บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาการแก้ปัญหาของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์โดยใช้วิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ใช้กฎของซิมป์สันในการแก้ปัญหาในส่วนที่เป็นปริพันธ์และปรับค่าเริ่มต้นที่ไม่ทราบค่าที่สอดคล้องกับค่าขอบด้วยวิธีของบรอยเดนนั้น ได้มีเอกสารบทความและงานวิจัย ซึ่งผู้วิจัยจะกล่าวรายละเอียดตามหัวข้อต่อไปนี้

1. การแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นโดยวิธีเชิงตัวเลข
2. การแก้สมการเชิงปริพันธ์
3. ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์
4. การแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์
5. เอกสารและบทความที่เกี่ยวข้อง

การแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นโดยวิธีเชิงตัวเลข

อำพล ธรรมเจริญ (2551) ปัญหาค่าเริ่มต้นซึ่งกำหนดโดยสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$$\mathbf{y}'=\mathbf{f}(x,\mathbf{y}) \quad , \quad x \ge x_0$$

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

เราจะหาผลเฉลย $\mathbf{y}(x)$ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไข ถ้าปัญหามีผลเฉลยฟังก์ชัน $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$ เป็นผลเฉลยที่แม่นตรง (Exact solution) ของปัญหา ในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เรากำหนดจุด $x_1, x_2, x_3, \ldots$ และหาค่าของ $\mathbf{y}(x_i), i = 1,2,3,\ldots$ เป็นผลเฉลย คือผลเฉลยจะเป็นตัวเลขซึ่งเป็นค่าฟังก์ชัน เราไม่ได้ค่าที่แท้จริง แต่จะได้เพียงค่าประมาณเท่านั้น

ทฤษฎีบท การมีผลเฉลยแน่นอนและมีเพียงผลเฉลยเดียว (The Existence and Uniquess) ถ้า $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง สำหรับ $a \le x \le b$ และทุกค่าของ y ถ้า $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ ทำให้เงื่อนไขของลิปชิตซ์ (Lipschitz Condition) เป็นจริง กล่าวคือ ถ้าสามารถหาค่าคงที่ $L > 0$ ที่ทำให้ $\|\mathbf{f}(x, y_1) - \mathbf{f}(x, y_2)\| \le L\|y_1 - y_2\|$ สำหรับ $a \le x \le b$ และทุกค่า y_1, y_2 แล้วปัญหาค่าเริ่มต้น $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ ที่มี $y = y_0$ เมื่อ $x = x_0$ จะมีผลเฉลยแน่นอนและมีเพียงผลเฉลยเดียว

ให้ y_i เป็นค่าประมาณของ $\mathbf{y}(x_i)$ เมื่อ $i = 1,2,3,\ldots$ จากที่กำหนดให้ เราได้ว่า $y_0 = y(x_0)$ เราจะหาสูตรเพื่อคำนวณค่าของ $y_1, y_2, y_3, \ldots$

วิธีของรุงเง-คุตตา

ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตา จัดได้ว่าเป็นระเบียบวิธีที่ได้รับความนิยมและใช้กันอย่างกว้างขวางโดยเฉพาะในการคำนวณที่ต้องการผลลัพธ์ ที่มีความเที่ยงตรงสูง แนวความคิดที่ใช้ในระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตานี้คือ การหาค่าความชันที่มีความเที่ยงตรงสูงเพื่อก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงตามมา สมการหลักที่ใช้ในการคำนวณผลลัพธ์ในระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตา คือ

$$y_{k+1} = y_k + \Phi(x_k, y_k, h) \cdot h \tag{2.1}$$

เมื่อ $\Phi(x_k, y_k, h)$ เรียกว่าฟังก์ชันส่วนเพิ่ม (Increment Function) คือ ความชันเฉลี่ยตลอดขนาดช่วงความกว้าง h ที่จะนำไปใช้ในการคำนวณหาส่วนที่เพิ่มขึ้นจากผลลัพธ์เดิม โดยที่ฟังก์ชันส่วนเพิ่มนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบโดยทั่วไปได้

$$\Phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + \ldots + a_n k_n \tag{2.2}$$

