

328805

ตารางที่ 1 แสดงค่าจุดเริ่มต้น $y_3(0), y_4(0)$ ค่าของฟังก์ชัน $F_1 = y_1(1) - e$ และ $F_2 = y_2(1) - e$ ในแต่ละขั้นตอนการคำนวณ เมื่อ $h = 0.1$

i	$y_3(0)$	$y_4(0)$	F_1	F_2
0	-1	3	0.00e+000	8.88e-016
1	-0.33266628	4.00452809	-1.66e-001	1.67e-001
2	-0.17298849	3.84370509	-1.13e-001	2.47e-001
3	-19.21447409	50.00678532	-1.94e+000	4.26e+000
4	0.99876384	1.00405549	5.52e-005	7.87e-004
5	1.00039963	0.99904193	3.80e-005	-8.15e-005
6	1.00007239	0.99983357	6.18e-006	-1.35e-005
7	1.00000798	0.99998973	-1.28e-008	2.80e-008
8	1.00000812	0.99998941	4.00e-014	-8.57e-014
9	1.00000812	0.99998941	-4.44e-016	-8.88e-016

เมื่อกำหนดจำนวนกระทำซ้ำ 9 ครั้ง จะได้ค่าของฟังก์ชันเข้าใกล้ศูนย์ จุดเริ่มต้นที่สอดคล้องเหมาะสมคือ $y_3(0)=1.00000812$ และ $y_4(0)=0.99998941$

ตารางที่ 2 แสดงค่าจุดเริ่มต้น $y_3(0), y_4(0)$ ค่าของฟังก์ชัน $F_1 = y_1(1) - e$ และ $F_2 = y_2(1) - e$ ในแต่ละขั้นตอนการคำนวณ เมื่อ $h = 0.02$

i	$y_3(0)$	$y_4(0)$	F_1	F_2
0	-1	3	0.00e+000	8.88e-016
1	-0.33266766	4.00452682	-1.66e-001	1.67e-001
2	-0.17299112	3.84370317	-1.13e-001	2.47e-001
3	-19.20934583	49.99436008	-1.94e+000	4.26e+000
4	0.99875712	1.00406193	5.53e-005	7.86e-004
5	1.00039125	0.99905317	3.79e-005	-8.15e-005
6	1.00006425	0.99984422	6.18e-006	-1.35e-005

ตารางที่ 2 (ต่อ)

i	$y_3(0)$	$y_4(0)$	F_1	F_2
7	0.99999988	1.00000030	-1.28e-008	2.79e-008
8	1.00000001	0.99999998	3.91e-014	-8.62e-014
9	1.00000001	0.99999998	0.00e+000	8.88e-016

เมื่อคำนวณจำนวนกระทำซ้ำ 9 ครั้ง จะได้ค่าของฟังก์ชันเข้าใกล้ศูนย์ จุดเริ่มต้นที่สอดคล้องเหมาะสมคือ $y_3(0)=1.00000001$ และ $y_4(0)=0.99999998$

ตารางที่ 3 แสดงผลเฉลยของวิธีนี้ y_n เปรียบเทียบกับผลเฉลยที่แม่นยำ ($e_n = y_n - y(x_n)$)

x	$y(x_n)$	h = 0.1		h = 0.02	
		y_n	e_n	y_n	e_n
0.0	1.00000000	1.00000000	0.00e+000	1.00000000	0.00e+000
0.1	1.10517092	1.10517087	4.59e-008	1.10517092	7.85e-011
0.2	1.22140276	1.22140272	3.96e-008	1.22140276	6.78e-011
0.3	1.34985881	1.34985881	-4.26e-009	1.34985881	-4.26e-009
0.4	1.49182470	1.49182477	-7.06e-008	1.49182470	-1.20e-010
0.5	1.64872127	1.64872141	-1.44e-007	1.64872127	-2.45e-010
0.6	1.82211880	1.82211901	-2.07e-007	1.82211880	-3.53e-010
0.7	2.01375271	2.01375295	-2.43e-007	2.01375271	-4.15e-010
0.8	2.22554093	2.22554116	-2.33e-007	2.22554093	-3.98e-010
0.9	2.45960311	2.45960327	-1.59e-007	2.45960311	-2.72e-010
1.0	2.71828183	2.71828183	0.00e+000	2.71828183	8.88e-016

