

มหาวิทยาลัยบูรพา
Burapha University

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

1. หนังสือขอความอนุเคราะห์ตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมือเพื่อการวิจัย
2. หนังสือขอความอนุเคราะห์เก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อการวิจัย



ที่ ศธ ๖๖๑๕.๑/ว ๐๗/๙๐

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
ต.แสนสุข อ.เมือง จ.ชลบุรี ๒๐๑๓๑

๖ มิถุนายน พ.ศ. ๒๕๕๕

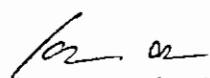
เรื่อง ขออนุมัติเคราะห้ตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมืองานวิจัย

เรียน อาจารย์พรทิพย์ โรจน์ศิริพิศาล

ด้วยนางสาวชมพูนุช รัตนกรัยพงศ์ นิสิตระดับปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา
แผน ก ภาคพิเศษ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา กำลังดำเนินการทำวิทยานิพนธ์
เรื่อง การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรูปแบบจิ๊กซอว์ (JIGSAW) แบบกลุ่มช่วยเรียนรายบุคคล (TAI)
และการจัดการเรียนแบบปกติ โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์สหทัย รัตนะมงคลกุล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาหลัก
ในการนี้ เพื่อให้การทำวิทยานิพนธ์ดำเนินไปด้วยความเรียบร้อย และมีประสิทธิภาพ คณะวิทยาศาสตร์
จึงขออนุมัติเคราะห้ทํานตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมืองานวิจัย

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาให้ความอนุเคราะห์ด้วย จักขอบคุณยิ่ง

ขอแสดงความนับถือ


(ผู้ช่วยศาสตราจารย์เอกรัฐ ศรีสุข)

รองคณบดีฝ่ายวิจัยและบัณฑิตศึกษา ปฏิบัติการแทน
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

สำนักงานคณบดี ฝ่ายวิจัยและบัณฑิตศึกษา

โทรศัพท์ ๐๓๘-๑๐๓๐๘๕

โทรสาร ๐๓๘-๑๐๓๐๕๑



ที่ ศธ ๖๖๑๕.๑/ว ๐๗๗๐

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
ต.แสนสุข อ.เมือง จ.ชลบุรี ๒๐๑๓๑

๖ มิถุนายน พ.ศ. ๒๕๕๕

เรื่อง ขออนุมัติโครงการตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมืองานวิจัย

เรียน อาจารย์กรรณิกา สุภาภา

ด้วยนางสาวชมพูนันท์ รัตนกรัยพงศ์ นิสิตระดับปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา
แผน ก ภาคพิเศษ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา กำลังดำเนินการทำวิทยานิพนธ์
เรื่อง การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรูปแบบจิ๊กซอว์ (JIGSAW) แบบกลุ่มช่วยเรียนรายบุคคล (TAI)
และการจัดการเรียนแบบปกติ โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์สหทัย รัตนมงคลกุล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาหลัก
ในการนี้ เพื่อให้การทำวิทยานิพนธ์ดำเนินไปด้วยความเรียบร้อย และมีประสิทธิภาพ คณะวิทยาศาสตร์
จึงขออนุมัติโครงการตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมืองานวิจัย

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาให้ความอนุเคราะห์ด้วย จักขอบคุณยิ่ง

ขอแสดงความนับถือ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์เอกรัฐ ศรีสุข)

รองคณบดีฝ่ายวิจัยและบัณฑิตศึกษา ปฏิบัติการแทน

คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

สำนักงานคณบดี ฝ่ายวิจัยและบัณฑิตศึกษา

โทรศัพท์ ๐๓๘-๑๐๓๐๘๕

โทรสาร ๐๓๘-๑๐๓๐๕๑



ที่ ศธ ๖๖๑๕.๑/ว ๐๗๘๐

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
ต.แสนสุข อ.เมือง จ.ชลบุรี ๒๐๑๓๑

๖ มิถุนายน พ.ศ. ๒๕๕๕

เรื่อง ขอความอนุเคราะห์ตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมืองานวิจัย

เรียน อาจารย์ราศรี หรีจันดา

ด้วยนางสาวชมพิตาน์ รัตนกรย์พงศ์ นิสิตระดับปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา
แผน ก ภาควิชา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา กำลังดำเนินการทำวิทยานิพนธ์
เรื่อง การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรูปแบบจิ๊กซอว์ (JIGSAW) แบบกลุ่มช่วยเรียนรายบุคคล (TAI)
และการจัดการเรียนแบบปกติ โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์สัททยา รัตนมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาหลัก
ในการนี้ เพื่อให้การทำวิทยานิพนธ์ดำเนินไปด้วยความเรียบร้อย และมีประสิทธิภาพ คณะวิทยาศาสตร์
จึงขอความอนุเคราะห์ท่านตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมืองานวิจัย

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาให้ความอนุเคราะห์ด้วย จักขอบคุณยิ่ง

ขอแสดงความนับถือ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์เอกรัฐ ศรีสุข)

รองคณบดีฝ่ายวิจัยและบัณฑิตศึกษา ปฏิบัติการแทน
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

สำนักงานคณบดี ฝ่ายวิจัยและบัณฑิตศึกษา

โทรศัพท์ ๐๓๘-๑๐๓๐๘๕

โทรสาร ๐๓๘-๑๐๓๐๕๑



ที่ ศธ ๖๖๑๕.๑/๖๖๑๐

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
ต.แสนสุข อ.เมือง จ.ชลบุรี ๒๐๑๓๑

๘ สิงหาคม พ.ศ. ๒๕๕๕

เรื่อง ขอความอนุเคราะห์เก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อหาคุณภาพเครื่องมือเพื่อการวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนคลองใหญ่วิทยาคม

ด้วยนางสาวชมพิดาน รัตนการย์พงศ์ นิสิตระดับปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา ภาควิเศษ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา กำลังดำเนินการทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ที่เรียนด้วยการจัดการเรียนรูปแบบจิ๊กซอว์ (JIGSAW) แบบกลุ่มช่วยเรียนรายบุคคล (TAI) และแบบปกติ โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สัทยา รัตนมงคลกุล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาหลัก ในการนี้ เพื่อให้การทำวิทยานิพนธ์ดำเนินไปด้วยความเรียบร้อย และมีประสิทธิภาพ คณะวิทยาศาสตร์ ขอความอนุเคราะห์ให้นางสาวชมพิดาน รัตนการย์พงศ์ เข้าเก็บข้อมูลจากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ ในวันที่ ๑๖-๑๗ สิงหาคม พ.ศ. ๒๕๕๕ ทั้งนี้ได้แนบเอกสารเครื่องมือเพื่อการวิจัย จำนวน ๑ ชุด มาพร้อมนี้แล้ว

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาให้ความอนุเคราะห์ด้วย จักขอบคุณยิ่ง

ขอแสดงความนับถือ


(ผู้ช่วยศาสตราจารย์เอกรัฐ ศรีสุข)

รองคณบดีฝ่ายวิจัยและบัณฑิตศึกษา ปฏิบัติการแทน
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

สำนักงานคณบดี ฝ่ายวิจัยและบัณฑิตศึกษา

โทรศัพท์ ๐๓๘-๑๐๓๐๘๕

โทรสาร ๐๓๘-๑๐๓๐๕๑



ที่ ศธ ๖๖๑๕.๑/๑๓๙๘

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
ต.แสนสุข อ.เมือง จ.ชลบุรี ๒๐๑๓๑

๓ ตุลาคม พ.ศ. ๒๕๕๕

เรื่อง ขอบความอนุเคราะห์เก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อการวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนคลองใหญ่วิทยาคม

ด้วยนางสาวชมพูนันท์ รัตนกรย์พงศ์ นิสิตระดับปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา ภาควิชา คณະวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา กำลังดำเนินการทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง การเปรียบเทียบ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ ที่เรียนด้วยการจัดการเรียนรูปแบบจิ๊กซอว์ (JIGSAW) แบบกลุ่มช่วยเรียนรายบุคคล (TAI) และแบบปกติ โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ศัทธา รัตนมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาหลัก ในการนี้ เพื่อให้การทำ วิทยานิพนธ์ดำเนินไปด้วยความเรียบร้อย และมีประสิทธิภาพ คณະวิทยาศาสตร์ ขอบความอนุเคราะห์ ให้นางสาวชมพูนันท์ รัตนกรย์พงศ์ เข้าเก็บข้อมูลจากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ จำนวน ๗๒ คน ในวันที่ ๕ ตุลาคม พ.ศ. ๒๕๕๕

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาให้ความอนุเคราะห์ด้วย จักขอบคุณยิ่ง

ขอแสดงความนับถือ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์เอกรัฐ ศรีสุข)

รองคณบดีฝ่ายวิจัยและบัณฑิตศึกษา ปฏิบัติการแทน
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

สำนักงานคณบดี ฝ่ายวิจัยและบัณฑิตศึกษา

โทรศัพท์ ๐๓๘-๑๐๓๐๘๕

โทรสาร ๐๓๘-๑๐๓๐๕๑

ภาคผนวก ข

1. ตารางแสดงค่า IOC ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ .
2. ตารางแสดงค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่
3. ตารางแสดงค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์
4. ตารางแสดงผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ก่อนเรียนและหลังเรียน เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ ที่ได้รับการจัดการเรียนแบบอัจฉริว แบบกลุ่มช่วยเรียนรายบุคคล และแบบปกติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
5. การวิเคราะห์ข้อมูลด้วยโปรแกรม SPSS

ตารางที่ 14 แสดงผลการประเมินแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยน และวิธีจัดหมู่ โดยผู้เชี่ยวชาญ ฉบับที่ 1

ข้อสอบข้อที่	คะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	ค่าเฉลี่ย IOC	สรุปผล
	1	2	3			
1	-1	1	1	1	0.33	ปรับปรุง
2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
4	1	1	1	3	1	ใช้ได้
5	1	1	1	3	1	ใช้ได้
6	1	1	1	3	1	ใช้ได้
7	1	1	1	3	1	ใช้ได้
8	1	1	1	3	1	ใช้ได้
9	1	1	1	3	1	ใช้ได้
10	1	1	1	3	1	ใช้ได้
11	-1	1	1	1	0.33	ปรับปรุง
12	1	1	1	3	1	ใช้ได้
13	1	1	1	3	1	ใช้ได้
14	1	1	1	3	1	ใช้ได้
15	1	1	1	3	1	ใช้ได้
16	1	1	1	3	1	ใช้ได้
17	1	1	1	3	1	ใช้ได้
18	1	1	1	3	1	ใช้ได้
19	1	1	1	3	1	ใช้ได้
20	1	1	1	3	1	ใช้ได้
21	1	1	1	3	1	ใช้ได้
22	1	1	1	3	1	ใช้ได้
23	1	1	1	3	1	ใช้ได้

ข้อสอบข้อที่	คะแนนความถี่เห็นของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	ค่าเฉลี่ย IOC	สรุปผล
	1	2	3			
24	1	1	1	3	1	ใช้ได้
25	1	1	1	3	1	ใช้ได้
26	1	1	1	3	1	ใช้ได้
27	1	1	1	3	1	ใช้ได้
28	1	1	1	3	1	ใช้ได้
29	1	1	1	3	1	ใช้ได้
30	1	1	1	3	1	ใช้ได้
31	1	1	1	3	1	ใช้ได้
32	1	1	1	3	1	ใช้ได้
33	1	1	1	3	1	ใช้ได้
34	1	1	1	3	1	ใช้ได้
35	1	1	1	3	1	ใช้ได้
36	1	1	1	3	1	ใช้ได้
37	1	1	1	3	1	ใช้ได้
38	1	1	1	3	1	ใช้ได้
39	1	1	1	3	1	ใช้ได้
40	1	1	1	3	1	ใช้ได้

ตารางที่ 15 แสดงผลการประเมินแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยน และวิธีจัดหมู่ โดยผู้เชี่ยวชาญ ฉบับที่ 2

ข้อสอบข้อที่	คะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	ค่าเฉลี่ย IOC	สรุปผล
	1	2	3			
1	0	1	1	2	0.67	ใช้ได้
2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
4	1	1	1	3	1	ใช้ได้
5	1	1	1	3	1	ใช้ได้
6	1	1	1	3	1	ใช้ได้
7	1	1	1	3	1	ใช้ได้
8	1	1	1	3	1	ใช้ได้
9	1	1	1	3	1	ใช้ได้
10	1	1	1	3	1	ใช้ได้
11	1	1	1	3	1	ใช้ได้
12	1	1	1	3	1	ใช้ได้
13	1	1	1	3	1	ใช้ได้
14	1	1	1	3	1	ใช้ได้
15	1	1	1	3	1	ใช้ได้
16	1	1	1	3	1	ใช้ได้
17	1	1	1	3	1	ใช้ได้
18	1	1	1	3	1	ใช้ได้
19	1	1	1	3	1	ใช้ได้
20	1	1	1	3	1	ใช้ได้
21	1	1	1	3	1	ใช้ได้
22	1	1	1	3	1	ใช้ได้
23	1	1	1	3	1	ใช้ได้

ข้อสอบข้อที่	คะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	ค่าเฉลี่ย IOC	สรุปผล
	1	2	3			
24	1	1	1	3	1	ใช้ได้
25	1	1	1	3	1	ใช้ได้
26	1	1	1	3	1	ใช้ได้
27	1	1	1	3	1	ใช้ได้
28	1	1	1	3	1	ใช้ได้
29	1	1	1	3	1	ใช้ได้
30	1	1	1	3	1	ใช้ได้
31	1	1	1	3	1	ใช้ได้
32	1	1	1	3	1	ใช้ได้
33	1	1	1	3	1	ใช้ได้
34	1	1	1	3	1	ใช้ได้
35	1	1	1	3	1	ใช้ได้
36	1	1	1	3	1	ใช้ได้
37	1	1	1	3	1	ใช้ได้
38	1	1	1	3	1	ใช้ได้
39	1	1	1	3	1	ใช้ได้
40	1	1	1	3	1	ใช้ได้

ตารางที่ 16 ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ ฉบับที่ 1

ข้อที่	p	r	ข้อที่	p	r
1	.66	.60	16	.63	.80
2	.75	.20	17	.75	.50
3	.69	.60	18	.66	.40
4	.41	.60	19	.41	.30
5	.53	.30	20	.56	.30
6	.63	.70	21	.72	.40
7	.78	.60	22	.75	.40
8	.75	.30	23	.56	.60
9	.53	.20	24	.69	.50
10	.47	.30	25	.41	.60
11	.53	.70	26	.41	.30
12	.69	.30	27	.25	.30
13	.72	.40	28	.22	.40
14	.69	.80	29	.41	.30
15	.66	.80	30	.31	.30

ตารางที่ 17 ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ ฉบับที่ 2

ข้อที่	p	r	ข้อที่	p	r
1	.69	.80	16	.63	.60
2	.75	.50	17	.75	.50
3	.63	.60	18	.69	.60
4	.50	.50	19	.53	.50
5	.63	.60	20	.72	.60
6	.66	.20	21	.56	.20
7	.78	.40	22	.72	.30
8	.78	.30	23	.56	.90
9	.66	.50	24	.59	.20
10	.56	.30	25	.59	.40
11	.56	.70	26	.63	.50
12	.63	.40	27	.22	.30
13	.67	.50	28	.22	.40
14	.56	.30	29	.56	.20
15	.69	.40	30	.22	.30

ตารางที่ 18 ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

ข้อที่	ค่าอำนาจจำแนก (r)
1	.49
2	.51
3	.58
4	.26
5	.59
6	.74
7	.47
8	.47
9	.48
10	.58
11	.38
12	.67
13	.76
14	.72
15	.56

ค่าความเชื่อมั่น .83

ตารางที่ 19 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ก่อนเรียนและหลังเรียน เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ ที่ได้รับการจัดการเรียนแบบจิ๊กซอว์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา ปีที่ 5

คนที่	Pretest	Posttest	คนที่	Pretest	Posttest
1	6	22	13	7	21
2	7	19	14	4	22
3	6	18	15	5	21
4	9	24	16	9	18
5	7	23	17	6	18
6	4	23	18	6	16
7	4	20	19	7	18
8	8	19	20	6	22
9	6	23	21	10	25
10	8	21	22	10	19
11	8	14	23	4	17
12	3	17	24	8	23
ผลรวม				158	483

ค่าดัชนีประสิทธิผล

E.I.