เมื่อ $a_i, i = 1, 2, 3, \ldots, n$ เป็นค่าคงที่ และ

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\ k_3 &= f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\ &\vdots \\ k_n &= f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-2,2} k_2 h + \ldots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h) \end{aligned} \tag{2.3}$$

เมื่อ n คือ อันดับที่ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่เลือกใช้ สำหรับค่า $k_i, i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ขึ้นอยู่กับฟังก์ชันของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่กำหนดให้ ส่วนค่า p และ q ต่างๆ เป็นค่าคงที่

ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสี่ (Fourth-Order Runge-Kutta Method) ถูกจัดว่าเป็นระเบียบวิธีที่ได้รับความนิยมใช้กัน โดยแพร่หลายโดยการดัดแปลงสมการ (2.1) ถึง (2.3) ที่อยู่ในรูปทั่วไปโดยใช้ $n = 4$ ทำให้เกิดสมการรุงเง-คุตตาอันดับสี่ ซึ่งให้ค่าคลาดเคลื่อนในรูปแบบของความกว้างช่วงอันดับสี่ $\mathbf{O}(h^4)$

รูปแบบทั่วไปของสมการรุงเง-คุตตาอันดับสี่ คือ

$$y_{i+1} = y_i + [\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)] \cdot h$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h) \\ k_3 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h) \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + k_3 h) \end{aligned}$$

โดยมีค่าความคลาดเคลื่อนเฉพาะที่เป็น $\mathbf{O}(h^5)$ และค่าความคลาดเคลื่อนทั้งหมดจะเป็น $\mathbf{O}(h^4)$ ในงานวิจัยนี้ได้มีการดัดแปลงสมการรุงเง-คุตตาอันดับสี่ เพื่อนำค่า $y(\frac{x_i + x_{i+1}}{2})$ ไปใช้ในการหาค่าส่วนที่เป็นปริพันธ์โดยใช้กฎของซิมป์สันตามทฤษฎีค่าระหว่างกลาง ซึ่งจะเห็นว่า $K(x,t,\mathbf{Y}'(t))$ มีฟังก์ชันไม่ทราบค่าในปริพันธ์นั้นด้วย ดังนั้นรูปทั่วไปของสมการรุงเง-คุตตาอันดับสี่ที่ใช้ในงานวิจัยมีลักษณะดังนี้

$$\left.\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + [\frac{1}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)]\cdot h \\ y_{i+1/2} &= y_i + [\frac{1}{8}(2f_1 + f_2 + f_3)]\times h \end{aligned}\right\} \quad (2.4)$$

แทนค่า $y(x_i) = y_i, y(x_{i+1}) = y_{i+1}$ และ $y(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}) = y(x_i + \frac{h}{2}) = y_{i+1/2}$

สำหรับสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์แบบวอลแตร์ราจะมีลักษณะ ดังนี้

เมื่อ
$$\left.\begin{aligned} f_1 &= f\left(x_i, y_i, K(x_{i-1}, t_{i-1}, \mathbf{Y}'(t_{i-1}))\right) \\ f_2 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}f_1 h, K(x_{i-1} + \frac{1}{2}h, t_{i-1} + \frac{1}{2}h, \mathbf{Y}'(t_{i-1} + \frac{1}{2}h)) + \frac{1}{2}(g_1 + g_2)\frac{h}{2}) \\ f_3 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}f_2 h, K(x_{i-1} + \frac{1}{2}h, t_{i-1} + \frac{1}{2}h, \mathbf{Y}'(t_{i-1} + \frac{1}{2}h)) + \frac{1}{2}(g_1 + g_3)\frac{h}{2}) \\ f_4 &= f(x_i + h, y_i + f_3 h, K(x_i, t_i, \mathbf{Y}'(t_i)) + \frac{1}{2}(g_1 + 2(g_2 + g_3) + g_4)\frac{h}{3}) \end{aligned}\right\} \quad (2.5)$$