ตัวอย่าง 2 ปัญหาค่าขอบกำหนดค่าต่าง ๆ ดังนี้

ผลเฉลย:

$$t_0 = 0 \text{ และ } t_k = \pi$$

$$\text{ให้ } u_1 = \int_0^\pi \cos(t)y(t)dt \text{ และ } u_2 = \int_0^\pi \sin(t)y(t)dt$$

$$y''(x) = y(x) - \frac{4}{\pi} \cos(x) \cdot c_1 - \frac{4}{\pi} \sin(x) \cdot c_2$$

$$u'_1 = \cos(x)y(x) \text{ และ } u'_2 = \sin(x)y(x)$$

กำหนดให้ $t = x, y_1 = y, y_2 = y'$ จะได้ $y'_1 = y', y'_2 = y''$ แทนค่าในสมการได้

$$\text{ระบบสมการเป็น } y'_1 = y_2, y'_2 = y_1 - \frac{4}{\pi} \cos(t) \cdot c_1 - \frac{4}{\pi} \sin(t) \cdot c_2$$

$$u'_1 = \cos(t)y(t) \quad u'_2 = \sin(t)y(t)$$

$$\text{เงื่อนไขค่าเริ่มต้น } y_1(0) = 1, y_2(\pi) = 0, u_1(0) = 0, u_1(\pi) = c_1, u_2(0) = 0, u_2(\pi) = c_2$$

ในการหาผลเฉลยในระบบสมการนี้ กำหนดจุดเริ่มต้น $z_0 = [y_2(0), c_1, c_2]^T = [1, 1.5, 2]^T$ และ

$$D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ เป็นเมทริกซ์เริ่มต้น เมื่อ } h = 0.314 \text{ จะได้ว่า } z_0 = [y_2(0), c_1, c_2]^T \text{ อยู่เข้าสู่}$$

$[0.00005794, 1.57090841, 0.00003061]^T$ เมื่อ $h = 0.0314$ จะได้ว่า $z_0 = [y_2(0), c_1, c_2]^T$ อยู่เข้าสู่ $[0.00000001, 1.57079634, 0]^T$ จำนวนกระทำซ้ำ 7 ครั้ง ผลเฉลยแสดงในตารางที่ 6 ซึ่งจะเห็นว่าผลเฉลยของวิธีนี้ใกล้เคียงกับผลเฉลยที่แม่นยำตรง $y(x_n)$ และเมื่อกำหนดค่า h ที่แตกต่างกันจะพบว่าค่า h น้อยลง ค่าคลาดเคลื่อนก็จะน้อยลงตามมาด้วย

ตารางที่ 4 แสดงค่าจุดเริ่มต้น $y_2(0), c_1, c_2$ ค่าของฟังก์ชัน $F_1 = y_2(\pi), F_2 = u_1(\pi) - c_1$ และ $F_3 = u_2(\pi) - c_2$ ในแต่ละขั้นตอนการคำนวณ เมื่อ $h = 0.314$

i	$y_2(0)$	c_1	c_2	F_1	F_2	F_3
0	1	1.5	2	-2.99e-014	1.20e-014	-1.64e-014
1	4.91807828	0.04100267	3.29292015	4.19e+001	-2.34e+001	2.24e+001
2	1.66290765	1.85978101	1.54917172	4.73e+000	-3.20e+000	2.75e+000
3	1.44946015	2.62085582	1.18725238	-4.34e-001	-5.08e-001	-2.03e-001
4	1.92916504	3.98344734	1.37279465	-6.38e+000	2.22e+000	-3.58e+000
5	-21.40190476	-25.19435926	-15.22973283	7.08e+001	-2.47e+001	3.97e+001
6	0.00005794	1.57090841	0.00003061	-3.02e-013	1.74e-013	-1.38e-013
7	0.00005794	1.57090841	0.00003061	1.13e-013	-9.19e-014	6.68e-014