ผลรวมของคะแนนหลังเรียนทุกคน

ผลรวมของคะแนนก่อนเรียนทุกคน

(จำนวนนักเรียน×คะแนนเต็ม)

ผลรวมของคะแนนก่อนเรียนทุกคน

483 - 158

(24 × 30) - 158

325

562

0.5783

ตารางที่ 20 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ก่อนเรียนและหลังเรียน เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ ที่ได้รับการจัดการเรียนแบบกลุ่มช่วยเรียนรายบุคคลของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

คนที่	Pretest	Posttest	คนที่	Pretest	Posttest
1	9	23	13	8	29
2	3	22	14	11	24
3	4	22	15	4	23
4	9	21	16	9	20
5	7	27	17	7	28
6	8	20	18	7	24
7	8	25	19	6	27
8	4	26	20	7	16
9	8	26	21	4	21
10	7	17	22	8	28
11	4	20	23	3	26
12	7	17	24	4	20
ผลรวม				156	552

ค่าดัชนีประสิทธิผล

E.I. =
$$\frac{\text{ผลรวมของคะแนนหลังเรียนทุกคน} - \text{ผลรวมของคะแนนก่อนเรียนทุกคน}}{(\text{จำนวนนักเรียน} \times \text{คะแนนเต็ม}) - \text{ผลรวมของคะแนนก่อนเรียนทุกคน}}$$
$$\frac{552 - 156}{(24 \times 30) - 156}$$
$$\frac{396}{564}$$
$$0.7021$$

ตารางที่ 21 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ก่อนเรียนและหลังเรียน เรื่องวิธี
เรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ ที่ได้รับการจัดการเรียนแบบปกติ ของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

คนที่	Pretest	Posttest	คนที่	Pretest	Posttest
1	6	19	13	9	18
2	6	19	14	10	14
3	6	14	15	5	18
4	7	14	16	5	21
5	4	21	17	5	15
6	2	27	18	7	20
7	5	26	19	10	21
8	7	19	20	8	15
9	7	17	21	8	20
10	6	22	22	7	17
11	8	21	23	5	15
12	10	19	24	4	19
ผลรวม				157	451

ค่าดัชนีประสิทธิผล

E.I. =
$$\frac{\text{ผลรวมของคะแนนหลังเรียนทุกคน} - \text{ผลรวมของคะแนนก่อนเรียนทุกคน}}{(\text{จำนวนนักเรียน} \times \text{คะแนนเต็ม}) - \text{ผลรวมของคะแนนก่อนเรียนทุกคน}}$$
$$\frac{451 - 157}{(24 \times 30) - 157}$$
$$\frac{294}{563}$$
$$0.5222$$

การวิเคราะห์ข้อมูลด้วยโปรแกรม SPSS

1. ทดสอบการแจกแจงปกติของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ ที่เรียนด้วยการจัดการเรียนรูปแบบจิ๊กซอว์ แบบกลุ่มช่วยเรียนรายบุคคล และแบบปกติ

Tests of Normality						
วิธีสอน	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
คะแนน แบบจิ๊กซอว์	.123	24	.200	.966	24	.573
แบบกลุ่มช่วยเรียนรายบุคคล	.123	24	.200	.959	24	.413
แบบปกติ	.135	24	.200	.929	24	.092

ง ผลผลการทดสอบการแจกแจงปกติของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของการจัดการเรียนรูปแบบจิ๊กซอว์ แบบกลุ่มช่วยเรียนรายบุคคลและแบบปกติ พบว่าค่า Kolmogorov-Smirnov^a เท่ากับ .123 .123 และ .135 ตามลำดับ ($p > .05$) ดังนั้นสรุปได้ว่าคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของการจัดการเรียนรูปแบบจิ๊กซอว์ แบบกลุ่มช่วยเรียนรายบุคคล และแบบปกติ มีเรแจกแจงแบบปกติ

2. ทดสอบความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ ที่เรียนด้วยการจัดการเรียนรูปแบบจิ๊กซอว์ แบบกลุ่มช่วยเรียนรายบุคคล และแบบปกติ

Test of Homogeneity of Variance					
		Levene Statistic	df1	df2	Sig.
คะแนน	Based on Mean	.890	2	69	.415
	Based on Median	.886	2	69	.417
	Based on Median and with adjusted df	.886	2	62.108	.418
	Based on trimmed mean	.897	2	69	.413

จากผลการทดสอบความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของการจัดการเรียนรูปแบบจิ๊กซอว์ แบบกลุ่มช่วยเรียนรายบุคคลและแบบปกติ พบว่าค่า Levene Statistic – .890 ($p > .05$) ดังนั้น สรุปได้ว่าคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของการจัดการเรียนรูปแบบจิ๊กซอว์ แบบกลุ่มช่วยเรียนรายบุคคล และแบบปกติ มีความแปรปรวนไม่แตกต่างกัน

3. ทดสอบการแจกแจงปกติของเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ ที่เรียนด้วยการจัดการเรียนรูปแบบจิ๊กซอว์ แบบกลุ่มช่วยเรียนรายบุคคล และแบบปกติ

Tests of Normality						
วิธีสอน	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
เจตคติ แบบจิ๊กซอว์	.123	24	.200	.967	24	.594
แบบกลุ่มช่วยเรียนรายบุคคล	.121	24	.200	.951	24	.279
แบบปกติ	.153	24	.153	.957	24	.375

จากผลการทดสอบการแจกแจงปกติของเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของการจัดการเรียนรูปแบบจิ๊กซอว์ แบบกลุ่มช่วยเรียนรายบุคคล และแบบปกติ พบว่า ค่า Kolmogorov-Smirnov เท่ากับ .123 .121 และ .153 ตามลำดับ ($p > .05$) ดังนั้นสรุปได้ว่าเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของการจัดการเรียนรูปแบบจิ๊กซอว์ แบบกลุ่มช่วยเรียนรายบุคคล และแบบปกติ มีการแจกแจงแบบปกติ

4. ทดสอบความแปรปรวนของเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ ที่เรียนด้วยการจัดการเรียนรูปแบบจิ๊กซอว์ แบบกลุ่มช่วยเรียนรายบุคคล และแบบปกติ

Test of Homogeneity of Variance

		Levene Statistic	df1	df2	Sig.
เจตคติ	Based on Mean	.345	2	69	.710
	Based on Median	.321	2	69	.727
	Based on Median and with adjusted df	.321	2	63.617	.727
	Based on trimmed mean	.343	2	69	.711

จ ผลการทดสอบความแปรปรวนของเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของการจัดการเรียน
รูปแบบจิ๊กซอว์ แบบกลุ่มช่วยเรียนรายบุคคล และแบบปกติ พบว่า ค่า Levene Statistic = .345
($p > .05$) ดังนั้นสรุปได้ว่าเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของการจัดการเรียนรูปแบบจิ๊กซอว์
แบบกลุ่มช่วยเรียนรายบุคคล และแบบปกติ มีความแปรปรวนไม่แตกต่างกัน

ภาคผนวก ก

1. แผนการจัดการเรียนรู้แบบจิ๊กซอว์ แบบกลุ่มช่วยเรียนรายบุคคล และแบบปกติ
2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่
3. แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม
4. แบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

แผนการจัดการเรียนรู้แบบจิ๊กซอว์

มหาวิทยาลัยบูรพา
Burapha University

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัส ก32202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 3 ชั่วโมง

เรื่อง กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับและแฟกทอเรียล

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง: แก้ปัญหาโดยใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ได้

1. สาระสำคัญ

การเขียนแผนภาพต้นไม้ (Tree diagram)

กฎการคูณ

ถ้าการทำงานอย่างหนึ่งมี k ขั้นตอน ขั้นตอนที่หนึ่งมีวิธีเลือกทำได้ n_1 วิธี ในแต่ละวิธีของขั้นตอนที่หนึ่งมีวิธีเลือกทำขั้นตอนที่สองได้ n_2 วิธี ในแต่ละวิธีที่ทำงานขั้นตอนที่หนึ่งและขั้นตอนที่สองมีวิธีเลือกทำขั้นตอนที่สามได้ n_3 วิธี เช่นนี้เรื่อยไปจนถึงขั้นตอนสุดท้ายคือขั้นตอนที่ k ทำได้ n_k วิธี จำนวนวิธีทั้งหมดที่เลือกทำงาน k อย่าง เท่ากับ $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k$ วิธี

กฎการบวก

ถ้าการทำงานหนึ่งมีวิธีการทำ k วิธี คือ วิธีที่ 1 ถึงวิธีที่ k โดยที่ (แต่ละวิธีงานเสร็จโดยไม่ต้องเนื่องทำวิธีอื่น)

การทำงานวิธีที่ 1 มีวิธีทำ n_1 วิธี

การทำงานวิธีที่ 2 มีวิธีทำ n_2 วิธี

การทำงานวิธีที่ 3 มีวิธีทำ n_3 วิธี

⋮

การทำงานวิธีที่ k มีวิธีทำ n_k วิธี

และวิธีการทำงานแต่ละวิธีแตกต่างกัน แล้ว

จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$ วิธี

แฟกทอเรียล ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก กำหนดสัญลักษณ์ $n!$ มีความหมายดังนี้

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 2 \times 1$$

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

2.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

- หาจำนวนวิธีของเหตุการณ์โดยใช้แผนภาพต้นไม้ (Tree diagram) ได้

- หาจำนวนวิธีของเหตุการณ์โดยใช้กฎการคูณได้
- หาจำนวนวิธีของเหตุการณ์โดยใช้กฎการบวกได้
- เข้าใจความหมายและหาค่าของแฟกทอเรียลได้

2.2 ด้านทักษะ/กระบวนการ

- การแก้ปัญหา
- การให้เหตุผล
- การสื่อสารและสื่อความหมาย
- การเชื่อมโยงความรู้วิชาคณิตศาสตร์

2.3 ด้านคุณลักษณะ

- นักเรียนมีวินัยและมีความรับผิดชอบในการเรียน
- นักเรียนมีความเสียสละเพื่อส่วนรวม
- นักเรียนให้ความร่วมมือและช่วยเหลือกัน

3. สารการเรียนรู้

แผนภาพต้นไม้ (Tree diagram)

ในชีวิตประจำวันเร มักจะพบปัญหาเกี่ยวกับการนับจำนวนวิธีทั้งหมดที่เหตุการณ์อย่างใดอย่างหนึ่งจะเป็นไปได้ หรือจำนวนวิธีในการจัดชุดของสิ่งของต่างๆ เช่น การจัดการแข่งขันกีฬา การจัดชุดเสื้อผ้า การจัดชุดอาหาร เป็นต้น การคำนวณเพื่อหาคำตอบสำหรับปัญหาประเภทต่าง ๆ ดังกล่าว จะทำได้ง่ายและสะดวกรวดเร็วขึ้นถ้าเข้าใจกฎเกณฑ์บางข้อ ซึ่งเรียกว่า หลักมูลฐานเกี่ยวกับการนับ

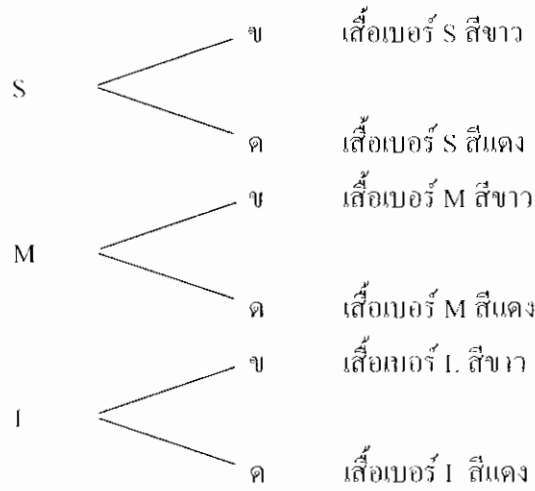
พิจารณา ปัญหาเกี่ยวกับการจัดสิ่งของต่างๆ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 ร้านค้าแห่งหนึ่งต้องการจัดโชว์เสื้อกีฬาทุกขนาดและทุกสี ถ้ามีเสื้อ 3 ขนาด และแต่ละขนาดมี 2 สี ก็นับเสื้อสีใดสีหนึ่งจะต้องจัดอย่างไร

วิธีทำ ในการแก้ปัญหาข้างต้นอาจจะใช้แผนภาพต้นไม้ช่วยในการคิดให้ง่ายขึ้น ดังนี้

- ให้
- ข แทนเสื้อสีขาว
 - ค แทนเสื้อสีแดง
 - S แทนเสื้อขนาดเล็กหรือเบอร์ S
 - M แทนเสื้อขนาดกลางหรือเบอร์ M
 - L แทนเสื้อขนาดใหญ่หรือเบอร์ L

หาวิธีการจัดเสื้อให้ครบทุกขนาดและสีโดยแผนภาพต้นไม้ดังนี้



จากแผนภาพ จะเห็นว่า จะต้องจัดเสื้อแต่ละขนาดให้ครบทั้งสองสี โดยจะมีเสื้อทั้งหมด 6 ตัว