จะเห็นว่า g_1, g_2, g_3 และ g_4 ได้นำมาใช้ในวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่ ซึ่งเกิดจากการดัดแปลงกฎของซิมป์สันเพื่อนำไปใช้ให้สอดคล้องกับวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่นั่นเอง

สำหรับสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์แบบเฟรดโฮล์มจะมีลักษณะ ดังนี้

เมื่อ
$$\left.\begin{aligned} f_1 &= f\left(x_i, y_i, K(x, t_{i-1}, \mathbf{Y}'(t_{i-1}))\right) \\ f_2 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}f_1 h, K(x, t_{i-1} + \frac{1}{2}h, \mathbf{Y}'(t_{i-1} + \frac{1}{2}h))) \\ f_3 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}f_2 h, K(x, t_{i-1} + \frac{1}{2}h, \mathbf{Y}'(t_{i-1} + \frac{1}{2}h))) \\ f_4 &= f(x_i + h, y_i + f_3 h, K(x, t_i, \mathbf{Y}'(t_i))) \end{aligned}\right\} \quad (2.6)$$

วิธีหาผลเฉลยในช่วงที่กำหนด

ในการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นโดยให้ผลเฉลยอยู่ภายในช่วงที่กำหนด สมมุติว่าเป็นช่วง $[a,b]$ โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น $y(a) = y_0$ เราจะแบ่งช่วงออกเป็น n ช่วงย่อย เท่า ๆ กัน แต่ละช่วงกว้าง h โดยที่ $h := \frac{b-a}{n}$ ให้ $x_0 := a$ เราจะได้ $x_{i+1} = x_i + h, i = 0,1,2,\ldots,n-1$ และได้ $x_n = b$ คำนวณค่า y_{i+1} ดังสูตร (2.1) ทุกค่าของ i ก็จะได้ผลเฉลยตามต้องการ

<u>ขั้นตอนวิธี</u> กำหนดให้ปัญหาค่าเริ่มต้นมีสมการและเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น

$y = f(x, y), a \le x \le b$ และ $y(a) = y_0$

1. กำหนดค่า n ที่เหมาะสม ให้ $x_0 := a,$ และ $h := \frac{b-a}{n}$ (ค่า h ควรน้อยกว่า 1)

2. สำหรับ $i = 0,1,2,\ldots,n-1$ คำนวณค่า

$$y_{i+1} = y_i + [\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)] \cdot h, i = 0,1,2,3,\ldots$$

การแก้สมการเชิงปริพันธ์

กฎของซิมป์สัน (Simpson's rule)

กฎของซิมป์สันหาค่าปริพันธ์ โดยใช้พหุนามดีกรีสองที่ผ่านจุดสามจุดประมาณค่าของฟังก์ชันแล้วหาค่าปริพันธ์ของพหุนามดีกรีสองนั้น สูตรจะเป็นดังนี้

$$A_i = \frac{h_i}{6}[f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-1} + \frac{h_i}{2}) + f(x_i)] \tag{2.7}$$

มีค่าคลาดเคลื่อนเป็น

$$E_i = -\frac{f^{(iv)}(\eta_i)(x_i - x_{i-1})^5}{2880}, x_{i-1} < \eta_i < x_i$$

แสดงการหาสูตรได้ดังนี้ เพื่อความสะดวก ให้ $a = x_{i-1}$, $b = x_i$ และ $c = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_{i-1} + \frac{h_i}{2}$ เมื่อ $h_i = x_i - x_{i-1}$ พหุนามดีกรีสองผ่านจุด $(a, f(a)), (b, f(b))$ และ $(c, f(c))$ มีสมการเป็น

$$p_2(x) = A + B(x-a) + C(x-a)(x-c)$$

เมื่อ $A = f(a), B = f[a,c] = \frac{2(f(c) - f(a))}{b-a}$ และ $C = f[a,c,b] = \frac{2[f(a) - 2f(c) + f(b)]}{(b-a)^2}$