เมื่อกำหนดจำนวนกระทำซ้ำ 7 ครั้ง จะได้ว่าค่าของฟังก์ชันเข้าสู่ใกล้ศูนย์ จุดเริ่มต้นที่สอดคล้อง

เหมาะสมคือ $y_2(0)=0.00005794$, $c_1=1.57090841$ และ $c_2=0.00003061$

ตารางที่ 5 แสดงค่าจุดเริ่มต้น $y_2(0), c_1, c_2$ ค่าของฟังก์ชัน $F_1 = y_2(\pi)$, $F_2 = u_1(\pi) - c_1$ และ $F_3 = u_2(\pi) - c_2$ ในแต่ละขั้นตอนการคำนวณ เมื่อ $h = 0.0314$

i	$y_3(0)$	c_1	c_2	F_1	F_2	F_3
0	1	1.5	2	-2.99e-014	1.20e-014	-1.64e-014
1	4.92011372	0.03994314	3.29402420	4.19e+001	-2.34e+001	2.24e+001
2	1.66313697	1.85973481	1.54921168	4.74e+000	-3.20e+000	2.75e+000
3	1.44959796	2.62093326	1.18727564	-4.35e-001	-5.07e-001	-2.03e-001
4	1.92940701	3.98345026	1.37299361	-6.38e+000	2.22e+000	-3.58e+000
5	-21.29920190	-25.06308796	-15.15681647	7.04e+001	-2.46e+001	3.95e+001
6	0.00000001	1.57079634	0.00000000	5.66e-014	-1.04e-014	3.17e-014
7	0.00000001	1.57079634	0.00000000	-2.99e-014	1.20e-014	-1.64e-014

เมื่อคำนวณจำนวนกระทำซ้ำ 7 ครั้ง จะได้ว่าค่าของฟังก์ชันเข้าใกล้ศูนย์ จุดเริ่มต้นที่สอดคล้องเหมาะสมคือ $y_2(0)=0.00000001$, $c_1=1.57079634$ และ $c_2=0$

ตารางที่ 6 แสดงผลเฉลยของวิธีนี้ y_n เปรียบเทียบกับผลเฉลยที่แม่นยำ ($e_n = y_n - y(x_n)$)

x	$y(x_n)$	h = 0.314		h = 0.0314	
		y_n	e_n	y_n	e_n
0.0000	1.00000000	1.00000000	0.00e+000	1.00000000	0.00e+000
0.3142	0.95105652	0.95106744	-1.09e-005	0.95105652	-1.67e-009
0.6283	0.80901699	0.80903164	-1.46e-005	0.80901700	-2.74e-009
0.9425	0.58778525	0.58779781	-1.26e-005	0.58778526	-3.25e-009
1.2566	0.30901699	0.30902315	-6.15e-006	0.30901700	-3.26e-009
1.5708	0.00000000	-0.00000293	2.93e-006	0.00000000	-2.86e-009
1.8850	-0.30901699	-0.30903001	1.30e-005	-0.30901699	-2.16e-009
2.1991	-0.58778525	-0.58780771	2.25e-005	-0.58778525	-1.32e-009
2.5133	-0.80901699	-0.80904672	2.97e-005	-0.80901699	-5.05e-010

ตารางที่ 6 (ต่อ)

x	y(x _n)	h = 0.314		h = 0.0314	
		y _n	e _n	y _n	e _n
2.8274	-0.95105652	-0.95109002	3.35e-005	-0.95105652	1.10e-010
3.1416	-1	-1.00003278	3.28e-005	-1.00000000	3.34e-010