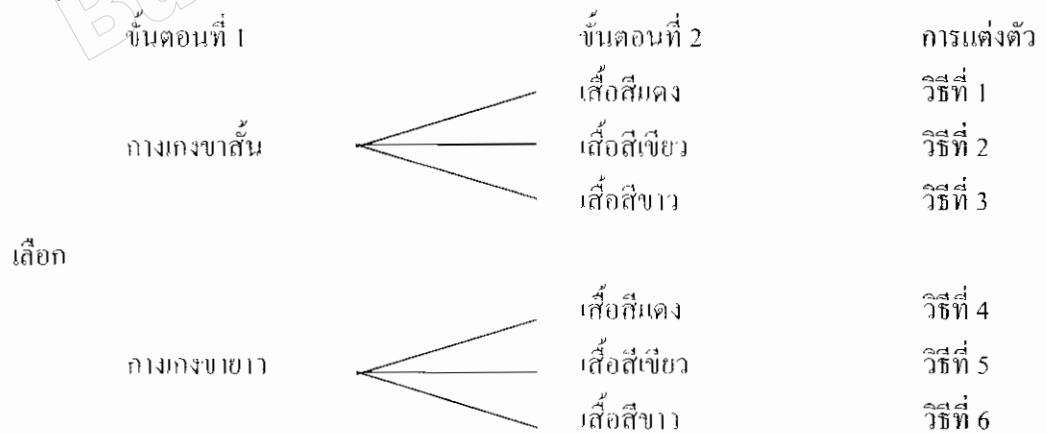
ตัวอย่างที่ 2 นักเรียนมีกางเกง 2 ตัว คือ กางเกงขาสั้น และกางเกงขยาว ส่วนเสื้อมีอยู่ 3 ตัว คือ เสื้อสีแดง สีเขียว และสีขาว นักเรียนจะมีวิธีเลือกใส่เสื้อและกางเกงเป็นชุดที่แตกต่างกันได้กี่วิธี

ขั้นตอนที่ 1 เลือกกางเกงมาใส่ก่อน ในขั้นตอนนี้ นักเรียน สามารถเลือกทำได้ 2 วิธี คือ เลือกกางเกงขาสั้น หรือ ขาวยาว

ต่อไปหลังจากเลือกกางเกงตัวใดตัวหนึ่งมาแล้ว (แต่ละวิธีของขั้นตอนที่ 1) นักเรียน ต้องทำขั้นตอนที่ 2 ต่อเนื่องกันไปอีก ดังนี้

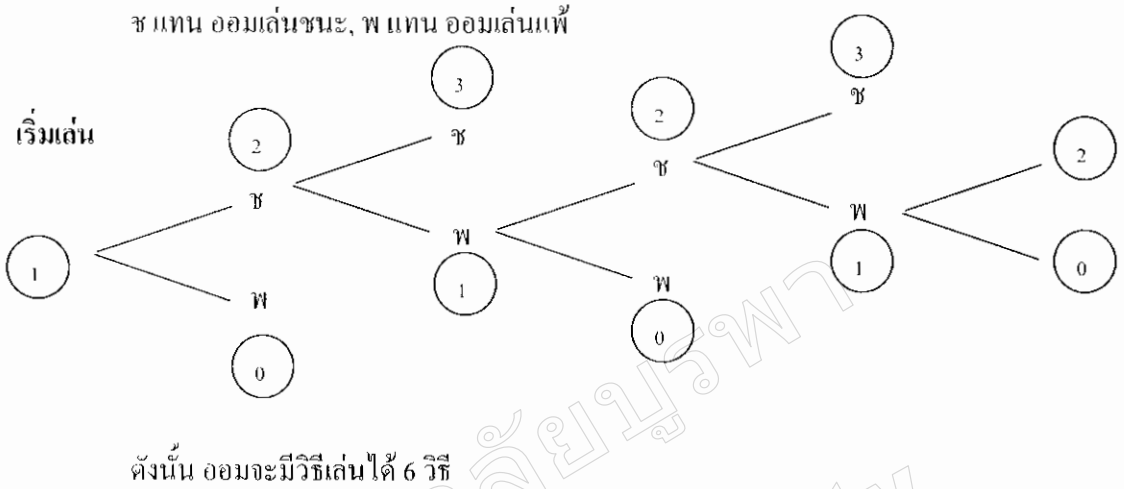
ขั้นตอนที่ 2 เลือกเสื้อมา 1 ตัว จาก 3 ตัว ซึ่งนักเรียนสามารถเลือกทำได้ 3 วิธี นั่นคือ เลือกเสื้อสีแดง หรือ สีเขียว หรือ สีขาว

เมื่อนักเรียนทำเสร็จทั้งสองขั้นตอน ก็ถือ ว่าจะเห็นว่านักเรียนทำการแต่งตัวนั้นเสร็จสิ้น สมบูรณ์ ซึ่งแต่ละ วิธี ได้ผลไม่เหมือนกันดังแผนภาพต่อไปนี้



ดังนั้นถ้านับจำนวนวิธีที่นักเรียนสามารถเลือกทำได้ มีทั้งหมด 6 วิธี

ตัวอย่างที่ 3 ในการเล่นเกมๆ หนึ่งมีคนคิดว่า เล่นไม่เกิน 5 ครั้ง ออมมีเงินเพียง 1 บาทเมื่อเริ่มเล่น และจะเลิกเล่นเมื่อมีกำไร 3 บาท หรือเงินหมด ออมจะมีวิธีเล่นได้กี่วิธี (ถ้าชนะจะได้ครั้งละ 1 บาท และถ้าแพ้ก็จะเสียครั้งละ 1 บาทเช่นกัน)



กฎการคูณ

ถ้าการทำงานอย่างหนึ่งประกอบด้วยการทำงาน k ขั้นตอน คือขั้นตอนที่ 1 ถึงขั้นตอนที่ k ตามลำดับ โดยที่

การทำงานขั้นตอนที่ 1 มีวิธีทำ n_1 วิธี

การทำงานขั้นตอนที่ 2 มีวิธีทำ n_2 วิธี

การทำงานขั้นตอนที่ 3 มีวิธีทำ n_3 วิธี

$\vdots$

การทำงานขั้นตอนที่ k มีวิธีทำ n_k วิธี

และวิธีการทำงานแต่ละวิธีแตกต่างกัน แล้ว

จำนวนวิธีที่งานนี้เท่ากับ $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k$ วิธี

ดังนั้น

$$\text{จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเลือกทำงานนี้เสร็จใน } k \text{ ขั้นตอน เท่ากับ}$$

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k \text{ วิธี}$$



ตัวอย่างที่ 1 บริษัทผลิตเสื้อผ้าสำเร็จรูปแห่งหนึ่งผลิตเสื้อ 6 แบบ กางเกง 5 แบบ และเนคไท 4 แบบ ถ้าจะจัดแต่งตัวให้กับหุ่นเพื่อนำไปโชว์หน้าร้าน จะสามารถแต่งเป็นชุดต่าง ๆ กันได้กี่ชุด

วิธีทำ ในการแต่งตัวให้กับหุ่น มี 3 ขั้นตอน คือ

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเสื้อได้ 6 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกกางเกงได้ 5 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกเนคไทได้ 4 วิธี

ดังนั้น วิธีแต่งตัวให้กับหุ่นทำได้ทั้งหมด $6 \times 5 \times 4 = 120$ วิธี

นั่นคือ จะสามารถแต่งเป็นชุดต่าง ๆ กันได้ 120 ชุด

ตัวอย่างที่ 2 มีกล่อง 5 ใบ วางเรียงกันเป็นแถว จะมีวิธีนำลูกบอล 3 ลูกใส่ลงในกล่องทีละ 1 ลูก จนครบ 3 ลูก ได้กี่วิธี

วิธีทำ ขั้นตอนแรก คือการนำลูกบอลลูกที่ 1 ใส่ลงในกล่อง ซึ่งสามารถเลือกทำได้ 5 วิธี ทั้งนี้ เพราะว่ามีกล่องให้เลือกใส่ 5 ใบ

ขั้นตอนที่ 2 คือการนำลูกบอลลูกที่ 2 ใส่ลงในกล่อง ซึ่งสามารถเลือกทำได้ 5 วิธี ทั้งนี้ เพราะว่ามีกล่องให้เลือกใส่ 5 ใบ

ขั้นตอนที่ 3 คือการนำลูกบอลลูกที่ 3 ใส่ลงในกล่อง ซึ่งสามารถเลือกทำได้ 5 วิธี ทั้งนี้ เพราะว่ามีกล่องให้เลือกใส่ 5 ใบ

ดังนั้น จะมีวิธีเลือกลูกบอลใส่กล่องได้เท่ากับ $5 \times 5 \times 5 = 125$ วิธี

ตัวอย่างที่ 3 จงนับตัวอักษรจากคำว่า SPECIAL มาจัดเป็นคำใหม่ โดยไม่คำนึงถึงความหมาย จะจัดเป็นคำที่แตกต่างกันกี่วิธี

วิธีทำ จากคำว่า SPECIAL จะพบว่ามีตัวอักษรอยู่ 7 ตัวที่ไม่เหมือนกัน เพื่อสะดวกในการคิด เราจะใช้กรอบสี่เหลี่ยมแทนตำแหน่งของตัวอักษรแต่ละตัว

ตำแหน่งที่	1	2	3	4	5	6	7

ขั้นตอนที่ 1 เขียนตัวอักษรลงในตำแหน่งที่ 1 ซึ่งเลือกทำได้ 7 วิธี

เพราะ ไม่มีตัวอักษร 7 ตัวให้เลือก

ขั้นตอนที่ 2 เขียนตัวอักษรลงในตำแหน่งที่ 2 ซึ่งเลือกทำได้ 6 วิธี

เพราะว่าจากขั้นตอนที่ 1 ใช้อักษรไป 1 ตัว เหลือตัวอักษร 6 ตัวให้เลือก

ขั้นตอนที่ 3 เขียนตัวอักษรลงในตำแหน่งที่ 3 ซึ่งเลือกทำได้ 5 วิธี

เพราะว่าจากขั้นตอนที่ 2 ใช้อักษรไปอีก 1 ตัว เหลือตัวอักษร 5 ตัวให้เลือก

ขั้นตอนที่ 4 เขียนตัวอักษรลงในตำแหน่งที่ 4 ซึ่งเลือกทำได้ 4 วิธี

เพราะว่าจากขั้นตอนที่ 3 ใช้อักษรไปอีก 1 ตัว เหลือตัวอักษร 4 ตัวให้เลือก
ขั้นตอนที่ 5 เขียนตัวอักษรลงในตำแหน่งที่ 5 ซึ่งเลือกทำได้ 3 วิธี

เพราะว่าจากขั้นตอนที่ 4 ใช้อักษรไปอีก 1 ตัว เหลือตัวอักษร 3 ตัวให้เลือก
ขั้นตอนที่ 6 เขียนตัวอักษรลงในตำแหน่งที่ 6 ซึ่งเลือกทำได้ 2 วิธี

เพราะว่าจากขั้นตอนที่ 5 ใช้อักษรไปอีก 1 ตัว เหลือตัวอักษร 2 ตัวให้เลือก
ขั้นตอนที่ 7 เขียนตัวอักษรลงในตำแหน่งที่ 7 ซึ่งเลือกทำได้ 1 วิธี

เพราะว่าจากขั้นตอนที่ 6 ใช้อักษรไปอีก 1 ตัว เหลือตัวอักษร 1 ตัวให้เลือก

จะได้ค่าที่แตกต่างกันเท่ากับ $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5,040$ ค่า

ตัวอย่างที่ 4 สร้างจำนวน 3 หลัก จากตัวเลข 0, 1, 2, 3, 4, 5 จะสร้างได้กี่จำนวน

วิธีทำ การหาค่ามี 3 ขั้นตอนคือ จำนวนวิธีในการเลือกตัวเลขในหลักร้อย หลักสิบ และหลักหน่วย

ในแต่ละวิธี เลือกตัวเลขใส่ในหลักร้อยได้ 5 วิธี (ใช้ตัวเลข 1, 2, 3, 4, 5 ตัวเลข 0 ใช้ไม่ได้)

ในแต่ละวิธี เลือกตัวเลขใส่ในหลักสิบได้ 6 วิธี (ใช้ตัวเลข 0, 1, 2, 3, 4, 5)

เลือกตัวเลขใส่ในหลักหน่วยได้ 6 วิธี (ใช้ตัวเลข 0, 1, 2, 3, 4, 5)

ดังนั้น จะสร้างได้ $= 5 \times 6 \times 6 = 180$ จำนวน

ตัวอย่างที่ 5 ต้องการสร้างจำนวนที่มี 4 หลัก โดยที่แต่ละหลักเลือกมาจากตัวเลข 1, 2, 3, 4, 5 และ 6
เมื่อต้องการให้

(1) จำนวนที่สร้างขึ้นเป็นจำนวนคู่

(2) จำนวนที่สร้างขึ้นเป็นจำนวนคี่และแต่ละหลักใช้ตัวเลขไม่ซ้ำกัน

วิธีทำ (1) มีตัวเลขที่ใช้ 6 ตัว คือ 1, 2, 3, 4, 5 และ 6

หลักหน่วย มีวิธีเลือกตัวเลขได้ 3 วิธี (คือ 2, 4 หรือ 6)

หลักสิบ มีวิธีเลือกตัวเลขได้ 6 วิธี

หลักร้อย มีวิธีเลือกตัวเลขได้ 6 วิธี

หลักพัน มีวิธีเลือกตัวเลขได้ 6 วิธี

ดังนั้น จำนวนที่มีสี่หลักที่เป็นจำนวนคู่มีได้ $= 6 \times 6 \times 6 \times 3 = 648$ จำนวน

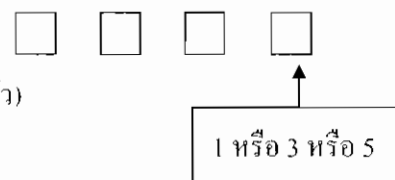
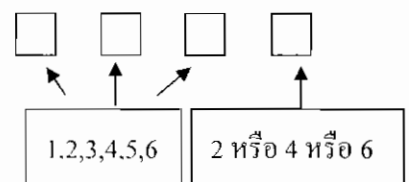
(2) มีตัวเลขที่ใช้ 6 ตัว คือ 1, 2, 3, 4, 5 และ 6

หลักหน่วย มีวิธีเลือกตัวเลขได้ 3 วิธี (คือ 1, 3 หรือ 5)

หลักสิบ มีวิธีเลือกตัวเลขได้ 5 วิธี (หลักหน่วยใช้ไปแล้ว 1 ตัว)

หลักร้อย มีวิธีเลือกตัวเลขได้ 4 วิธี (ใช้ไปแล้ว 2 ตัว)

หลักพัน มีวิธีเลือกตัวเลขได้ 3 วิธี (ใช้ไปแล้ว 3 ตัว)



ดังนั้น จำนวนที่มีสี่หลักที่เป็นจำนวนเต็มและแต่ละหลักใช้ตัวเลขไม่ซ้ำกัน $= 3 \times 5 \times 4 \times 3 = 180$ จำนวน

กฎการบวก

ถ้าการทำงานหนึ่งมีวิธีการทำ k วิธี คือ วิธีที่ 1 ถึงวิธีที่ k โดยที่ (แต่ละวิธีงานเสร็จโดยไม่ต่อเนื่องกับวิธีอื่น)

การทำงานวิธีที่ 1 มีวิธีทำ n_1 วิธี

การทำงานวิธีที่ 2 มีวิธีทำ n_2 วิธี

การทำงานวิธีที่ 3 มีวิธีทำ n_3 วิธี

⋮

การทำงานวิธีที่ k มีวิธีทำ n_k วิธี

และวิธีการทำงานแต่ละวิธีแตกต่างกัน แล้ว

จำนวนวิธีทำงานนี้เท่ากับ $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$ วิธี