หาค่าปริพันธ์ได้

$$\begin{aligned}\int_a^b p_2(x)dx &= A(b-a) + \frac{B(b-a)^2}{2} + \frac{C(b-a)^3}{12} \\ &= f(a)(b-a) + 2[f(c) - f(a)]\frac{(b-a)^2}{2(b-a)} + 2[f(a) - 2f(c) + f(b)]\frac{(b-a)^3}{12(b-a)^2} \\ &= \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + 4f(c) + f(b)\right]\end{aligned}$$

ได้ตามสูตรดัง (2.7)

<u>ขั้นตอนวิธี</u> ต้องการหาค่า $\int_a^b f(x)dx$

1. แบ่งช่วง $[a,b]$ เป็น n ช่วงเท่า ๆ กัน ให้ $h := \frac{b-a}{n}$ และ $x := a$

2. คำนวณค่าปริพันธ์ ให้ $y := \frac{[f(a)+4f(c)+f(b)]}{6}$ สำหรับ $i = 0,1,2,\dots,n-1$

ให้ $x := x+h$ และ $y := y+f\left(x\right)$

3. ให้ $A := yh$

ค่า A จะเป็นค่าปริพันธ์ตามต้องการ ซึ่งในงานวิจัย $K(x,t,\mathbf{Y}'(t))$ เป็นเคอร์เนลของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์จะเห็นว่า $\mathbf{Y}'(t) = (\mathbf{y}^{(n)}(t), \mathbf{y}^{(n-1)}(t), \dots, \mathbf{y}'(t), \mathbf{y}(t))$ อยู่ในส่วนที่เป็นปริพันธ์จึงทำให้มีการดัดแปลงกฎของซิมป์สันเพื่อหาค่าปริพันธ์ มีขั้นตอนดังนี้

<u>ขั้นตอนวิธี</u> ต้องการหาค่า $\int_a K(x,t,\mathbf{Y}'(t))dt \quad a \le x \le b\ ,\ a \le t \le b$

1. แบ่งช่วง $[a,b]$ เป็น n ช่วงเท่า ๆ กัน ให้ $h := \frac{b-a}{n}$ และ $t := a$

2. กำหนดค่า $k_1 = K(x,t_{i-1},\mathbf{Y}'(t_{i-1}))$, $k_2 = K(x,t_{i-1}+\frac{h_i}{2},\mathbf{Y}'(t_{i-1}+\frac{h_i}{2}))$ และ

$k_3 = K(x,t_i,\mathbf{Y}'(t_i))$

3. คำนวณค่าปริพันธ์ ให้ $K := \frac{[k_1+4k_2+k_3]}{6}$ สำหรับ $i = 0,1,2,\dots,n-1$

ให้ $t := t+h$ และ $A := A+K(x,t,\mathbf{Y}'(t))$

4. ให้ $A := Kh$

ในการดัดแปลงกฎของซิมป์สันเพื่อให้เหมาะสมในการใช้งานวิจัยนี้ มีสูตรดังนี้

$$A_i = \frac{h_i}{6}\left[k_1+4k_2+k_3\right] \tag{2.8}$$

และเนื่องจากส่วนที่เป็นปริพันธ์แบบวอลแตร์รา เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องของ x บนช่วงปิด $[a,x]$ โดย x เป็นตัวไม่ทราบค่าและ a เป็นค่าคงที่ ค่าของปริพันธ์ยังคงเปลี่ยนแปลงไปตามค่า x จึงนำ $K(x,t,\mathbf{Y}'(t))$ ดัดแปลงตามกฎของซิมป์สันให้สอดคล้องกับระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่เพื่อนำไปคำนวณค่าในระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่ มีวิธีการดังนี้

$$\left.\begin{aligned}
g_1 &= K(x_i+h_i,t_i,y_i)\\
g_2 &= K(x_i+h_i,t_i+\frac{1}{2}h_i,y_i+\frac{1}{2}f_1)\\
g_3 &= K(x_i+h_i,t_i+\frac{1}{2}h_i,y_i+\frac{1}{2}f_2)\\
g_4 &= K(x_i+h_i,t_i+h_i,y_i+f_3)
\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