ตัวอย่าง 3 ปัญหาเริ่มต้นกำหนดค่าต่าง ๆ ดังนี้

ผลเฉลย: $t_0 = 0$ และ $t_k = 1$

$$\text{ให้ } v = \int_0^x e^{s(x-s)} y(s) ds$$

$$y' = 1 + 2x - y + x(1 + 2x) \cdot v$$

เงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y(0) = 1$

ผลเฉลยที่แม่นยำคือ $y(x) = e^{x^2}$

แก้ปัญหโดยวิธี RSM ได้ผลเฉลยแสดงในตารางที่ 7 ผลเฉลยของวิธี RSM ใกล้เคียงกับผลเฉลยที่แม่นยำ $y(x_n)$

ตารางที่ 7 แสดงผลเฉลยของวิธีนี้ y_n เปรียบเทียบกับผลเฉลยที่แม่นยำ ($e_n = y_n - y(x_n)$)

x	y(x _n)	h = 0.05		h = 0.01	
		y _n	e _n	y _n	e _n
0.0	1	1	0.00e+000	1	0.00e+000
0.1	1.01005017	1.01005031	1.45e-007	1.01005017	2.00e-008
0.2	1.04081077	1.04081209	1.32e-006	1.04081083	5.56e-008
0.3	1.09417428	1.09417941	5.12e-006	1.09417450	2.13e-007
0.4	1.17351087	1.17352482	1.40e-005	1.17351145	5.75e-007
0.5	1.28402542	1.28405684	3.14e-005	1.28402670	1.29e-006
0.6	1.43332941	1.43339257	6.32e-005	1.43333199	2.57e-006
0.7	1.63231622	1.63243415	1.18e-004	1.63232100	4.78e-006
0.8	1.89648088	1.89669066	2.10e-004	1.89648936	8.48e-006
0.9	2.24790799	2.24826939	3.61e-004	2.24792256	1.46e-005
1.0	2.71828183	2.71889175	6.10e-004	2.71830637	2.45e-005

ตัวอย่าง 4 ปัญหาค่าเริ่มต้นกำหนดค่าต่าง ๆ ดังนี้

ผลเฉลย: $t_0 = 0$ และ $t_k = 1$

$$\text{ให้ } u = \int_0^1 e^{s(x-s)} y(s) ds$$

$$y' = (1+2x)(1-e^x) + 2xy + x(1+2x) \cdot u$$

$$\text{เงื่อนไขค่าเริ่มต้น } y(0) = 1$$

$$\text{ผลเฉลยที่แน่นอนคือ } y(x) = e^x$$

แก้ปัญหาโดยวิธี RSM ได้ผลเฉลยของปัญหอยู่ในตารางที่ 8 ผลเฉลยของวิธี RSM ใกล้เคียงกับผลเฉลยที่แน่นอน $y(x_n)$

ตารางที่ 8 แสดงผลเฉลยของวิธีนี้ y_n เปรียบเทียบกับผลเฉลยที่แน่นอน ($e_n = y_n - y(x_n)$)

x	$y(x_n)$	h = 0.1		h = 0.05	
		y_n	e_n	y_n	e_n
0.0	1	1	0.00e+000	1	0.00e+000
0.1	1.01005017	1.01005036	1.88e-007	1.01005014	-2.98e-008
0.2	1.04081077	1.04081167	8.94e-007	1.04081063	-1.43e-007
0.3	1.09417428	1.09417667	2.39e-006	1.09417390	-3.81e-007
0.4	1.17351087	1.17351594	5.07e-006	1.17351007	-7.98e-007
0.5	1.28402542	1.28403492	9.50e-006	1.28402397	-1.44e-006
0.6	1.43332941	1.43334600	1.66e-005	1.43332706	-2.35e-006
0.7	1.63231622	1.63234392	2.77e-005	1.63231271	-3.51e-006
0.8	1.89648088	1.89652595	4.51e-005	1.89647613	-4.75e-006
0.9	2.24790799	2.24798018	7.22e-005	2.24790232	-5.66e-006
1	2.71828183	2.71839650	1.15e-004	2.71827648	-5.35e-006