ดังนั้น

จำนวนวิธีทำงานทั้งหมด เท่ากับ

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 1 นักศึกษาสามารถที่จะเลือกทำโปรเจกต์คอมพิวเตอร์ได้จาก 3 หัวข้อหลัก และแต่ละหัวข้อประกอบด้วยหัวข้อย่อย 23, 15 และ 19 หัวข้อตามลำดับ ดังนั้นจะมีโปรเจกต์ทั้งหมดที่นักศึกษสามารถเลือกทำได้กี่หัวข้อ

วิธีทำ นักศึกษา สามารถเลือกทำโปรเจกต์จากหัวข้อแรกได้ 23 หัวข้อ

จากหัวข้อที่สองได้ 15 หัวข้อ

จากหัวข้อที่สามได้ 19 หัวข้อ

ดังนั้น นักศึกษา มีหัวข้อโปรเจกต์ให้เลือกได้ทั้งหมด $23 + 15 + 19 = 57$ หัวข้อ

ตัวอย่างที่ 2 หนังสือกองหนึ่งมีหนังสือคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกัน 5 เล่ม หนังสือเคมีที่แตกต่างกัน 4 เล่ม และหนังสือวิทยาศาสตร์ที่แตกต่างกัน 3 เล่ม จงหาจำนวนวิธีที่หยิบหนังสือ 1 เล่ม จากหนังสือกองนี้

วิธีทำ การหยิบหนังสือ 1 เล่ม จากกองหนังสือนี้มีวิธีการ 3 วิธี คือ หยิบหนังสือคณิตศาสตร์ หรือ หยิบหนังสือเคมี หรือหยิบหนังสือวิทยาศาสตร์

โดยที่วิธีในการหยิบหนังสือคณิตศาสตร์มี 5 วิธี

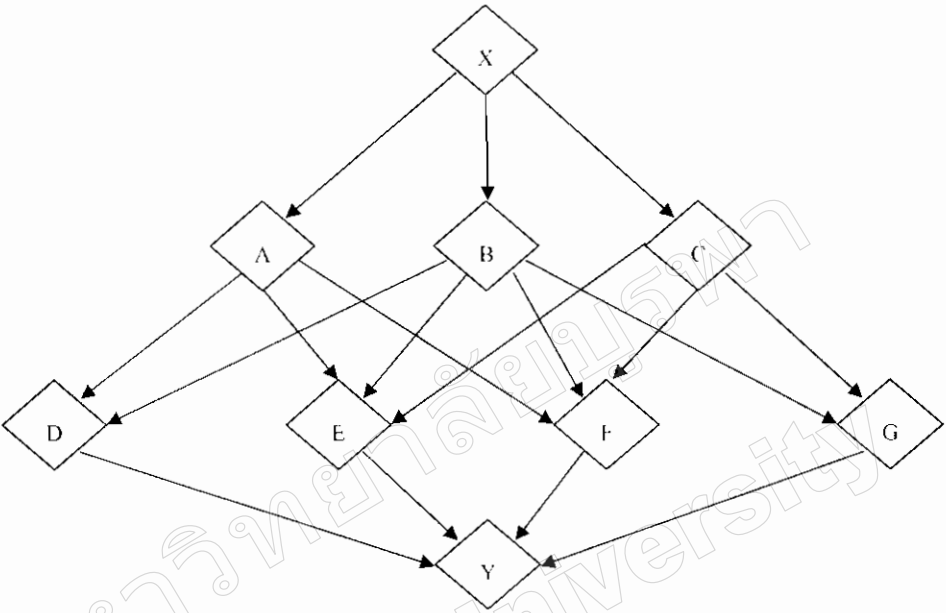


วิธีในการหยิบหนังสือเคมีมี 4 วิธี

วิธีในการหยิบหนังสือภาษาไทยมี 3 วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีการในการหยิบหนังสือ 1 เล่มจากหนังสือกองนี้ $5 + 4 + 3 = 12$ วิธี

ตัวอย่างที่ 3 จงหาจำนวนเส้นทางจาก X ไปยัง Y ในทิสถานลูกศรของแผนภาพต่อไปนี้



วิธีทำ เส้นทางจาก X ไปยัง Y โดยผ่าน A มีเส้นทางได้ 3 เส้นทาง

เส้นทางจาก X ไปยัง Y โดยผ่าน B มีเส้นทางได้ 4 เส้นทาง

เส้นทางจาก X ไปยัง Y โดยผ่าน C มีเส้นทางได้ 3 เส้นทาง

ดังนั้น จำนวนเส้นทางจาก X ไปยัง Y ในทิสถานลูกศรทั้งหมดเท่ากับ $3 + 4 + 3 = 10$ วิธี

แฟกทอเรียล (Factorial)

ในการคำนวณหาจำนวนวิธีที่จะเกิดขึ้นจากการทดลองหรือการทำงานอย่างใดอย่างหนึ่ง บางครั้งจำนวนที่หาได้นั้นเกิดจากผลคูณของจำนวนหลายๆ จำนวน

เช่น $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ เป็นต้น

ดังนั้นเพื่อความสะดวกในการเขียนจำนวนเหล่านี้ นักคณิตศาสตร์จึงได้กำหนดสัญลักษณ์แทนจำนวนดังกล่าว ดังนี้

$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ เขียนแทนด้วย $8!$

$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ เขียนแทนด้วย $7!$

$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ เขียนแทนด้วย $6!$

นั่นคือ ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก กำหนดสัญลักษณ์ $n!$ มีความหมายดังนี้

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 2 \times 1$$



หมายเหตุ 1. $n!$ อ่านว่า n แฟกทอเรียล

2. $n!$ ก็คือ ผลคูณของจำนวนเต็มบวก n กับจำนวนที่ลดลง จาก n ทีละ 1 จนกระทั่งถึง 1

3. $0! = 1$ ***

ตัวอย่างที่ 1 (1) $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$$(2) 9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

(3) $(-3)! =$ ไม่มีความหมาย ***

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของจำนวนต่อไปนี้

$$(1) \frac{5!}{4!}$$

$$(2) \frac{8!}{6!}$$

$$(3) \frac{7!}{9!}$$

$$(4) \frac{10!}{8!}$$

วิธีทำ (1) $\frac{5!}{4!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5$

หรือ $\frac{5!}{4!} = \frac{5 \times 4!}{4!} = 5$

$$(2) \frac{8!}{6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 8 \times 7 = 56$$

$$(3) \frac{7!}{9!} = \frac{7!}{9 \times 8 \times 7!} = \frac{1}{72}$$

$$(4) \frac{10!}{8!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!} = 10 \times 9 = 90$$

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนจำนวนที่กำหนดให้ต่อไปนี้ในรูปของแฟกทอเรียล

$$(1) 210$$

$$(2) 360$$

วิธีทำ (1) $210 = 7 \times 6 \times 5$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{7!}{4!}$$

$$(2) 360 = 6 \times 5 \times 4 \times 3$$

$$= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{6!}{2!}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงเขียน $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ ในรูปแฟกทอเรียล

วิธีทำ $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = (n+4)(n+3)(n+2)(n+1)$

$$= \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}{n \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n!}{n!}$$

$$= \frac{(n+4)!}{n!}$$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 1640$ จงหาค่า n

วิธีทำ จาก $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!}$

$$= (n+1)n$$

ดังนั้น $(n+1)n = 1640$

จากขั้นตอนนี้ นักเรียนอย่าใช้วิธีการแก้สมการหาค่า n ควรใช้การแยกจำนวน 1640 ให้อยู่ในรูปผลคูณของจำนวนที่มีค่าน้อยกว่ากันอยู่ 1 จะดีกว่า

นั่นคือ $(n+1)n = 1640$

$$= 41 \times 40$$

ดังนั้น $n+1 = 41$

$$n = 40$$

4. สื่อการเรียนรู้

4.1 ใบความรู้ 1-4

4.2 ใบกิจกรรมฝึกทักษะ/ใบเล่ายิจกรรมฝึกทักษะ

4.3 แบบทดสอบย่อยเรื่องกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับและแฟกทอเรียล

5. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

1. ครูเล่านิทานเกี่ยวกับการร่วมมือกันในการทำงานให้ประสบผลสำเร็จ คือนิทานเรื่อง เทวดาน้อยกับมดตัวจ้อย ให้นักเรียนทุกคนฟัง เนื้อเรื่องของนิทานเป็นดังนี้

กาลครั้งหนึ่ง มีเทวดาน้อยคนหนึ่งที่มีนิสัยดีมาก และไม่มีน้ำใจให้ใคร เทวดาน้อยสนุกสนานไปในแต่ละวัน ไม่ช่วยเหลือใคร ต่างจากเพื่อนๆ ที่เป็นเทวดาเด็กด้วยกัน ซึ่งแต่ละคนนั้นต่างช่วยเหลือผู้ใหญ่ทำงานกันอย่างขยันขันแข็ง และไม่ว่าเพื่อนเทวดาเด็กจะขอร้องอย่างไร เทวดาน้อยก็เอาแต่หลบเลี่ยงเสมอ ในวันหนึ่งเทวดาน้อยเบื่อหน่ายที่ไม่มีเพื่อนคนไหนมาเล่นด้วยกัน ตน เทวดาน้อยจึงหนีลงมายังโลกมนุษย์ พอมาถึงบนพื้นโลก เทวดาน้อยก็นอนเล่นบนพื้นหญ้า สายลมพัดเย็นสบายจนเทวดาน้อยตาเริ่มปรือด้วยความง่วง ขณะนั้นเองเทวดาน้อยก็ได้ยินเสียงเล็ก ๆ เสียงหนึ่งดังขึ้นว่า “รีบ ๆ หน่อยพวกเรากำลังจะตกแล้ว ช่วยกันสร้างเขื่อนกันน้ำเร็วเข้า” ต่อจากนั้นก็ยินเสียงหนึ่งตะโกนบอก “แน่แล้ว! คืนครั้งนี้พายุลงมา ตัวไหนว่างมาช่วยกันปิดรูนี้หน่อย” เทวดาน้อยเมื่อได้ฟังก็บังเกิดความสนใจ จึงพลิกตัวมานอนเฝ้าคางดูเหล่านมดที่กำลังรีบเร่งทำงานกันอยู่ “เจ้ามดตัวจ้อย พวกเจ้ากำลังทำอะไรกันอยู่” เทวดาน้อยก็ลงถาม มดน้อยตัวหนึ่งเงยหน้าบอก “พวกผมกำลังสร้างเขื่อน เพื่อป้องกันไม่ให้น้ำไหลเข้ารังของพวกเรา อยู่ครับ” เทวดาน้อยเหิงงหน้าขึ้น ไปมองบนท้องฟ้า ที่กำลังเปลี่ยนสีเพราะฝนกำลังจะตก และเห็นมดตัวจ้อยรีบยกหินมาอุดรูรั่ว แต่หินก้อนนั้นใหญ่กว่าเจ้ามดมาก เทวดาน้อยจึงถามว่าจะให้ช่วยหรือไม่ แต่มดตัวจ้อยกลับบอกว่าถ้ามดตัวเดียวไม่สามารรถยกไหว แต่ถ้ามีเพื่อน ๆ มดที่มีน้ำใจมาช่วยกันหลาย ๆ ตัวรับรองต้องเสร็จทันฝนตกแน่นอน ว่าแล้วพวกมดหลายสิบตัว ต่างรีบตรงเข้ามาช่วยยกก้อนหินอย่างพร้อมเพรียงกัน ก้อนหินใหญ่ที่ตอนแรกเจ้ามดตัวเดียวพยายามอย่างไรก็ยกไม่ขึ้นนั้น บัดนี้ก็ถูกพลังสามัคคีของพวกมดยกขึ้นมาอุดรูรั่วได้ งานจึงเสร็จทันเวลาพอดี เทวดาน้อยที่ลื้มเอาใจช่วยผลตอบมือให้ร้องด้วยความดีใจ น่าแปลกที่เจ้ามดตัวเล็ก ๆ ที่ดูไม่มีกำลังอะไร กลับช่วยกันยกหินก้อนใหญ่ขึ้นมาได้ และยังสามารรถสร้างเขื่อนเสร็จทันก่อนที่น้ำจะไหลมาถึงรังอีกด้วย เทวดาน้อยเริ่มเข้าใจและเห็นคุณค่าของการช่วยเหลือกัน ถ้าทุกคนร่วมแรงร่วมใจ และมีน้ำใจให้แก่กัน งานก็จะสำเร็จ แล้วก็ไม่เหนื่อยเมื่อยล้าเลย เมื่อเทวดาน้อยเข้าใจได้อย่างนี้แล้ว นับแต่นั้นเป็นต้นมาไม่ว่าเพื่อน ๆ มีงานอะไร เทวดาน้อยก็จะรีบเข้าไปช่วยอย่างไม่มีเกี่ยงจนจนเทวดาทุกคนต่างรักและเอ็นดูเทวดาน้อยเป็นอย่างมาก

2. ครูและนักเรียนช่วยกันอภิปรายและสรุปข้อคิดจากนิทาน โดยครูใช้คำถามถามนักเรียนว่าเพราะอะไรรังของพวกมดจึงไม่ได้รับความเสียหายจากการที่น้ำไหลเข้ารัง (เพราะมด

ทุกคนมีความรักใคร่สามัคคีกัน ช่วยเหลือซึ่งกันและกัน มีความรับผิดชอบต่อนหน้าที่ และไม่ขี้เกียจทำงานจึงทำให้เหล่าพวกมดทำงานได้สำเร็จและรอดพ้นจากภัยที่มาถึงได้)

3. ครูแบ่งกลุ่มนักเรียนออกเป็น 6 กลุ่ม กลุ่มละ 4 คน ซึ่งแต่ละกลุ่มประกอบด้วยนักเรียนที่เรียนเก่ง 1 คน ปานกลาง 2 คน และเรียนอ่อน 1 คน เรียกว่ากลุ่มประจำ (Home Group) จากนั้นให้นักเรียนตั้งชื่อกลุ่มและเขียนรายชื่อสมาชิกกลุ่มลงในกระดาษที่เตรียมไว้ และให้แต่ละกลุ่มเลือกหัวหน้ากลุ่ม และเลขานุการกลุ่ม

4. ครูอธิบายขั้นตอนการเรียนรู้แบบร่วมมือรูปแบบจิ๊กซอว์ (JIGSAW) หน้าที่ซึ่งนักเรียนต้องปฏิบัติ พร้อมแจกเอกสารประกอบให้นักเรียนศึกษาประกอบการอธิบาย

ขั้นตอน

1. นักเรียนสมาชิกกลุ่มประจำแต่ละกลุ่มแบ่งกันรับผิดชอบเนื้อหาเรื่อง กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับและแฟกทอเรียล โดยพิจารณาเลือกตามความสามารถ แบ่งเป็นหัวข้อดังนี้