และในขั้นตอนวิธีข้อ 2 สำหรับแบบวอลแตร์ราในการกำหนดค่า x จึงมีการปรับเปลี่ยนตามดังนี้

$k_1 = K(x_{i-1},t_{i-1},\mathbf{Y}'(t_{i-1}))$, $k_2 = K(x_{i-1}+\frac{h_i}{2},t_{i-1}+\frac{h_i}{2},\mathbf{Y}'(t_{i-1}+\frac{h_i}{2}))$ และ

$k_3 = K(x_i,t_i,\mathbf{Y}'(t_i))$ ด้วย

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

อำพล ธรรมเจริญ (2551) ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้แก้ปัญหาค่าขอบมีหลายวิธี แต่ละวิธีมีข้อดีและข้อเสียแตกต่างกัน เช่น วิธีผลต่างจำกัด วิธีฟังก์ชันประมาณค่าและวิธียิงเป้า

วิธีผลต่างจำกัด (Finite-Difference Method) มีวิธีการและแนวคิด คือ แบ่งช่วงที่จะหาผลเฉลยเป็น n ช่วงเท่าๆ กัน ด้วยจุด $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ (แต่ละช่วงมีความกว้างเท่ากับ h) แล้วแทนค่าอนุพันธ์ที่จุดต่าง ๆ ด้วยค่าประมาณในรูปสมการผลต่าง ผลที่ได้คือ สมการผลต่างซึ่งจะเป็นระบบสมการพีชคณิต เมื่อหาผลเฉลยของระบบสมการนี้ได้ ก็จะได้ผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาค่าขอบตามต้องการ ในการประมาณค่าอนุพันธ์เรามักใช้สูตรผลต่างส่วนกลางและสูตรสี่เหลี่ยมคางหมู ซึ่งเป็นวิธีการอันดับสอง

สำหรับวิธีผลต่างจำกัดสามารถใช้ได้กับปัญหาที่มีสมการเชิงอนุพันธ์เป็นแบบเชิงเส้น แม้จะสามารถใช้กับปัญหาที่มีกับปัญหาที่มีสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นได้ แต่มีความยุ่งยากในการแก้สมการพีชคณิตขนาดใหญ่ที่ไม่เป็นแบบเชิงเส้น และสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอันดับสูง (สูงกว่าอันดับสอง) หรือระบบสมการเชิงอนุพันธ์ขนาดใหญ่ ความยุ่งยากในการแก้ระบบสมการพีชคณิตก็เพิ่มขึ้นหลายเท่า ค่าคลาดเคลื่อนจากวิธีนี้โดยปกติมีค่าสูง

วิธีฟังก์ชันประมาณค่า (Collocation Method) มีแนวคิดคือ เราจะประมาณค่าของผลเฉลยด้วยฟังก์ชันที่เหมาะสมตลอดช่วงที่จะหาผลเฉลย ฟังก์ชันที่จะประมาณค่าผลเฉลยต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขค่าขอบด้วย สำหรับวิธีฟังก์ชันประมาณค่า มักจะใช้กับปัญหาที่มีสมการเชิงอนุพันธ์เป็นแบบเชิงเส้น ค่าคลาดเคลื่อนมักมีสูงเพราะมีข้อจำกัดเกี่ยวกับฟังก์ชันประมาณค่าที่ใช้

วิธียิงเป้า (Shooting Method) มีหลักการง่าย ๆ คือ เราสมมุติเงื่อนไขเริ่มต้นที่ขาดหายไปแล้วดำเนินการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น จะได้ค่าที่จุดปลายสุดซึ่งอาจจะไม่ตรงกับเงื่อนไขแล้วกระทำการเปลี่ยนค่าจุดเริ่มต้น เพื่อให้ค่าที่จุดปลายสอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนด หลักการดังกล่าวเหมือนกับการยิงเป้า คือ เราปรับทิศทางที่จุดเริ่มต้นโดยเล็งไปที่เป้า เมื่อยิงไปแล้วไม่ถูกเป้าก็ต้องปรับทิศทางใหม่จนกว่าจะยิงถูกเป้า