ตัวอย่าง 5 ปัญหาค่าเริ่มต้นกำหนดค่าต่าง ๆ ดังนี้

ผลเฉลย: $t_0 = 0$ และ $t_k = 1$

$$\text{ให้ } v = \int_0^x s \cos(x^2 y(s)) ds$$

$$y'(x) = 2x - \frac{1}{2}(\sin(x^4)) + x^2 \cdot v$$

เงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y(0) = 0$

ผลเฉลยที่แน่นอนคือ $y(x) = x^2$

แก้ปัญหโดยวิธี RSM ได้ผลเฉลยของปัญหอยู่ในตารางที่ 9 ผลเฉลยของวิธี RSM ใกล้เคียงกับผลเฉลยที่แน่นอน $y(x_n)$

ตารางที่ 9 แสดงผลเฉลยของวิธีนี้ y_n เปรียบเทียบกับผลเฉลยที่แน่นอน ($e_n = y_n - y(x_n)$)

x	$y(x_n)$	h = 0.05		h = 0.01	
		y_n	e_n	y_n	e_n
0.0	0	0	0.00e+000	0	0.00e+000
0.1	0.01	0.01000000	-2.48e-016	0.01000000	-2.60e-017
0.2	0.04	0.04000000	-1.11e-012	0.04000000	-6.05e-014
0.3	0.09	0.09000000	-1.14e-010	0.09000000	-5.29e-012
0.4	0.16	0.16000000	-2.86e-009	0.16000000	-1.26e-010
0.5	0.25	0.24999997	-3.44e-008	0.25000000	-1.47e-009
0.6	0.36	0.35999974	-2.60e-007	0.35999999	-1.09e-008
0.7	0.49	0.48999857	-1.43e-006	0.48999994	-5.93e-008
0.8	0.64	0.63999382	-6.18e-006	0.63999975	-2.55e-007
0.9	0.81	0.80997789	-2.21e-005	0.80999909	-9.07e-007
1	1.00	0.99993321	-6.68e-005	0.99999727	-2.73e-006

ตัวอย่าง 6 ปัญหาค่าเริ่มต้นกำหนดค่าต่าง ๆ ดังนี้

ผลเฉลย: $t_0 = 0$ และ $t_k = 1$

$$\text{ให้ } u'(x) = v + u(x) + \frac{1 - e^{x+1}}{x+1}$$

$$v = \int_0^1 e^{xt} u(t) dt$$

เงื่อนไขค่าเริ่มต้น $u(0) = 1$

ผลเฉลยที่แน่นอนคือ $u(x) = e^x$

แก้ปัญหโดยวิธี RSM ได้ผลเฉลยของปัญหอยู่ในตารางที่ 10 ผลเฉลยของวิธี RSM ใกล้เคียงกับผลเฉลยที่แน่นอน $y(x_n)$

ตารางที่ 10 แสดงผลเฉลยของวิธีนี้ y_n เปรียบเทียบกับผลเฉลยที่แม่นยำ ($e_n = y_n - y(x_n)$)

x	$y(x_n)$	h = 0.1		h = 0.01	
		y_n	e_n	y_n	e_n
0.0	1	1	0.00e+000	1	0.00e+000
0.1	1.10517092	1.10517101	8.77e-008	1.10517092	-7.47e-010
0.2	1.22140276	1.22140294	1.86e-007	1.22140276	-1.63e-009
0.3	1.34985881	1.34985912	3.14e-007	1.34985880	-2.64e-009
0.4	1.49182470	1.49182519	4.97e-007	1.49182469	-3.77e-009
0.5	1.64872127	1.64872204	7.71e-007	1.64872127	-5.00e-009
0.6	1.82211880	1.82211999	1.19e-006	1.82211879	-6.29e-009
0.7	2.01375271	2.01375454	1.83e-006	2.01375270	-7.58e-009
0.8	2.22554093	2.22554375	2.82e-006	2.22554092	-8.75e-009
0.9	2.45960311	2.45960743	4.32e-006	2.45960310	-9.62e-009
1	2.71828183	2.71828841	6.58e-006	2.71828182	-9.91e-009