- นักเรียนคนที่ 1 ศึกษาใบความรู้ที่ 1 และทำใบงานที่ 1 เรื่อง แผนภาพต้นไม้ (Tree diagram)
- นักเรียนคนที่ 2 ศึกษาใบความรู้ที่ 2 และทำใบงานที่ 2 เรื่อง กฎการคูณ
- นักเรียนคนที่ 3 ศึกษาใบความรู้ที่ 3 และทำใบงานที่ 3 เรื่อง กฎการบวก
- นักเรียนคนที่ 4 ศึกษาใบความรู้ที่ 4 และทำใบงานที่ 4 เรื่อง แฟกทอเรียล

2. ถ้านักกลุ่มแจกเอกสารประกอบเนื้อหาใดก็ได้แบ่งหัวข้อกันรับผิดชอบและอธิบายขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมให้สมาชิกในกลุ่มฟัง

3. นักเรียนที่รับผิดชอบหัวข้อเดียวกันไปรวมกลุ่มกัน เรียกว่า กลุ่มผู้เชี่ยวชาญ (Expert Group) นักเรียนในกลุ่มเชี่ยวชาญร่วมกันศึกษาจากใบความรู้และทำใบงานที่ได้รับมอบหมาย เมื่อเสร็จแล้วให้นักเรียนส่งใบงานแล้วจึงตรวจคำตอบจากเฉลยใบงานที่ให้ นักเรียนร่วมกันสนทนาซักถามกันให้เข้าใจ โดยครูเดินดูระหว่างการทำกิจกรรมของนักเรียน และอธิบายเพิ่มเติม หากนักเรียนมีข้อสงสัย จากนั้นนักเรียนจากกลุ่มผู้เชี่ยวชาญกลับเข้าสู่กลุ่มประจำของตน สมาชิกภายในกลุ่มผลัดกันอธิบาย ถ่ายทอดความรู้ให้สมาชิกภายในกลุ่มเข้าใจให้ครบทั้ง 4 หัวข้อ

ขั้นสรุป

1. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปความรู้เรื่องกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับและแฟกทอเรียล โดยใช้การตั้งคำถามและสุ่มให้นักเรียนตอบ แล้วครูและนักเรียนร่วมกันตรวจสอบความถูกต้องและเฉลยคำตอบ

2. นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยเรื่องกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับและแฟกทอเรียลเป็นรายบุคคล จากนั้นเลขานุการกลุ่มเก็บรวบรวมส่งครู

3. ครูตรวจให้คะแนนโดยให้นักเรียนแต่ละกลุ่มแลกเปลี่ยนตรวจ

4. นำคะแนนของทุกคนในกลุ่มมารวมกัน และจัดเรียงลำดับคะแนนเฉลี่ยรวมของแต่ละกลุ่ม ประเมินผลสอบ กลุ่มที่ได้คะแนนสูงสุดจะได้รับรางวัล

6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

6.1 สังเกตจากคำตอบคำถาม

6.2 สังเกตจากการทำงานและการร่วมกิจกรรม

6.3 จากผลการตรวจใบงาน

6.4 จากผลการทำแบบทดสอบรายบุคคล

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

แบบบันทึกข้อมูลของกลุ่ม

ชื่อกลุ่ม..... ชั้นมัธยมศึกษาปีที่

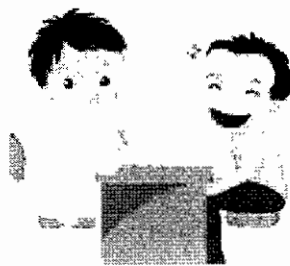
ประธานกลุ่มชื่อ..... เลขที่.....
สมาชิกคนที่ 1..... เลขที่.....
สมาชิกคนที่ 2..... เลขที่.....
เลขานุกรกลุ่มชื่อ..... เลขที่.....

มหาวิทยาลัยบูรพา
Burapha University



😊 ขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้รูปแบบจิ๊กซอว์ (JIGSAW) 😊

1. หัวหน้ากลุ่มนำเอกสารประกอบการเรียนจากครูผู้สอน
2. สมาชิกกลุ่มประจำแบ่งกันรับผิดชอบเนื้อหาเรื่อง กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับและแฟกทอเรียล โดยพิจารณาเลือกตามความสามารถ
3. หัวหน้ากลุ่มแจกเอกสารประกอบเนื้อหาตามที่ได้แบ่งหัวข้อกันรับผิดชอบ
4. สมาชิกแต่ละคนในกลุ่มนักเรียนที่รับผิดชอบหัวข้อเดียวกัน ซึ่งเรียกว่า “กลุ่มผู้เชี่ยวชาญ” ไปรวมกลุ่มกันศึกษาเนื้อหาจากใบความรู้ และร่วมกันทำใบงานที่ได้รับมอบหมาย และให้แต่ละกลุ่มรวบรวมนำใบงานส่งครูเมื่อทำเสร็จ
5. ตัวแทนนักเรียนในกลุ่มผู้เชี่ยวชาญรับใบเฉลยใบงานจากครู
6. นักเรียนตรวจสอบคำตอบจากเฉลยใบงานและอภิปรายร่วมกันให้เข้าใจ
7. เมื่อนักเรียนศึกษาเป็นที่เข้าใจแล้ว ให้กลับกลุ่มประจำของตนเพื่อถ่ายทอดความรู้ให้เพื่อนสมาชิกในกลุ่มของตนฟัง
8. เมื่อนักเรียนศึกษาเนื้อหาเข้าใจแล้วจะดำเนินการสอบเป็นรายบุคคล กลุ่มใดที่มีคะแนนรวมสูงสุดจะได้รับรางวัล



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัส ก32202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 3 ชั่วโมง

เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งในแนวเส้นตรง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง: แก้ปัญหาโดยใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ได้

1. สาระสำคัญ

- การจัดของ r สิ่งซึ่งเลือกมาจากของ n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยถือลำดับเป็นสำคัญ เรียกว่า การจัดลำดับ หรือ วิธีเรียงสับเปลี่ยน (permutation)

- จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง เท่ากับ $n!$ วิธี

- ถ้าของ n สิ่ง ที่แตกต่างกัน ถ้าเรานำมาจัดเป็นแถวแบบวิธีเรียงสับเปลี่ยน r สิ่ง

$$\text{จำนวนวิธีที่จัดได้เท่ากับ } P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ วิธี}$$

- ถ้าเรามีสิ่งของ n สิ่ง ในของ n สิ่งนี้ มี n_1 สิ่งเหมือนกัน เป็นกลุ่มที่ 1, n_2 สิ่งเหมือนกัน เป็นกลุ่มที่ 2, n_3 สิ่งเหมือนกัน เป็นกลุ่มที่ 3 และ n_r สิ่งเหมือนกัน เป็นกลุ่มที่ r

$$\text{โดยที่ } n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r = n$$

นำของทั้ง n สิ่งนี้มาจัดเรียงเป็นแถวทั้งหมด จะทำได้เท่ากับ

$$\frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_r!} \text{ วิธี}$$

- มีของ 2 ประเภท ประเภทละ m สิ่ง ซึ่งต่างกัน เรียงสับเปลี่ยนของทั้งหมด $2m$ สิ่ง สลับประเภททีละ r สิ่ง (r หาร m ลงตัว) เป็นแนวตรง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดเท่ากับ $2! \times m! \times m!$ วิธี

- มีของ 3 ประเภท ประเภทละ m สิ่ง ซึ่งต่างกัน เรียงสับเปลี่ยนของทั้งหมด $3m$ สิ่ง สลับประเภททีละ r สิ่ง (r หาร m ลงตัว) เป็นแนวตรง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดเท่ากับ $3! \times m! \times m! \times m!$ วิธี

- มีของ k ประเภท ประเภทละ m สิ่ง ซึ่งต่างกัน เรียงสับเปลี่ยนของทั้งหมด km สิ่ง สลับประเภททีละ r สิ่ง (r หาร m ลงตัว) เป็นแนวตรง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดเท่ากับ $k! \times (m!)^k$ วิธี

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

2.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

- หาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดนำมาจัดเรียงอันดับคราวละ n สิ่งได้
- หาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยนำมาจัดเรียงคราวละ r สิ่ง ($r < n$) ได้
- หาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่มีบางสิ่งเหมือนกันในแนวเส้นตรงได้
- หาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของหลายประเภทสลับกันได้

2.2 ด้านทักษะ/กระบวนการ

- การแก้ปัญหา
- การให้เหตุผล
- การสื่อสารและสื่อความหมาย
- การเชื่อมโยงความรู้วิชาคณิตศาสตร์

2.3 ด้านคุณลักษณะ

- นักเรียนมีวินัยและมีความรับผิดชอบในการเรียน
- นักเรียนมีความเสียสละเพื่อส่วนรวม
- นักเรียนให้ความร่วมมือและช่วยเหลือกัน

3. สาระการเรียนรู้

วิธีเรียงสับเปลี่ยน เป็นวิธีนำสิ่งต่าง ๆ มาจัดเรียงโดยยึดถืออันดับเป็นสำคัญ เช่น ถ้านักเรียนมี ดินสอ ปากกา และ ยางลบ อย่างละ 1 ชิ้น นักเรียนนำมาจัดวางเรียงได้ 6 วิธี ดังนี้



นักเรียนจะสังเกตพบว่า ถ้าอันดับไม่เหมือนกันเราถือว่าเป็น วิธีที่แตกต่างกัน และเราเรียกวิธีการจัดสิ่งต่าง ๆ ในลักษณะเช่นนี้ว่า วิธีเรียงสับเปลี่ยน (การจัดลำดับ)

การจัดของ r สิ่งซึ่งเลือกมาจากรวมของ n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยถือลำดับเป็นสำคัญ เรียกว่า การจัดลำดับ หรือ วิธีเรียงสับเปลี่ยน (permutation)

ดังนั้นขออย่าให้เข้าใจอีกครั้งหนึ่งว่า ในการหาจำนวนวิธีที่เกิดจากการนำสิ่งต่าง ๆ มาใช้ วิธีเรียงสับเปลี่ยนนั้นต้องคำนึงถึงอันดับด้วย ถ้าอันดับไม่เหมือนกันเราถือว่าเป็นคนละวิธีกัน เนื่องจากการนำสิ่งต่าง ๆ มาจัดเรียงนั้นมีมากมายหลายแบบ เช่น นำมาเรียงเป็นแถวตรง นำมาเรียงเป็นวงกลม สิ่งที่น่าสนใจมีบางสิ่งซ้ำกัน เป็นต้น จึงขอแยกเป็นหัวข้อ ให้นักเรียนศึกษาดังนี้

- วิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดนำมาจัดเรียงอันดับคราวละ n สิ่ง

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง เท่ากับ $n!$ วิธี

ตัวอย่างที่ 1 จะจัดให้คน 4 คน คือ A, B, C และ D นั่งเรียงเป็นแถวตรง จะมีวิธีจัดได้กี่วิธี

จะได้เท่ากับ $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ วิธี

ตัวอย่างที่ 2 มีต้นไม้ 5 ชนิด ๆ ละ 1 ต้น เรียงกันเป็นแถวตรงจะมีวิธีจัดได้กี่วิธี

จะได้เท่ากับ $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ วิธี

ตัวอย่างที่ 3 จงหาจำนวนวิธีที่แตกต่างกันที่จะจัดตัวอักษรจากคำว่า COMPUTER

จะได้เท่ากับ $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40,320$ วิธี

ตัวอย่างที่ 4 ครูคนหนึ่งนำลูกศิษย์ 6 คน มายืนถ่ายรูป โดยยืนเป็น 2 แถว ๆ ละ 3 คน จะมีวิธีจัดให้ยืนทั้งหมดกี่วิธี

การยืนแยกเป็น 2 แถว ๆ ละ 3 คน ไม่สำคัญ สิ่งสำคัญก็คือ ต้องถือว่า นี่เป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนในแนวเส้นตรงของสิ่งของ 6 สิ่ง 6 ตำแหน่ง ดังนั้น

จำนวนวิธีจัดให้ยืนทั้งหมด $= 6! = 720$ วิธี

ตัวอย่างที่ 5 สามภรรยาคนหนึ่ง พร้อมด้วยลูก 4 คน มายืนเรียงแถวเพื่อถ่ายรูป จะมีวิธีจัดให้ยืนทั้งหมดกี่วิธี

(1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

(2) พ่อและแม่ยืนติดกัน

(3) พ่อและแม่ยืนริมทั้งสองด้าน

วิธีทำ

(1) จำนวนวิธีจัดแบบไม่มีเงื่อนไข $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ วิธี

(2) ถ้าต้องการให้พ่อและแม่ยืนติดกัน จะถือว่าพ่อและแม่เป็นบุคคลเดียวกัน ดังนั้น คน 6 คน จะคิดเป็น 5 คน



คน 5 คน มีวิธีจัดให้ยืนได้ $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ วิธี

ในแต่ละวิธี พ่อและแม่มีวิธีจัดให้ยืนได้ $2! = 2 \times 1 = 2$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมด $120 \times 2 = 240$ วิธี

(3)



พ่อและแม่มีวิธีจัดให้ยืนริมทั้งสองด้านได้ $2! = 2$ วิธี

ในแต่ละวิธี ลูก 4 คน มีวิธีจัดได้ $4! = 24$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดทั้งหมด $2 \times 24 = 48$ วิธี

- จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของหลายประเภทสลับกัน

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง เท่ากับ $n!$ วิธี

ตัวอย่างที่ 1 ชาย 4 คน หญิง 4 คน นั่งสลับชายและหญิง เป็นแถวได้กี่วิธี ถ้า

(1) สลับชาย 1 คน หญิง 1 คน

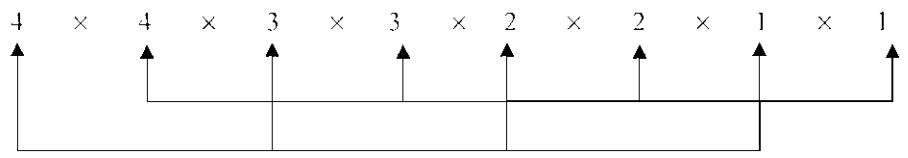
(2) สลับชาย 2 คน หญิง 2 คน

วิธีทำ

(1) สลับชาย 1 คน หญิง 1 คน

เพราะว่าจำนวนผู้ชายเท่ากับผู้หญิง ดังนั้น การจัดที่นั่งสามารถจัดได้ 2 กรณี คือ

ผู้ชายนำ:



กรณีนี้จะได้ $4! \times 4! = 24 \times 24 = 576$ วิธี



กรณีนี้จะได้ $= 4! \times 4! = 24 \times 24 = 576$ วิธี

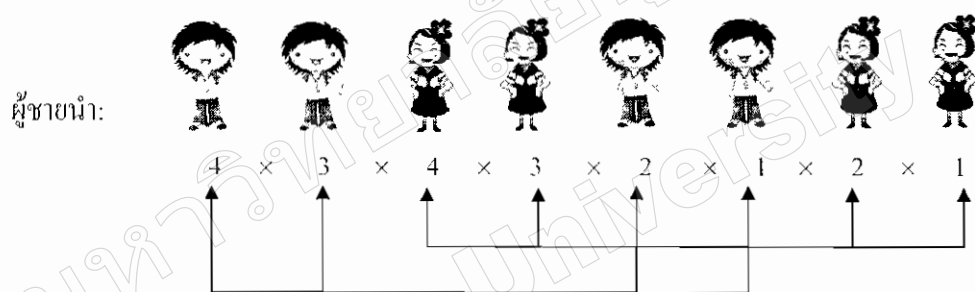
รวมทั้ง 2 กรณีนี้จะได้ $576 + 576 = 1,152$ วิธี

