บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

ในบทนี้จะนำเสนอขั้นตอนในการดำเนินการวิจัยอย่างสังเขป โดยเริ่มด้วยการกล่าวนำถึงระบบพลวัตที่ใช้ทำการวิจัย ซึ่งประกอบด้วยระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงเป็นค่าคงตัวและระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วง 2 ตัว พร้อมทั้งขั้นตอนการสร้างเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบทั้งสอง

การหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอล ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอน ดังนี้

1. ค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องซึ่งได้กล่าวแล้วในบทที่ 2
2. สร้างฟังก์ชันไลปูนอฟเพื่อให้ได้เงื่อนไขใหม่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสำหรับการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงเป็นค่าคงตัว
3. หาตัวอย่างเพื่อแสดงว่าเงื่อนไขที่ค้นพบสามารถนำไปใช้ได้จริงโดยใช้กระบวนการหาค่าคอนเวกซ์ที่เหมาะสมที่สุด (convex optimization algorithms) ในการหาเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ได้
4. สร้างฟังก์ชันไลปูนอฟเพื่อให้ได้เงื่อนไขใหม่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสำหรับการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วง 2 ตัว
5. หาตัวอย่างเพื่อแสดงว่าเงื่อนไขที่ค้นพบในข้อ 4 สามารถนำไปใช้ได้จริงโดยกระบวนการหาค่าคอนเวกซ์ที่เหมาะสมที่สุดในการหาเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ได้

ระบบนิวทรอลที่ใช้ในการศึกษา

ระบบนิวทรอลที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้เป็นระบบที่ถูกศึกษาโดย Li and Liu (2009) ซึ่งเป็นระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงเป็นค่าคงตัว ที่มีรูปแบบ คือ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \overline{A}x(t) + \overline{B}x(t-\tau) + \overline{C}\dot{x}(t-\tau) \quad ,t > 0 \\ x(t_0+\theta) = \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0] \end{cases} \tag{3.1}$$

โดยที่ $x(t) \in \Re^n$ เป็นเวกเตอร์สถานะ

$\overline{A}, \overline{B}, \overline{C} \in \Re^{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ค่าคงตัว

$\tau > 0$ เป็นตัวหน่วงค่าคงตัว

$\|\overline{C}\| < 1$ และ $\phi(\cdot)$ คือ เงื่อนไขเริ่มต้น โดยเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้บนช่วง $[-\tau,0]$

จากงานวิจัยของ Li and Liu (2009) ได้นำเสนอเงื่อนไขการมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงเป็นค่าคงตัว โดยประยุกต์สูตรไลนิช-นิวตัน อสมการของ park และทฤษฎีไลปูนอฟในการหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพ ซึ่งเงื่อนไขที่ได้ยังมีข้อด้อยในเรื่องความเร็วของการลู่เข้าสู่คำตอบ ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงต้องการหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพที่สามารถลู่เข้าสู่คำตอบได้เร็วขึ้นในขณะที่ค่าขอบเขตบนของตัวหน่วงเท่ากัน โดยมีการประยุกต์ใช้อสมการปริพันธ์และสร้างฟังก์ชันไลปูนอฟใหม่เพื่อให้ได้มาซึ่งเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง นอกจากนั้นในงานวิจัยนี้ยังได้ศึกษาระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วง 2 ตัว ที่มีรูปแบบ คือ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \overline{A}x(t) + \overline{B}x(t-h(t)) + \overline{C}\dot{x}(t-\tau) \quad ,t>0 \\ x(t_0+\theta) = \phi(\theta), \quad \forall\theta\in[-\max\{\tau,h_2\},0] \end{cases} \tag{3.2}$$

โดยที่ $x(t)\in\Re^n$ เป็นเวกเตอร์สถานะ

$\overline{A},\overline{B},\overline{C}\in\Re^{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ค่าคงตัว

$\tau>0$ เป็นตัวหน่วงค่าคงตัว

$\|\overline{C}\| < 1$ และ $\phi(\cdot)$ คือ เงื่อนไขเริ่มต้น โดยเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้บนช่วง $[-\max\{\tau,h_2\},0]$

$h(t)$ เป็นตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลาซึ่งมีเงื่อนไขดังนี้

$$0\le h_1\le h(t)\le h_2,\ \ \dot{h}(t)\le\mu<1$$

h_1,h_2,μ เป็นค่าคงตัว

โดยการประยุกต์สูตรไลนิช-นิวตัน อสมการของ park อสมการปริพันธ์ อสมการปริพันธ์ทฤษฎีไลปูนอฟ และสร้างฟังก์ชันไลปูนอฟอันใหม่เพื่อการหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่ มีตัวหน่วง 2 ตัว

การมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงเป็นค่าคงตัว

ในการหาเงื่อนไขที่เพียงพอต่อการมีเสถียรภาพของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงเป็นค่าคงตัว τ ดังระบบสมการ (3.1)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \overline{A}x(t) + \overline{B}x(t-\tau) + \overline{C}\dot{x}(t-\tau) \ , t > 0 \\ x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0] \end{cases} \tag{3.1}$$

สามารถหาได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. เปลี่ยนตัวแปร โดยกำหนดให้ $z(t) = e^{\alpha t}x(t),\ \alpha > 0$ และหาอนุพันธ์เทียบกับเวลา จะได้

$$\dot{z}(t) = e^{\alpha t}\dot{x}(t) + \alpha e^{\alpha t}x(t)$$

และจากสมการ $\dot{x}(t) = \overline{A}x(t) + \overline{B}x(t-\tau) + \overline{C}\dot{x}(t-\tau)$ จะได้สมการที่สมมูลกับสมการ (3.1) คือ

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-\tau) + C\dot{z}(t-\tau)$$

โดยที่ $A = (\overline{A} + \alpha I),\ B = e^{\alpha\tau}(\overline{B} - \alpha\overline{C}), C = \overline{C}e^{\alpha\tau}$

2. สร้างฟังก์ชันไลปูนอฟ

$$V(z_t) = \sum_{i=1}^{6} V_i(z_t)$$

โดยที่

$$V_1(z_t) = z^T(t)Pz(t)$$

$$V_2(z_t) = \int_{-\tau}^{0}\int_{t+\beta}^{t} \dot{z}^{\mathrm{T}}(s)B^{\mathrm{T}}XB\dot{z}(s)dsd\beta$$

$$V_3(z_t) = \int_{t-\tau}^{t} z^{\mathrm{T}}(s)Q_1 z(s)ds$$

$$V_4(z_t) = \int_{t-\tau}^{t} \dot{z}^{\mathrm{T}}(s)Q_2 \dot{z}(s)ds$$

$$V_5(z_t) = \tau\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\beta}^{t} z^{\mathrm{T}}(s)R_1 z(s)dsd\beta$$

$$V_6(z_t) = \tau\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\beta}^{t} \dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_2 \dot{z}(s)dsd\beta$$

3. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันไลปูนอฟเทียบกับเวลาได้ดังนี้

$$\dot{V}_1(z_t) = \dot{z}^T(t)Pz(t) + z^{\mathrm{T}}(t)P\dot{z}(t)$$
$$= 2z^{\mathrm{T}}(t)P\dot{z}(t)$$
$$\dot{V}_2(z_t) = \tau\, \dot{z}^{\mathrm{T}}(t)B^{\mathrm{T}}XB\dot{z}(t) - \int_{t-\tau}^{t} \dot{z}^{\mathrm{T}}(s)B^{\mathrm{T}}XB\dot{z}(s)ds$$
$$\dot{V}_3(z_t) = z^{\mathrm{T}}(t)Q_1 z(t) - z^{\mathrm{T}}(t-\tau)Q_1 z(t-\tau)$$
$$\dot{V}_4(z_t) = \dot{z}^{\mathrm{T}}(t)Q_2 z(t) - \dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)Q_2 \dot{z}(t-\tau)$$
$$\dot{V}_5(z_t) = \tau^2\, z^{\mathrm{T}}(t)R_1 z(t) - \tau \int_{t-\tau}^{t} z^{\mathrm{T}}(s)R_1 z(s)ds$$
$$\dot{V}_6(z_t) = \tau^2\, \dot{z}^{\mathrm{T}}(t)R_2 \dot{z}(t) - \tau \int_{t-\tau}^{t} \dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_2 \dot{z}(s)ds$$

และใช้เทคนิคการประมาณค่าตามทฤษฎีที่เกี่ยวข้องในบทที่ 2 เพื่อหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

4. หาตัวอย่างเพื่อตรวจสอบเงื่อนไขที่หามาได้ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นว่าสามารถนำไปใช้ได้จริง โดยใช้ LMI Toolbox ใน MATLAB ในการหาคำตอบ

การมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วง 2 ตัว

ในการหาเงื่อนไขที่เพียงพอต่อการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วง 2 ตัว คือ τ และ $h(t)$ ดังระบบสมการ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \overline{A}x(t) + \overline{B}x(t-h(t)) + \overline{C}\dot{x}(t-\tau) \;\; ,t > 0 \\ x(t_0+\theta) = \phi(\theta), \quad \forall\theta \in [-\max\{\tau, h_2\}, 0] \end{cases} \tag{3.2}$$