ปัญหาสมการค่าขอบ
$$\mathbf{y}'(t) = f(\mathbf{y}, t), \quad t_0 \le t \le t_k$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{y}(t_0), \mathbf{y}(t_1), \ldots, y(t_k)) = \mathbf{0}$$

สามารถพิจารณาเป็นปัญหาค่าเริ่มต้น
$$\mathbf{y}'(t) = f(\mathbf{y}, t), \quad t_0 \le t \le t_k$$
$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{z}$$

เมื่อ $\mathbf{z}$ เป็นรากของสมการ

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}, \mathbf{y}(t_1), \ldots, \mathbf{y}(t_k)) = \mathbf{0}$$

ถ้าสมการสุดท้ายมีผลเฉลย ก็จะเป็นผลเฉลยของสมการแรกด้วย

วิธียิงเป้ามีกระบวนการดังนี้

1. กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{z}$ ให้ครบทุกตัวแปร แล้วแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ (วิธีแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น เช่น วิธีของรุงเง-คุตตาหรือวิธีของเทย์เลอร์) จะได้ค่าของตัวแปรที่จุดต่าง ๆ คือได้ $\mathbf{y}(t_1),\ldots,\mathrm{y}(t_k)$

2. ตรวจว่าค่าที่ได้สอดคล้องกับเงื่อนไขที่จุดปลาย (หรือสมการ) หรือไม่ หยุดกระทำต่อถ้าค่าคลาดเคลื่อนน้อยเป็นที่พอใจ ถ้ายังมีค่าคลาดเคลื่อนสูงให้ทำต่อ

3. ปรับค่าเริ่มต้นโดยวิธีที่เหมาะสม เช่น วิธีของนิวตันหรือวิธีของบรอยเดน เป็นต้น ที่จะทำให้ได้ค่าเริ่มต้นที่ลู่เข้าสู่ค่าเริ่มต้นที่เป็นผลเฉลย

วิธีแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นดังในข้อ 1 มีหลายวิธี ที่นิยมใช้กันคือ วิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่ ซึ่งมีค่าคลาดเคลื่อนเป็นอันดับ 4 ในบางปัญหาวิธีของเทย์เลอร์อันดับสี่ ซึ่งมีค่าคลาดเคลื่อนอันดับเดียวกันอาจนำมาใช้ได้สะดวกกว่าแต่ต้องใช้การหาอนุพันธ์

สำหรับวิธีการยิงเป้ามีข้อดีหลายข้อ ข้อหนึ่งใช้ได้ดีกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่เป็นแบบเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้นกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีขนาดใหญ่ โดยที่ไม่ยุ่งยากมากนัก และอีกข้อหนึ่งคือค่าคลาดเคลื่อนน้อย เพราะว่าสามารถใช้ระเบียบวิธีแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นที่มีประสิทธิภาพได้ เช่น วิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่ หรือวิธีตัวทำนาย-ตัวแก้) ข้อเสีย คือ อาจไม่ลู่เข้าและไม่สามารถบอกได้แน่นอนว่าจะลู่เข้าหรือไม่

ดังนั้นปัญหาค่าขอบสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีตัวแปรเดียวจะต้องเป็นอันดับสองขึ้นไปหรือถ้าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งก็ต้องมีตัวแปรตามอย่างน้อยสองตัว และสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง จำนวนเงื่อนไขต้องมีเท่ากับจำนวนตัวแปรตาม มิฉะนั้นอาจไม่ได้ผลเฉลย ถ้าจำนวนเงื่อนไขมากเกินไปก็อาจจะไม่มีผลเฉลย และถ้าจำนวนเงื่อนไขน้อยเกินไปก็อาจจะหาผลเฉลยเฉพาะรายไม่ได้

การแก้ระบบสมการ

ระบบสมการที่เราจะหาผลเฉลยมีรูปแบบเป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ $\mathbf{F(x)} = \mathbf{0}$

$$\text{เมื่อ} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \ \text{และ} \ \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