หรือ ในแต่ละกรณีผู้ชายสลับที่กันเองได้ $4!$ วิธี และในแต่ละวิธี ผู้หญิงก็สลับที่กันเองได้ $4!$ วิธี และสลับของสองประเภทคือชายกับหญิง

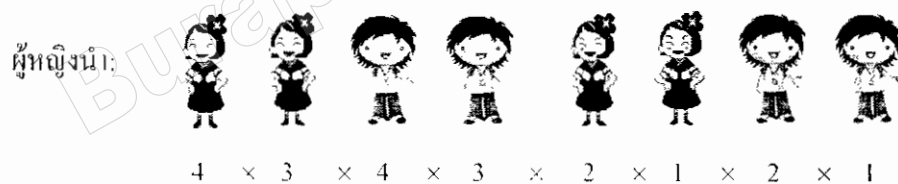
ดังนั้นจะได้ $= 2! \times 4! \times 4! = 2 \times 24 \times 24 = 1,152$ วิธี

(2) สลับชาย 2 คน หญิง 2 คน

เราสามารถจัดที่นั่งได้ 2 กรณี เช่นกัน คือ



กรณีนี้จะได้ $= 4! \times 4! = 24 \times 24 = 576$ วิธี



กรณีนี้จะได้ $= 4! \times 4! = 24 \times 24 = 576$ วิธี

รวมทั้ง 2 กรณีนี้จะได้ $576 + 576 = 1,152$ วิธี

หรือ ในแต่ละกรณีผู้ชายสลับที่กันเองได้ $4!$ วิธี และในแต่ละวิธี ผู้หญิงก็สลับที่กันเองได้ $4!$ วิธี และสลับของสองประเภทคือชายกับหญิง

ดังนั้นจะได้ $= 2! \times 4! \times 4! = 2 \times 24 \times 24 = 1,152$ วิธี

ข้อสังเกต

1. การนั่งสลับชาย หญิง จะเป็นสลับหนึ่งต่อหนึ่งหรือสองต่อสอง จำนวนวิธีจะเท่ากัน
ในกรณีชาย 4 คน หญิง 4 คน จำนวนวิธีนั่งสลับจะเท่ากับ $2! \times 4! \times 4!$ วิธี
2. ในการหาจำนวนวิธี ชาย 4 คน หญิง 4 คน นั่งสลับที่กันอาจแบ่งเป็น 3 ขั้นตอน
ขั้นตอนที่ 1 ชาย 4 คน สลับกันได้ $= 4!$ วิธี
ขั้นตอนที่ 2 หญิง 4 คน สลับกันได้ $= 4!$ วิธี
ขั้นตอนที่ 3 สลับของสองประเภทคือชายกับหญิง ได้ $= 2!$ วิธี

โดยหลักการเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ จะได้ว่าจำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $2! \times 4! \times 4!$ วิธี

ตัวอย่างที่ 2 ชาย m คน หญิง m คน นั่งสลับกัน r ต่อ r ได้กี่วิธี (r หรือ m ลงตัว)

แบ่งเป็น 3 ขั้นตอน

- ขั้นตอนที่ 1 ชาย m คน นั่งสลับกันได้ $= m!$ วิธี
- ขั้นตอนที่ 2 หญิง m คน นั่งสลับกันได้ $= m!$ วิธี
- ขั้นตอนที่ 3 สลับของสองประเภทคือชายกับหญิงได้ $2!$ วิธี

โดยหลักการเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับจะได้ว่า จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $2! \times m! \times m!$ วิธี

สรุปได้ดังต่อไปนี้

มีของ 2 ประเภท ประเภทละ m สิ่ง ซึ่งต่างกัน เรียงสับเปลี่ยนของทั้งหมด $2m$ สิ่ง สลับประเภท
ทีละ r สิ่ง (r หรือ m ลงตัว) เป็นแนวตรง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดเท่ากับ $2! \times m! \times m!$

ตัวอย่างที่ 3 มีตำราภาษาอังกฤษ 12 เล่มต่างกันและตำราภาษาไทย 12 เล่มต่างกัน จะจัดเรียง
สับเปลี่ยนทั้ง 24 เล่มบนชั้นหนังสือ ได้กี่วิธี ถ้าเรียงตำราภาษาอังกฤษและภาษาไทยสลับกัน

- | | | |
|-------------|-------------|---------------|
| (1) 1 ต่อ 1 | (2) 2 ต่อ 2 | (3) 3 ต่อ 3 |
| (4) 4 ต่อ 4 | (5) 6 ต่อ 6 | (6) 12 ต่อ 12 |

วิธีเรียงสับเปลี่ยนในตัวอย่างนี้สอดคล้องกับข้อสรุปดังกล่าว

ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนในข้อ (1) ถึง (6) เท่ากันและเท่ากับ $2! \times 12! \times 12!$ วิธี

ตัวอย่างที่ 4 ชาย m คน หญิง m คน และเด็ก m คน ยืนสลับชาย หญิง และเด็ก โดยสลับทีละ r
(r หรือ m ลงตัว) ได้กี่วิธี

แบ่งเป็น 4 ขั้นตอน

- ขั้นตอนที่ 1 ชาย m คน สลับกันได้ $= m!$ วิธี
- ขั้นตอนที่ 2 หญิง m คน สลับกันได้ $= m!$ วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เด็ก m คน สลับกันได้ $= m!$ วิธี

ขั้นตอนที่ 4 สลับของ 3 ประเภทคือชาย หญิง และเด็ก ได้ $= 3!$ วิธี

โดยหลักการเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับจะได้ว่า จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $3! \times m! \times m! \times m!$ วิธีสรุปได้ดังต่อไปนี้

มีของ 3 ประเภท ประเภทละ m สิ่ง ซึ่งต่างกัน เรียงสับเปลี่ยนของทั้งหมด $3m$ สิ่ง สลับประเภททีละ r สิ่ง (r หรือ m ลงตัว) เป็นแนวตรง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดเท่ากับ $3! \times m! \times m! \times m!$ วิธี

- จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยนำมาจัดเรียงคราวละ r สิ่ง ($r < n$)

จำนวนของ n สิ่ง ที่แตกต่างกัน ถ้าเรานำมาจัดเป็นแถวแบบวิธีเรียงสับเปลี่ยน r สิ่ง

จำนวนวิธีที่จัดได้เท่ากับ $\frac{n!}{(n-r)!}$ วิธี

เพื่อความสะดวก เรานิยมใช้ $P_{n,r}$ หรือ ${}_nP_r$ หรือ nP_r หรือ $P(n, r)$ แทน ดังนั้น

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ตัวอย่างที่ 1 $P(4, 1) = \frac{4!}{(4-1)!} = \frac{4!}{3!} = \frac{4 \times 3!}{3!} = 4$

ตัวอย่างที่ 2 $P(6, 6) = \frac{6!}{(6-6)!} = \frac{6!}{0!} = \frac{6!}{1} = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

ข้อสังเกต $P(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$

ดังนั้น

$$P(n, n) = n!$$

$(0! = 1)$

ตัวอย่างที่ 3 มีสิ่งของ 7 สิ่งที่แตกต่างกัน นำมาจัดเรียงเป็นแถว 3 สิ่ง จงหาจำนวนวิธีที่เกิดขึ้นได้ทั้งหมด

วิธีทำ จำนวนวิธีที่เกิดขึ้นได้ทั้งหมดเท่ากับ $P(7, 3)$

$$= \frac{7!}{(7-3)!}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{7!}{4!} \\
 &= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} \\
 &= 210 \text{ วิธี}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 มีหนังสือ 10 เล่ม จะจัดเรียงงานชั้นหนังสือซึ่งมีที่ว่าง 3 ที่ได้กี่วิธี

วิธีทำ จำนวนวิธีที่เกิดขึ้นได้ทั้งหมดเท่ากับ $P(10, 3)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{10!}{(10-3)!} \\
 &= \frac{10!}{7!} \\
 &= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 720 \text{ วิธี}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5 มีนักเรียนกลุ่มหนึ่งจำนวน 6 คน ต้องการนำนักเรียนในกลุ่มนี้ไปนั่งบนม้านั่งยาวอย่างน้อย 1 คน จะมีวิธีการนั่งแตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ จำนวนวิธีของการนำนักเรียน 1 คน นั่งม้านั่งยาว ได้

$$P(6, 1) = \frac{6!}{(6-1)!} = \frac{6!}{5!} = \frac{6 \times 5!}{5!} = 6 \text{ วิธี}$$

จำนวนวิธีของการนำนักเรียน 2 คน นั่งม้านั่งยาว ได้

$$P(6, 2) = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!} = 30 \text{ วิธี}$$

จำนวนวิธีของการนำนักเรียน 3 คน นั่งม้านั่งยาว ได้

$$P(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120 \text{ วิธี}$$

จำนวนวิธีของการนำนักเรียน 4 คน นั่งม้านั่งยาว ได้ $P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 360 \text{ วิธี}$

จำนวนวิธีของการนำนักเรียน 5 คน นั่งม้านั่งยาว ได้ $P(6, 5) = \frac{6!}{(6-5)!} = \frac{6!}{1!} = 720 \text{ วิธี}$

จำนวนวิธีของการนำนักเรียน 6 คน นั่งม้านั่งยาว ได้ $P(6, 6) = \frac{6!}{(6-6)!} = \frac{6!}{0!} = \frac{6!}{1!} = 720 \text{ วิธี}$

ดังนั้น จะมีวิธีการนั่งแตกต่างกันทั้งหมด $6 + 30 + 120 + 360 + 720 + 720 = 1,956 \text{ วิธี}$

- วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่มีบางสิ่งเหมือนกันในแนวเส้นตรง

ถ้าเรามีสิ่งของ n สิ่ง ในของ n สิ่งนี้ มี n_1 สิ่งเหมือนกัน เป็นกลุ่มที่ 1, n_2 สิ่งเหมือนกัน เป็นกลุ่มที่ 2, n_3 สิ่งเหมือนกัน เป็นกลุ่มที่ 3 และ n_r สิ่งเหมือนกัน เป็นกลุ่มที่ r

$$\text{โดยที่ } n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r = n$$

นำของทั้ง n สิ่งนี้มาจัดเรียงเป็นแถวทั้งหมด จะทำได้เท่ากับ

$$\frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_r!} \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 1 ในการสลับอักษรในคำ “CANADA” จะได้คำที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่คำ

วิธีทำ คำ “CANADA” มีอักษร 6 ตัว ซึ่งเป็นตัว A ซ้ำกัน 3 ตัว

$$\text{ดังนั้น จะได้คำที่แตกต่างกัน } \frac{6!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120 \text{ คำ}$$

ตัวอย่างที่ 2 จะมีวิธีนำอักษรในคำว่า MISSISSIPPI มาเรียงสับเปลี่ยนกันได้กี่วิธี

วิธีทำ ตัวอักษรในคำว่า MISSISSIPPI มี 11 ตัว

มี S ที่เหมือนกัน (ซ้ำกัน) 4 ตัว

มี I ที่เหมือนกัน (ซ้ำกัน) 4 ตัว

มี P ที่เหมือนกัน (ซ้ำกัน) 2 ตัว

มี M ที่เหมือนกัน (ซ้ำกัน) 1 ตัว

ดังนั้น จากการเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งเหมือนกันในแนวเส้นตรง

$$\text{จะทำได้เท่ากับ } \frac{11!}{4! \times 4! \times 2! \times 1!} \text{ วิธี}$$

$$= \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 4 \times 3 \times 2 \times 2} = 34,650 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 3 ถ้าต้องการบรรจุคนงาน 9 คน เข้าทำงานใน 3 แผนก โดยที่แผนกที่หนึ่งต้องการคนงาน 2 คน แผนกที่สองต้องการคนงาน 3 คน และแผนกที่สามต้องการคนงาน 4 คน แล้วจะมีวิธีบรรจุคนงานเหล่านี้ได้กี่วิธี

วิธีทำ คนงานที่อยู่ในแผนกเดียวกัน จะสับเปลี่ยนอย่างไรก็ยังคงอยู่ในแผนกเดียวกัน ดังนั้น เราจึงถือว่าคนในแผนกเดียวกัน ซ้ำกันหรือเหมือนกัน

ดังนั้น จำนวนวิธีการบรรจุคนงาน 9 คน จะเท่ากับจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของคน 9 คน ซึ่งซ้ำกัน 3 กลุ่ม คือ กลุ่มที่ 1 ซ้ำ 2 คน, กลุ่มที่ 2 ซ้ำ 3 คน, กลุ่มที่ 3 ซ้ำ 4 คน นั่นคือ

จำนวนวิธีบรรจุคนงาน = $\frac{9!}{2! \times 3! \times 4!}$
= 1,260 วิธี

ตัวอย่างที่ 4 จะมีวิธีนำอักษรในคำว่า TROTTING มาเรียงสับเปลี่ยนเป็นคำต่าง ๆ (ไม่จำเป็นต้องมีความหมายก็ได้) โดยมีเงื่อนไขว่าคำนั้นต้องขึ้นต้นด้วยสระและลงท้ายด้วย T

วิธีทำ ตัวอักษรในคำว่า TROTTING มี 8 ตัว

- T มี 3 ตัว

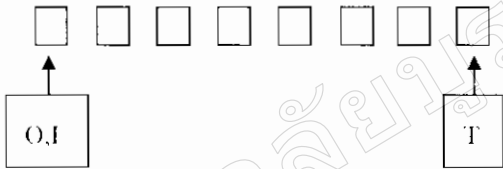
R มี 1 ตัว

I มี 1 ตัว

N มี 1 ตัว

G มี 1 ตัว

O มี 1 ตัว



จำนวนวิธีที่สามารถเลือกทำได้เท่ากับ $2 \times \frac{6!}{2!} \times 1 = 6! = 720$ วิธี

ตัวอย่างที่ 5 จะมีวิธีนำอักษรในคำว่า “AXIOMATIC” มาเรียงสับเปลี่ยนเป็นคำต่าง ๆ (ไม่จำเป็นต้องมีความหมายก็ได้) โดยมีเงื่อนไขว่าสระทุกตัวอยู่ติดกัน

