$D_p(T1,T4) = 2 \le \frac{9}{10}(9) = \varphi(p(1,4))p(1,4) \ ,$$

$$D_p(T2,T1) = 0 \le \frac{9}{10}(2) = \varphi(p(2,1))p(2,1) \ ,$$

$$D_p(T2,T3) = 0 \le \frac{9}{10}(3) = \varphi(p(2,3))p(2,3) \ ,$$

$$D_p(T2,T4) = 2 \le \frac{9}{10}(6) = \varphi(p(2,4))p(2,4) \ ,$$

$$D_p(T3,T1) = 0 \le \frac{9}{10}(4) = \varphi(p(3,1))p(3,1) \ ,$$

$$D_p(T3,T2) = 0 \le \frac{9}{10}(2) = \varphi(p(3,2))p(3,2) \ ,$$

$$D_p(T3,T4) = 2 \le \frac{9}{10}(3) = \varphi(p(3,4))p(3,4) \ ,$$

$$D_p(T4,T1) = 2 \le \frac{9}{10}(6) = \varphi(p(4,1))p(4,1) \ ,$$

และ $$D_p(T4,T2) = 2 \le \frac{9}{10}(4) = \varphi(p(4,2))p(4,2)$$

ทำให้ได้ว่า

$$D_p(Tx,Ty) \le \varphi(p(x,y))p(x,y) \text{ สำหรับทุก } x \in A_i \text{ และ } y \in A_{i+1}$$

และเนื่องจาก p เป็นฟังก์ชัน τ^0 บน X และ φ เป็นฟังก์ชัน MT

ซึ่งสอดคล้องกับ บทแทรก 4.8 ทำให้ได้ว่า $F_T \neq \phi$ และ $F_T \subseteq A_1 \cap A_2 \cap A_3$

ผลจากทฤษฎีบท 4.1 นำไปสู่การขยายผลที่สู่ทฤษฎีบทที่สำคัญอีกทฤษฎีบทหนึ่ง คือ

ทฤษฎีบท 4.12 ให้ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทาง (X,d) และ $p: X\times X \to [0,\infty)$ เป็นฟังก์ชัน τ^0 บน $CB(X)$ กำหนดให้ T เป็นการส่งหลายค่าแบบวน บน A และ B และ Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $x \in A \cup B$ ถ้ามีฟังก์ชัน $\varphi:[0,\infty) \to [0,1)$ เป็นฟังก์ชัน MT และค่าคงที่ $L \ge 0$ ซึ่ง

$$D_p(Tx,Ty) \le \varphi(p(x,y))p(x,y) + L \cdot \min\{p(x,Ty), p(y,Tx)\}$$

สำหรับทุก $x \in A$ และ $y \in B$ แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A \cap B$ และ F_T เป็นเซตบริบูรณ์

พิสูจน์ เราสามารถใช้วิธีการเดียวกันกับทฤษฎีบท 4.1 ในการสร้างลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่ง $x_{n+1} \in Tx_n$ เพราะฉะนั้น ถ้า $x_n \in A$ เราจะได้ว่า $x_{n+1} \in Tx_n \subseteq B$ ดังนั้น จะได้ว่า

$$D_p(Tx_n,Tx_{n+1}) \le \varphi(p(x_n,x_{n+1}))p(x_n,x_{n+1}) + L \cdot \min\{p(x_{n+1},Tx_n), p(x_n,Tx_{n+1})\}$$

$$\leq \varphi(p(x_n, x_{n+1}))p(x_n, x_{n+1}) + L \cdot p(x_{n+1}, Tx_n)$$
$$= \varphi(p(x_n, x_{n+1}))p(x_n, x_{n+1})$$

ทำให้เราได้ว่า $F_T \neq \phi$ และ $F_T \subseteq A \cap B$

ต่อไปเราจะแสดงว่า F_T เป็นเซตบริบูรณ์ ให้ $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ เป็นลำดับใน F_T ซึ่ง $x_n \to u$ เนื่องจาก $F_T \subseteq A \cap B$ และ $A \cap B$ เป็นเซตปิด จะได้ว่า $u \in A \cap B$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
p(u,Tu) &\leq p(u,x_n) + p(x_n,Tx_{n-1}) + D_p(Tx_{n-1},Tu) \\
&= p(u,x_n) + D_p(Tx_{n-1},Tu) \\
&\leq p(u,x_n) + \varphi(p(x_{n-1},u))p(x_{n-1},u) + Lp(u,Tx_{n-1}) \\
&\leq p(u,x_n) + \varphi(p(x_{n-1},u))p(x_{n-1},u) + L\left(p(u,x_n) + p(x_n,Tx_{n-1})\right) \\
&= p(u,x_n) + \varphi(p(x_{n-1},u))p(x_{n-1},u) + Lp(u,x_n)
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น สำหรับ $n \to \infty$ จะได้ว่า $p(u,Tu) = 0$ และเนื่องจาก Tu เป็นเซตปิด ดังนั้น $u \in Tu$ ทำให้ได้ว่า F_T เป็นเซตปิด แสดงว่า F_T เป็นเซตบริบูรณ์

บทแทรก 4.13 ให้ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (X,d) และ $p: X \times X \to [0,\infty)$ เป็นฟังก์ชัน τ^0 บน $CB(X)$ กำหนดให้ T เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน A และ B ซึ่ง Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $x \in A \cup B$ ถ้าจะมี $\theta \in (0,1)$ และ $L \geq 0$ ซึ่ง

$$D_p(Tx,Ty) \leq \theta p(x,y) + L \cdot \min\{p(x,Ty), p(y,Tx)\}$$

สำหรับทุก $x \in A$ และ $y \in B$ แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A \cap B$ และ F_T เป็นเซตบริบูรณ์

พิสูจน์ ให้ฟังก์ชัน $\varphi: [0,\infty) \to [0,1)$ กำหนดโดย $\varphi(t) = k \in (0,1)$ สำหรับทุก $t \in [0,\infty)$ เราจะได้ว่า φ เป็นฟังก์ชัน MT จากทฤษฎีบท 4.10 จะได้ว่า T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A \cap B$ และ F_T เป็นเซตบริบูรณ์

จากทฤษฎีบท 4.10 ทำให้เราได้บทแทรก 4.12 ซึ่งเป็นทฤษฎีบทของในงานวิจัยของ Neammanee and Kaewkhao (2011) ดังนี้

บทแทรก 4.14 ให้ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (X,d) กำหนดให้ T เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน A และ B ซึ่ง Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $x \in A \cup B$ ถ้ามีค่าคงที่ $\theta \in (0,1)$ และ $L \geq 0$ ซึ่ง

$$H(Tx,Ty) \leq \theta d(x,y) + L \cdot \min\{d(x,Ty), d(y,Tx)\}$$

สำหรับทุก $x \in A$ และ $y \in B$ แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A \cap B$ และ F_T เป็นเซตบริบูรณ์

พิสูจน์ ให้ฟังก์ชัน $\varphi:[0,\infty)\rightarrow[0,1)$ กำหนดโดยโดย $\varphi(t)=\theta\in(0,1)$ สำหรับทุก $t\in[0,\infty)$ เราจะได้ว่า φ เป็นฟังก์ชัน MT จากทฤษฎีบท 4.10 จะได้ว่า T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A\cap B$ และ F_T เป็นเซตบริบูรณ์