สมมุติจุด z ที่มีสมบัติว่า $\mathbf{g}(\mathrm{z}) = \mathrm{z}$ เราเรียกว่าเป็น จุดตรึง (Fixed point) ของฟังก์ชัน $\mathbf{g}$ ดังนั้น วิธีการที่จะหารากของสมการ $\mathbf{F(x)} = \mathbf{0}$ โดยการแปลงสมการในแบบ $\mathbf{x} = \mathbf{g(x)}$ แล้วหาจุดตรึงของ $\mathbf{g}$ เรียกว่าวิธีซ้ำเดิมโดยจุดตรึง (Fixed point Iteration)

ทฤษฎีบท ถ้าฟังก์ชัน $\mathbf{g}: R^n \rightarrow R^n$ ส่งจุดในเซตปิด S ไปยังตัวมันเอง คือ ถ้า $\mathbf{x}$ เป็นสมาชิกของ S แล้ว $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ จะเป็นสมาชิกของ S ด้วยและ $\mathbf{g}$ มีสมบัติหดตัว (Contractive) บน S กล่าวคือ $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})-\mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ สำหรับทุก ๆ จุด $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ และ $K<1$ แล้ว (1) ถ้าจุดเริ่มต้น $\mathbf{x}_0$ อยู่ใน S แล้ว ลำดับ $\{\mathbf{x}_i \mid \mathbf{x}_i=\mathbf{g}(\mathbf{x}_{i-1}), i=1,2,3,\ldots\}$ จะลู่เข้าหาจุด z ใน S และ (2) จุด z จะเป็นจุดตรึงของฟังก์ชัน $\mathbf{g}$ และมีเพียงจุดเดียว คือ มีจุด z จุดเดียวใน S ซึ่ง $\mathbf{g}(z)=z$

วิธีปรับค่าเริ่มต้นเราใช้วิธีการแก้ระบบสมการมาใช้ กล่าวคือ เรามองว่าค่าของตัวแปรที่จุดแรกเป็นตัวแปรต้น และค่าของตัวแปรที่จุดอื่น ๆ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรที่จุดเริ่มต้น ซึ่งยังไม่ทราบค่า ดังนั้นปัญหาจึงเป็นการแก้สมการแบบหนึ่งนั่นเอง โดยมีตัวแปรที่จุดต้นเป็นตัวไม่ทราบค่า

วิธีแก้ระบบสมการไม่เชิงเส้นที่นิยมใช้มีวิธีของนิวตัน ซึ่งมีอันดับการลู่เข้าเป็นอันดับสองและวิธีของบรอยเดนซึ่งมีอันดับการลู่เข้าเป็นแบบเหนือเชิงเส้น คือสูงกว่าอันดับหนึ่ง แต่น้อยกว่าอันดับสอง วิธีของนิวตันลู่เข้าเร็วกว่าวิธีของบรอยเดน แต่กระทำยากกว่าและใช้แรงงานมากกว่า

วิธีของบรอยเดน (Broyden's Methods)

วิธีของบรอยเดนเป็นส่วนหนึ่งของวิธีที่ชื่อว่า วิธีกึ่งนิวตัน (Quasi-Newton methods) ในวิธีของบรอยเดนเรากระทำเช่นเดียวกับวิธีของนิวตัน แต่จะประมาณค่าของเมทริกซ์ $[\mathbf{F}'(\mathbf{x}_i)]$ โดยเมทริกซ์ $B(\mathbf{x})$ โดยกำหนดเมทริกซ์เริ่มต้น B_0 และเปลี่ยนเมทริกซ์ในแต่ละขั้นโดยสูตร

$$B_{i+1}=B_i+\frac{1}{a_i}\mathbf{F}(\mathbf{x}_{i+1})\mathbf{b}_i^T, i=0,1,2,3,\ldots \tag{2.10}$$

เมื่อ $\mathbf{b}_i=\mathbf{x}_{i+1}-\mathbf{x}_i$ และ $a_i=\mathbf{b}_i^T\mathbf{b}_i$