วิธีทำ ตัวอักษรในคำว่า AXIOMATIC มี 9 ตัว

- A มี 2 ตัว

X มี 1 ตัว

I มี 2 ตัว

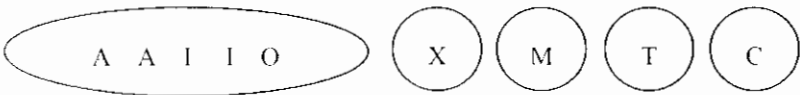
O มี 1 ตัว

M มี 1 ตัว

T มี 1 ตัว

C มี 1 ตัว

เนื่องจากโจทย์ต้องการให้สระทุกตัวอยู่ติดกัน



ให้คิดรวมกันเป็น 1 หน่วย และอย่าลืมนะคะว่าจะต้องคำนวณตัวที่ซ้ำกัน
และการเรียงสับเปลี่ยนในกลุ่มด้วย



$$\text{ดังนั้นมีวิธีจัด} - \frac{5!}{2! \times 2!} \times 5! = 3,600 \text{ วิธี}$$

4. สื่อการเรียนรู้

- 4.1 ใบความรู้ 5 – 8
- 4.2 ใบกิจกรรมฝึกทักษะ/ใบเฉลยกิจกรรมฝึกทักษะ
- 4.3 แบบทดสอบย่อยเรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งในแนวเส้นตรง

5. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

1. ครูทบทวนนักเรียนในเรื่องแฟกทอเรียลโดยใช้การถามตอบ โดยให้นักเรียนหาค่าคำตอบของโจทย์ที่ครูกำหนดให้ เช่น ให้นักเรียนหาค่าของ $\frac{9!}{7!}$ ซึ่งคำตอบคือ 72
2. ให้นักเรียนเข้ากลุ่มเดิม และทบทวนขั้นตอนการเรียนรู้แบบร่วมมือรูปแบบจิ๊กซอว์ (JIGSAW) พร้อมทั้งชี้ข้อบกพร่องที่เกิดขึ้นจากการทำกิจกรรมในคาบเรียนที่ผ่านมา และร่วมกันหาแนวทางแก้ไขปัญหาในการทำงานครั้งต่อไป

ขั้นสอน

1. นักเรียนสมาชิกกลุ่มประจำแต่ละกลุ่มแบ่งกันรับผิดชอบเนื้อหาเรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งในแนวเส้นตรง โดยพิจารณาเลือกความสามารถ แบ่งกันหัวข้อดังนี้
 - นักเรียนคนที่ 1 ศึกษาใบความรู้ที่ 5 และทำใบงานที่ 5 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดนำมาจัดเรียงอันดับคราวละ n สิ่ง
 - นักเรียนคนที่ 2 ศึกษาใบความรู้ที่ 6 และทำใบงานที่ 6 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของหลายประเภทสลับกัน
 - นักเรียนคนที่ 3 ศึกษาใบความรู้ที่ 7 และทำใบงานที่ 7 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยนำมาจัดเรียงคราวละ r สิ่ง ($r < n$)
 - นักเรียนคนที่ 4 ศึกษาใบความรู้ที่ 8 และทำใบงานที่ 8 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่มีบางสิ่งเหมือนกันในแนวเส้นตรง
2. หัวหน้ากลุ่มแจกเอกสารประกอบเนื้อหาตามที่ได้แบ่งหัวข้อกันรับผิดชอบและอธิบายขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมให้สมาชิกในกลุ่มฟัง
3. นักเรียนที่รับผิดชอบหัวข้อเดียวกันไปรวมกลุ่มกัน เรียกว่า กลุ่มผู้เชี่ยวชาญ (Expert Group) นักเรียนในกลุ่มผู้เชี่ยวชาญร่วมกันศึกษาจากใบความรู้และทำใบงานที่ได้รับมอบหมาย

เมื่อเสร็จแล้วให้นักเรียนส่งใบงานแล้วจึงตรวจคำตอบจากเฉลยใบงานที่ให้นักเรียนร่วมกันสนทนา
ซักถามกันให้เข้าใจ โดยครูเดินดูระหว่างการทำกิจกรรมของนักเรียน และอธิบายเพิ่มเติม
หากนักเรียนมีข้อสงสัย จากนั้นนักเรียนจากกลุ่มผู้เชี่ยวชาญกลับเข้าสู่กลุ่มประจำของตน
สมาชิกภายในกลุ่มผลัดกันอธิบาย ถ้ายังหาคำตอบรู้ให้สมาชิกภายในกลุ่มเข้าใจให้ครบทั้ง 4 หัวข้อ

ขั้นสรุป

- 1. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเชื่อมโยงความรู้เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งใน
แนวเส้นตรง โดยใช้การตั้งคำถามและสุ่มให้นักเรียนออกมาทำโจทย์บนกระดาน แล้วครูและ
นักเรียนร่วมกันตรวจสอบความถูกต้องและเฉลยคำตอบ
- 2. นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยเรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งในแนวเส้นตรง
เป็นรายบุคคล จากนั้นเลข เนกเรกลุ่มเก็บรวบรวมส่งครู
- 3. ครูตรวจให้คะแนนโดยให้นักเรียนแต่ละกลุ่มแลกเปลี่ยนตรวจ
- 4. นำคะแนนของทุกคนในกลุ่มมารวมกัน และจัดเรียงลำดับคะแนนเฉลี่ยรวมของ
แต่ละกลุ่ม ประเมินผลสอบ กลุ่มที่ได้คะแนนสูงสุดจะได้รับรางวัล

6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

- 6.1 สังเกตจากการตอบคำถาม
- 6.2 สังเกตจากการทำงานและการร่วมกิจกรรม
- 6.3 จากผลการตรวจใบงาน
- 6.4 จากผลกรทำแบบทดสอบรายบุคคล

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัส ก32202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 3 ชั่วโมง

เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งในแนววงกลม

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง: แก้ปัญหาโดยใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ได้

1. สาระสำคัญ

- จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง เท่ากับ $(n-1)!$

- การนำสิ่งของ n สิ่ง ที่มีบางสิ่งซ้ำกันมาเรียงเป็นวงกลม

ถ้ามีสิ่งของ n สิ่ง โดยแบ่งกลุ่มเป็น k กลุ่ม

กลุ่มที่ 1 มีสิ่งของซ้ำกัน n_1 สิ่ง

กลุ่มที่ 2 มีสิ่งของซ้ำกัน n_2 สิ่ง

$\vdots$

กลุ่มที่ k มีสิ่งของซ้ำกัน n_k สิ่ง

ถ้า ห.ร.ม. $(n_1, n_2, \dots, n_k) = 1$ แล้ว จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมของสิ่งของ n สิ่ง

ดังกล่าวเท่ากับ $\frac{(n-1)!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$ วิธี

แต่ถ้า ห.ร.ม. $(n_1, n_2, \dots, n_k) \neq 1$ ไม่สามารถใช้สูตรข้างต้นนี้ได้ สามารถแก้ปัญหานี้ได้

โดยการแจกแจงด้วยภาพ

- การจัดเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง มาจัดเรียงเป็นวงกลมในลักษณะ

ที่มองได้ 2 ด้าน จำนวนวิธีที่สามารถจัดทำได้เท่ากับ $\frac{(n-1)!}{2}$ วิธี

- ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกัน 2 ประเภท ๆ ละ n สิ่ง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้งหมดเป็นวงกลม โดยสลับประเภทละ 1 สิ่ง เท่ากับ $(n-1)! \times n!$

- ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกัน 2 ประเภท ๆ ละ n สิ่ง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้งหมดเป็นวงกลม โดยสลับประเภทละ k สิ่ง (k ห.ร.ม. n ลงตัว) เท่ากับ $k \times (n-1)! \times n!$

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

2.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

- หาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง เป็นวงกลมได้

- หาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่ง ที่มีบางสิ่งซ้ำกันเป็นวงกลมได้
- หาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันเป็นวงกลมใน 3 มิติได้
- หาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของหลายประเภทสลับกันเป็นวงกลมได้

2.2 ด้านทักษะ/กระบวนการ

- การแก้ปัญหา
- การให้เหตุผล
- การสื่อสารและสื่อความหมาย
- การเชื่อมโยงความรู้วิทยาศาสตร์

2.3 ด้านคุณลักษณะ

- นักเรียนมีวินัยและมีความรับผิดชอบในการเรียน
- นักเรียนมีความเสียสละเพื่อส่วนรวม
- นักเรียนให้ความร่วมมือและช่วยเหลือกัน

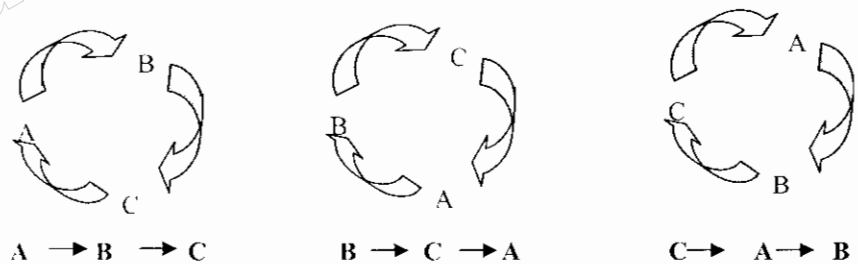
3. สารการเรียนรู้

- วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดในลักษณะวงกลม

พิจารณาการจัดเรียงตัวอักษร 3 ตัว คือ A, B และ C เป็นแถวตรงจะมีวิธีจัดเรียงได้ $3! = 6$ วิธี คือ

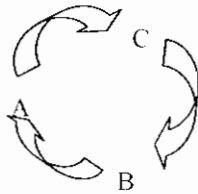
ABC	BCA	CAB
ACB	BAC	CBA

วิธีการจัดเรียงตัวอักษร ABC BCA CAB เป็นการจัดเรียงแถวตรงที่แตกต่างกัน แต่ถ้านำแต่ละวิธีมาจัดเป็นวงกลม จะได้



จะเห็นว่า การจัดเรียงทั้งสามแบบ ถือว่าเป็นการจัดเรียงเป็นวงกลมเพียง 1 วิธี เท่านั้น

ในทำนองเดียวกัน วิธีการจัดเรียงตัวอักษร ACB BAC และ CBA เป็นการจัดเรียงเป็นวงกลมเพียง 1 วิธี คือ



ดังนั้น การจัดเรียงตัวอักษร 3 ตัว เป็นวงกลม จะได้ 2 วิธี คือ



แนวคิดในการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง อาจจะเริ่มโดยให้สิ่งของสิ่งหนึ่งอยู่คงที่ ณ ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่ง แล้วจัดเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่เหลืออยู่ $n - 1$ สิ่ง จะได้ จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมทั้งหมดเท่ากับ

$$(n - 1)(n - 2)(n - 3) \dots 3 \times 2 \times 1 = (n - 1)!$$

สรุปได้ว่า จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง เท่ากับ $(n - 1)!$

ตัวอย่างที่ 1 มีคน 7 คน จะจัดคนทั้ง 7 คน นั่งรอบโต๊ะกลมเพื่อรับประทานอาหารได้กี่วิธี

วิธีทำ คน 7 คน สามารถมานั่งรอบโต๊ะกลมได้ $(7 - 1)!$

$$6!$$

$$= 720 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 2 มีคน 10 คน นั่งรอบโต๊ะกลมได้กี่วิธี เมื่อ

วิธีทำ (1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

คน 10 คน นั่งรอบโต๊ะกลมได้ $(10 - 1)! = 9!$ วิธี

(2) ถ้ามีคน 2 คนขอนั่งติดกันเสมอ

คน 2 คนขอนั่งติดกันเสมอ คิดเป็น 1 ตำแหน่ง กับอีก 8 คน รวมเป็น 9 ตำแหน่ง

9 ตำแหน่ง จัดลำดับเป็นวงกลมได้ $(9 - 1)! = 8!$ วิธี

คน 2 คนนั่งติดกันสลับที่กันได้ $2! = 2$ วิธี

ดังนั้นมีวิธีนั่งรอบโต๊ะกลมซึ่งคน 2 คนนั่งติดกันเสมอ $= 2 \times 8!$ วิธี

(3) ถ้ามีคน 2 คนขอนั่งแยกกันเสมอ

จำนวนวิธีที่คน 2 คนขอนั่งแยกกันเสมอ

-- จำนวนวิธีที่ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม -- จำนวนวิธีที่คน 2 คนนั่งติดกันเสมอ

$$- 9! - (2 \times 8!) - (9 \times 8!) - (2 \times 8!) - 8!(9 - 2) = 7 \times 8! \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 3 มีผู้หญิง 2 คน และผู้ชาย 4 คน มาขึ้นเรียงเป็นวงกลม จะยืนได้กี่วิธี เมื่อ

วิธีทำ (1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

$$\text{จำนวนวิธีการยืน} (6 - 1)! - 5! = 120 \text{ วิธี}$$

(2) ผู้หญิง 2 คนยืนตรงข้ามกันเสมอ

ผู้หญิง 2 คนเลือกยืนตรงข้ามกันได้ 1 วิธี

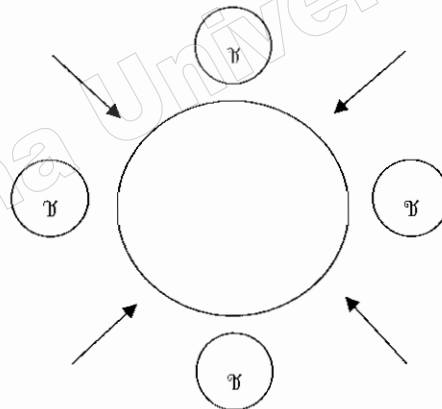
(เพราะหมุนได้ตามหลักเกณฑ์ของวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม)

ในแต่ละวิธี ผู้ชาย 4 คน มีวิธีการยืน $- 4! = 24$ วิธี

$$\text{ดังนั้น จำนวนวิธีการยืน} = 1 \times 24 = 24$$

ตัวอย่างที่ 4 ถ้าต้องการจัดให้เด็กชาย 4 คน และเด็กหญิง 3 คน นั่งเป็นวงกลม โดยไม่ให้เด็กหญิงนั่งติดกัน จะจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ



จัดเด็กชาย 4 คน นั่งได้ระกมลก่อน จะจัดได้ 3! วิธี

มีที่ให้เด็กหญิง 3 คน แทรกได้ 4 ที่

$$\text{ดังนั้น จัดเด็กหญิงนั่งแยกกันได้ } P(4, 3) = \frac{4!}{1!} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ วิธี}$$

$$\therefore \text{จำนวนวิธีทั้งหมดที่จัดได้ } 3! \times 24 = 144 \text{ วิธี}$$

- จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของหลายประเภทสลับกันเป็นวงกลม

พิจารณาเกรนังสลับที่กันระหว่างชายหญิงเป็นวงกลม ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 มีชาย 3 คน และหญิง 3 คน นั่งสลับชาย 1 หญิง 1 รอบโต๊ะกลมได้กี่วิธี