สามารถหาได้โดยการดำเนินการตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. เปลี่ยนตัวแปร โดยกำหนดให้ $z(t) = e^{\alpha t}x(t),\ \alpha > 0$ และหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาจะได้

$$\dot{z}(t) = e^{\alpha t}\dot{x}(t) + \alpha e^{\alpha t}x(t)$$

และจากสมการ $\dot{x}(t) = \overline{A}x(t) + \overline{B}x(t-h(t)) + \overline{C}\dot{x}(t-\tau)$ จะได้

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h(t)) - Cz(t-\tau) + D\dot{z}(t-\tau)$$

โดยที่ $A = (\overline{A} + \alpha I), B = \overline{B}e^{\alpha h(t)},\ C = \alpha e^{\alpha\tau}\overline{C},\ D = \overline{C}e^{\alpha\tau}$

2. สร้างฟังก์ชันไลปูนอฟ

$$V(z_t) = \sum_{i=1}^{8} V_i(z_t)$$

โดยที่

$$V_1(z_t) = z^T(t)Pz(t)$$

$$V_2(z_t) = \frac{1}{1-\mu}\int_{t-h(t)}^{t}(h(t)-t+s)\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)B^{\mathrm{T}}XB\dot{z}(s)ds$$

$$V_3(z_t) = \int_{t-h(t)}^{t} z^{\mathrm{T}}(s)Q_1 z(s)ds$$

$$V_4(z_t) = \int_{t-\tau}^{t} z^{\mathrm{T}}(s)Q_2 z(s)ds$$

$$V_5(z_t) = \int_{t-\tau}^{t} \dot{z}^{\mathrm{T}}(s)Q_3 \dot{z}(s)ds$$

$$V_6(z_t) = h_1 \int_{-h_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R\dot{z}(s)dsd\theta$$

$$V_7(z_t) = h_2 \int_{-h_2}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R\dot{z}(s)dsd\theta$$

$$V_8(z_t) = (h_2 - h_1)\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+\theta}^{t} \dot{z}^{\mathrm{T}}(s)T\dot{z}(s)dsd\theta$$

3. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันไลปูนอฟเทียบกับเวลาได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(z_t) &= \dot{z}^T(t)Pz(t) + z^{\mathrm{T}}(t)P\dot{z}(t) \\
&= 2z^{\mathrm{T}}(t)P\dot{z}(t)
\end{aligned}$$

$$\dot{V}_2(z_t) = \frac{h(t)}{1-\mu}\dot{z}^{\mathrm{T}}(t)B^{\mathrm{T}}XB\dot{z}(t) - \frac{(1-\dot{h}(t))}{1-\mu}\int_{t-h(t)}^{t}\dot{z}(s)B^{\mathrm{T}}XB\dot{z}(s)ds$$

$$\dot{V}_3(z_t) = z^{\mathrm{T}}(t)Q_1 z(t) - (1-\dot{h}(t))z^{\mathrm{T}}(t-h(t))Q_1 z(t-h(t))$$

$$\dot{V}_4(z_t) = z^{\mathrm{T}}(t)Q_2 z(t) - z^{\mathrm{T}}(t-\tau)Q_2 z(t-\tau)$$

$$\dot{V}_5(z_t) = \dot{z}^{\mathrm{T}}(t)Q_3 \dot{z}(t) - \dot{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)Q_3 \dot{z}(t-\tau)$$

$$\dot{V}_6(z_t) = h_1^2 \dot{z}^{\mathrm{T}}(t)R\dot{z}(t) - h_1\int_{t-h_1}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R\dot{z}(s)ds$$

$$\dot{V}_7(z_t) = h_2^2 \dot{z}^{\mathrm{T}}(t)R\dot{z}(t) - h_2\int_{t-h_2}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R\dot{z}(s)ds$$

$$\dot{V}_8(z_t) = (h_2 - h_1)^2 \dot{z}^{\mathrm{T}}(t) T \dot{z}(t) - (h_2 - h_1) \int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{z}^{\mathrm{T}}(s) T \dot{z}(s) ds$$

และใช้เทคนิคการประมาณค่าตามทฤษฎีที่เกี่ยวข้องในบทที่ 2 เพื่อหาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

4. หาตัวอย่างเพื่อตรวจสอบเงื่อนไขที่หามาได้ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นว่าสามารถนำไปใช้ได้จริง โดยใช้ LMI Toolbox ใน MATLAB ในการหาคำตอบ