จะเห็นว่าวิธีของบรอยเดนไม่ต้องหาอนุพันธ์ จึงกระทำได้ง่ายกว่าและใช้แรงงานน้อยกว่าวิธีของนิวตัน อย่างไรก็ดี ทั้งสองวิธีอาจจะได้ลำดับที่ไม่ลู่เข้า ซึ่งขึ้นกับจุดเริ่มต้นที่กำหนด

เอกสารและบทความที่เกี่ยวข้อง

อรรฆพร ประชานุรักษ์ (2550) ศึกษาการแก้ปัญหาสมการค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญด้วยวิธียิงเป้าโดยใช้วิธีของเทย์เลอร์อันดับสี่ ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นและใช้วิธีของบรอยเดนในการปรับค่าเริ่มต้นให้สอดคล้องกับเงื่อนไขค่าขอบ ผลปรากฏว่าวิธีของบรอยเดนใช้ได้ดีกับปัญหาค่าขอบที่มีสมการเชิงอนุพันธ์เป็นแบบเชิงเส้น แต่สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้นวิธีของบรอยเดนใช้ได้ถ้าเงื่อนไขค่าขอบเป็นแบบปรกติและใช้ไม่ได้ถ้าเงื่อนไขแบบสมการ

อะริโกกลุ และออสโกล (2005) ศึกษาวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในการหาผลเฉลยสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์ทั้งแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นที่มีเงื่อนไขค่าขอบ ซึ่งได้แนะนำและพิสูจน์ทฤษฎีใหม่ของวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในการเปลี่ยนรูปสมการเชิงปริพันธ์และแสดงว่ามีการลู่เข้าสู่คำตอบได้อย่างรวดเร็ว แม่นยำ และเป็นวิธีการที่ใช้เวลาและแรงงานน้อยแต่มีประสิทธิภาพสำหรับการหาผลเฉลยสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์ในช่วงปิดโดเมน

อะมินิขา และเบียซาร์ (2009) ได้ศึกษาการแก้ปัญหาสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์อันดับสูงมีรูปแบบดังนี้

$$y^{n}(x) + f(x)g(x) + \int_{0}^{x} k(x,t)y(t)dt = g(x)$$

และเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y(0) = \alpha_0, y'(0) = \alpha_1, \ldots, y^{(n)}(0) = \alpha_n$

เรียกว่าวิธีใหม่ฮอมอโทปีเพอร์เทอร์เบชัน (NHPM) ประสบผลสำเร็จในการหาผลเฉลยของสมการซึ่งเปรียบเทียบกับฟังก์ชันฐานเรเดียล (RBF), วิธีฮอมอโทปีเพอร์เทอร์เบชัน (HPM), วิธีพหุนามเทย์เลอร์ (TPM) ในวิธีใหม่ฮอมอโทปีเพอร์เทอร์เบชันมีผลเฉลยที่แม่นตรงในขณะที่วิธีอื่น ๆ ไม่สามารถให้ผลเฉลยที่แม่นตรงได้

มอแฮมมัด และซามอรัด (2005) ศึกษาวิธีแบ่งช่วงประมาณค่าของทอในการสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เฟรดโฮล์มแบบเชิงเส้นมีรูปทั่วไป

$$Dy(x) - \lambda \int_{a}^{b} k(x,t)y(t)dt = f(x), x \in [a,b]$$

ในวิธีนี้ใช้การแทนที่เมทริกซ์ดำเนินการในส่วนที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์และดำเนินการด้วยวิธีของทอ ซึ่งสามารถนำไปใช้ประโยชน์สำหรับการแก้ปัญหาในช่วงกว้าง ๆ ได้อย่างดีและขั้นตอนง่ายในวิธีการเป็นช่วง ๆ ของทอหรือการแยกออกเป็นส่วนของทอแสดงให้เห็นการทำให้เกิดผลสำเร็จและความแม่นยำของวิธีนี้ สำหรับตัวอย่างที่มีดีกรีแตกต่างกัน ทำให้ได้ผลเฉลยที่มีค่าคลาดเคลื่อนจากค่าจริงน้อยมาก ซึ่งเป็นวิธีที่ดีวิธีหนึ่ง แต่ไม่สามารถหาครั้งเดียวทั้งหมดได้