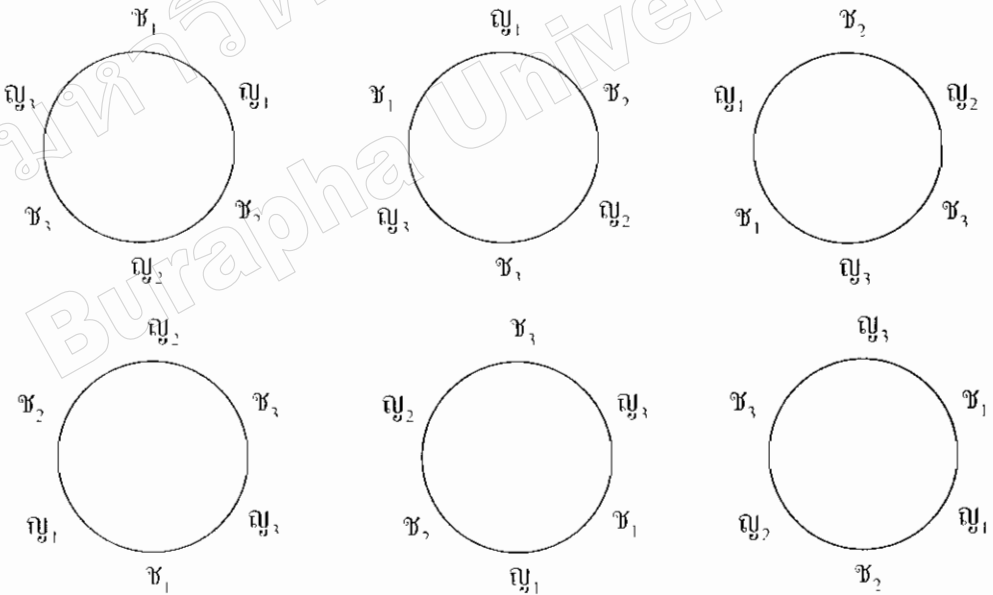
ให้ $ช_1, ช_2, ช_3$ หมายถึง ชายคนที่ 1, 2, 3 ตามลำดับ

$ญ_1, ญ_2, ญ_3$ หมายถึง หญิงคนที่ 1, 2, 3 ตามลำดับ

พิจารณาเกรนังสลับชายหญิงเป็นแนวตรง 6 วิธีต่อไปนี้

$ช_1$	$ญ_1$	$ช_2$	$ญ_2$	$ช_3$	$ญ_3$
$ญ_1$	$ช_2$	$ญ_2$	$ช_3$	$ญ_3$	$ช_1$
$ช_2$	$ญ_2$	$ช_3$	$ญ_3$	$ช_1$	$ญ_1$
$ญ_1$	$ช_3$	$ญ_3$	$ช_1$	$ญ_1$	$ช_2$
$ช_3$	$ญ_3$	$ช_1$	$ญ_1$	$ช_2$	$ญ_2$
$ญ_3$	$ช_1$	$ญ_1$	$ช_2$	$ญ_2$	$ช_3$

ถ้านำมาเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลม 6 วิธีนี้ถือเป็น 1 วิธี ดังภาพ



ดังนั้นเรียงสับเปลี่ยนเป็นแนวตรงได้ 6 วิธี เรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมได้ 1 วิธี

การเรียงสับเปลี่ยนเป็นแนวตรงได้ทั้งหมด $2! \times 3! \times 3!$ วิธี

ดังนั้น เรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมได้ $\frac{2! \times 3! \times 3!}{6} = 2! \times 3!$ วิธี

สามารถสรุปได้ดังนี้

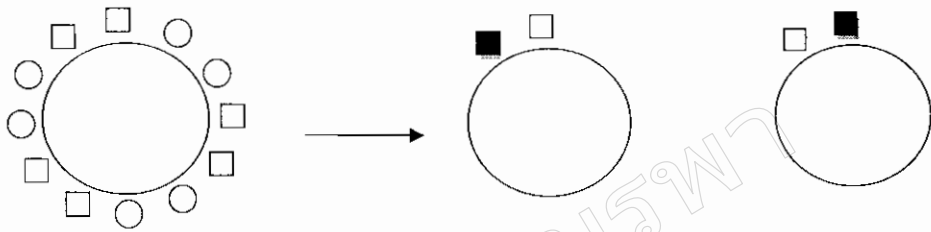
ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกัน 2 ประเภท ๆ ละ n สิ่ง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้งหมดเป็นวงกลม โดยสลับประเภทละ 1 สิ่ง เท่ากับ $(n-1)! \times n!$

ตัวอย่างที่ 2 มีชาย 6 คน หญิง 6 คน ถ้าจัดนั่งรอบโต๊ะกลมจะมีกี่วิธี ถ้าชายและหญิงต้องนั่งสลับกันทีละ

(1) 2 คน

(2) 3 คน

วิธีทำ (1) 2 คน (ให้ $\square$ แทนผู้ชาย และ $\circ$ แทนผู้หญิง)



ให้ใครคนใดคนหนึ่ง (ชายหรือหญิงก็ได้) ไปเลือกที่นั่ง และอยู่กับที่

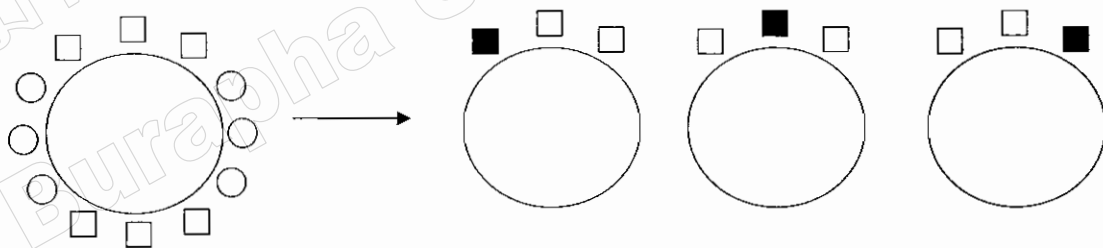
จำนวนวิธีเลือกที่นั่ง = 2 วิธี (ดังภาพ ■)

จากภาพให้เห็นที่นั่งอยู่กับที่คือผู้ชาย ผู้ชาย 5 คนที่เหลือไปนั่งที่ผู้ชาย และสลับที่กันเองได้ 5! วิธี

ในแต่ละวิธี จัดให้ผู้หญิงนั่งเก้าอี้ว่าง ซึ่งมีที่นั่ง 6 ที่แต่ละสลับที่กันเอง จะจัดได้ 6! วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดให้ผู้ชายและผู้หญิงนั่งสลับกันเท่ากับ $2 \times 5! \times 6! = 2 \times 120 \times 720 = 172,800$ วิธี

(2) 3 คน



ให้ชายคนหนึ่งไปเลือกที่นั่งในตำแหน่งผู้ชาย และอยู่กับที่

จำนวนวิธีเลือกที่นั่ง = 3 วิธี (ดังภาพ ■)

ในแต่ละวิธี ผู้ชาย 5 คนที่เหลือไปนั่งที่ผู้ชาย และสลับที่กันเองได้ 5! วิธี

ในแต่ละวิธี จัดให้ผู้หญิง 6 คน ไปนั่งที่ผู้หญิงและสลับที่กันเอง จะจัดได้ 6! วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดให้ผู้ชายและผู้หญิงนั่งสลับกันเท่ากับ $3 \times 5! \times 6! = 2 \times 120 \times 720 = 259,200$ วิธี

สามารถสรุปได้ดังนี้

ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกัน 2 ประเภท ๆ ละ n สิ่ง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้งหมดเป็นวงกลม โดยสลับประเภทละ k สิ่ง (k หาร n ลงตัว) เท่ากับ $k \times (n-1)! \times n!$

ตัวอย่างที่ 3 มีชาย 12 คน หญิง 12 คน นั่งเป็นวงกลม โดยนั่งสลับกันระหว่างชายและหญิง จะมีวิธีการนั่งกี่วิธี เมื่อ

(1) สลับกันทีละ 1 คน

(2) สลับกันทีละ 3 คน

วิธีทำ (1) สลับกันทีละ 1 คน

$$\text{จำนวนวิธีการนั่ง} = 1 \times (12-1)! \times 12! = 11! \times 12! \text{ วิธี}$$

(2) สลับกันทีละ 3 คน

$$\text{จำนวนวิธีการนั่ง} = 3 \times (12-1)! \times 12! = 3 \times 11! \times 12! \text{ วิธี}$$

- จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่ง ที่มีบางสิ่งซ้ำกันเป็นวงกลม

การนำสิ่งของ n สิ่ง ที่มีบางสิ่งซ้ำกันมาเรียงเป็นวงกลม

ถ้ามีสิ่งของ n สิ่ง โดยแบ่งกลุ่มเป็น k กลุ่ม

กลุ่มที่ 1 มีสิ่งของซ้ำกัน n_1 สิ่ง

กลุ่มที่ 2 มีสิ่งของซ้ำกัน n_2 สิ่ง

$\vdots$

กลุ่มที่ k มีสิ่งของซ้ำกัน n_k สิ่ง

ถ้า ห.ร.ม. $(n_1, n_2, \dots, n_k) = 1$ แล้ว จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมของสิ่งของ n สิ่ง

ดังกล่าว เท่ากับ $\frac{(n-1)!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$ วิธี

แต่ถ้า ห.ร.ม. $(n_1, n_2, \dots, n_k) \neq 1$ ไม่สามารถใช้สูตรข้างต้นนี้ได้ สามารถแก้ปัญหานี้ได้

โดยการแจกแจงด้วยภาพ

ตัวอย่างที่ 1 มีลูกบอลสีขาวเหมือนกัน 2 ลูก สีเหลืองเหมือนกัน 3 ลูก และสีน้ำเงินเหมือนกัน 4 ลูก จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมของลูกบอลทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ เนื่องจาก ห.ร.ม. $(2, 3, 4) = 1$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมของลูกบอลทั้งหมด} &= \frac{(9-1)!}{2! \times 3! \times 4!} \\ &= \frac{8!}{2! \times 3! \times 4!} = 140 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 มีหนังสือเคมี 1 เล่ม หนังสือคณิตศาสตร์เหมือนกัน 2 เล่ม หนังสือฟิสิกส์เหมือนกัน 2 เล่ม และหนังสือชีววิทยาเหมือนกัน 3 เล่ม ถ้าต้องการนำหนังสือทั้งหมดมาวางเรียงเป็นวงกลม จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนกี่วิธี เมื่อ

(1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

(2) หนังสือวิชาเดียวกันอยู่ติดกัน

วิธีทำ (1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

เนื่องจาก ห.ร.ม. $(1, 2, 2, 3) = 1$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น จำนวนวิธีจัดหนังสือทั้งหมดเป็นวงกลม} &= \frac{(8-1)!}{1! \times 2! \times 2! \times 3!} \\ &= \frac{7!}{1! \times 2! \times 2! \times 3!} = 210 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

(2) หนังสือวิชาเดียวกันอยู่ติดกัน

รวมหนังสือในวิชาเดียวกันเป็น 1 เล่ม



ดังนั้น จึงเหมือนกับมีหนังสือ 4 เล่ม แตกต่างกัน ซึ่งมีวิธีเรียงสับเปลี่ยน $= (4-1)! = 3! = 6$ วิธี

ตัวอย่างที่ 3 มีตัวอักษร A, A, B, B นำมาวางเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม ทำได้ทั้งสิ้นกี่วิธี เมื่อ

(1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

(2) ตัวอักษร A อยู่ติดกัน

วิธีทำ (1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

เนื่องจาก ห.ร.ม. $(2, 3) = 1$

$$\text{จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน} = \frac{(5-1)!}{2! \times 3!} = \frac{4!}{2 \times 3!} = 2 \text{ วิธี}$$

(2) ตัวอักษร A อยู่ติดกัน

AA

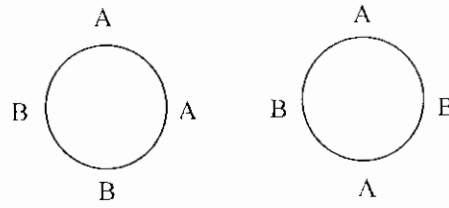
 , B, B, B

รวม A 2 ตัว เป็น 1 ตัว เนื่องจาก ห.ร.ม. $(1, 3) = 1$

$$\text{ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน} = \frac{(4-1)!}{3!} = \frac{3!}{3!} = 1 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 4 มีตัวอักษร A อยู่ 2 ตัว และอักษร B อยู่ 2 ตัว นำมาวางเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม ทำได้ทั้งสิ้นกี่วิธี

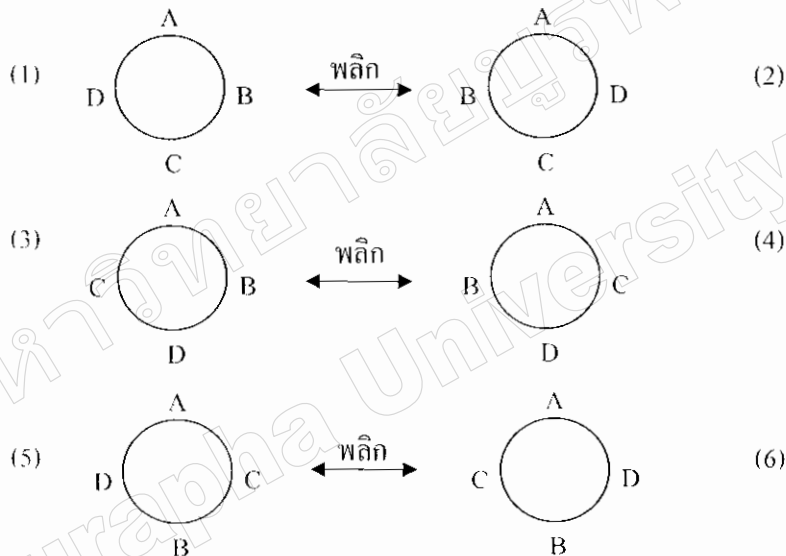
วิธีทำ เนื่องจาก ห.ร.ม. ของจำนวนตัวอักษร A และ B เป็น 2 (ห.ร.ม. $(2, 2) = 2$) จึงต้องใช้วิธีการแจกแจงคำภาพ ดังนี้



ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน = 2 วิธี

- จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันเป็นวงกลมใน 3 มิติ

วิธีเรียงสับเปลี่ยนแถววงกลมของ A, B, C, D ใน 3 มิติหรือการมองได้ 2 ด้าน จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยน ดังภาพต่อไปนี้



จะสังเกตได้ว่าถ้าเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมและมองด้านเดียว จะมีวิธีการเรียงได้ทั้งหมดคือ $(4-1)! = 3! = 6$ วิธี (เนื่องจากเราให้ A คงที่ตำแหน่งที่ 1 ไว้ ส่วน B, C และ D ก็สลับแบบเชิงเส้น)

แต่ถ้าเป็นการเรียงสับเปลี่ยนแบบมองได้ 2 ด้าน จะเหลือเพียง $\frac{(4-1)!}{2} = \frac{3!}{2} = 3$ วิธีเท่านั้น

นั่นคือ รูป (1) และรูป (2) ถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน

รูป (3) และรูป (4) ถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน

รูป (5) และรูป (6) ถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน

ยกตัวอย่างเช่น มีลูกโป่งจำนวน 3 ลูก ซึ่งมีสีแดง ขาว และน้ำเงิน ถ้าวางเป็นวงกลมบนพื้น 2 วิธีต่อไปนี้ก็จะแตกต่างกัน