บทที่ 4

ผลการวิจัย

จากบทที่ 3 เราได้ใช้วิธีซิงกูลาร์เพอร์เทอร์เบชันกับระบบสมการ (4)-(6) ดังนี้

เราจะปรับมาตราส่วนพลวัตของส่วนประกอบ 3 ส่วนของระบบ เมื่อพารามิเตอร์ ε และ δ มีค่าเป็นบวกน้อย ๆ และให้พารามิเตอร์ใหม่ ดังนี้

ให้ $x = V, y = C, z = B, a_1 = c_1, a_2 = \frac{c_2}{\varepsilon}, a_3 = \frac{c_3}{\varepsilon}, a_4 = \frac{c_4}{\varepsilon\delta}, a_5 = \frac{c_5}{\varepsilon\delta},$

$d_1 = g_1, d_2 = \frac{g_2}{\varepsilon}, d_3 = \frac{g_3}{\varepsilon\delta}$ จะได้ระบบสมการใหม่ ดังนี้

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a_1}{k_1 + y} - d_1 x \equiv F(x, y, z) \tag{21}$$

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon\left[\frac{(a_2 + a_3 x)yz}{k_2 + x^2} - d_2 y\right] \equiv \varepsilon G(x, y, z) \tag{22}$$

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon\delta\left[a_4 + \frac{a_5 xz}{k_3 + x} - d_3 z\right] \equiv \varepsilon\delta H(x, y, z) \tag{23}$$

ซึ่งหมายความว่า การเปลี่ยนแปลงด้านขวามือของสมการ (21)-(23) มีค่าจำกัด และไม่เป็นศูนย์แล้ว $\dot{x} = O(1), \dot{y} = O(\varepsilon)$ และ $\dot{z} = O(\varepsilon\delta)$ หมายความว่า ถ้า ε และ δ มีค่าน้อย ๆ แล้ววิตามินดีมีพลวัตเร็วกว่าเซลล์สลายกระดูก ในขณะที่เซลล์สร้างกระดูกมีพลวัตช้าที่สุด

เพื่อความเข้าใจที่ดีขึ้น เราจะวิเคราะห์ manifold $\{F=0\}$, $\{G=0\}$ และ $\{H=0\}$ ในแต่ละmanifold ได้ดังต่อไปนี้

การวิเคราะห์ manifold

พิจารณา manifold $\{F = 0\}$

manifold นี้ถูกกำหนดโดยสมการ

$$\frac{a_1}{k_1 + y} - d_1 x = 0 \tag{24}$$

จะได้

$$x = \frac{a_1}{d_1(k_1 + y)} \equiv A(y) \tag{25}$$

เราจะเห็นได้ว่า manifold นี้เป็นอิสระจากตัวแปร z ดังนั้นสมการ (25) ขนานแกน z และตัดระนาบ xz ตามเส้นตรง

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

$$x = \frac{a_1}{d_1 k_1} \equiv x_1 \tag{26}$$

$$\lim_{y\to\infty} A(y) = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{a_1}{d_1(k_1 + y)}\right) = 0 \tag{27}$$

นั่นคือ $A(y) \to 0$ เมื่อ $y \to \infty$ ดังนั้น $A(y)$ เป็นฟังก์ชันลด และจะได้ว่า $A(y)$ เสถียรเชิงเส้นกำกับ

พิจารณา manifold $\{G = 0\}$

manifold นี้ถูกกำหนดโดยสมการ

$$\frac{(a_2 + a_3 x)yz}{k_2 + x^2} - d_2 y = 0 \tag{28}$$

จะได้

$$y\left\{\frac{(a_2 + a_3 x)z}{k_2 + x^2} - d_2\right\} = 0 \tag{29}$$

จากสมการ (29) เราจะเห็นว่า manifold นี้เกิดจาก 2 manifold ย่อย คือ 1. trivial manifold $y = 0$ และ 2. nontrivial manifold ที่กำหนดโดยสมการ

$$\frac{(a_2 + a_3 x)z}{k_2 + x^2} - d_2 = 0 \tag{30}$$

นั่นคือ

$$z = \frac{d_2(k_2 + x^2)}{(a_2 + a_3 x)} \equiv B(x) \tag{31}$$

เราจะเห็นได้ว่า nontrivial manifold $z = B(x)$ เป็นอิสระจากตัวแปร y ดังนั้นสมการ (31) ขนานแกน y บนระนาบ xz เส้นโค้ง $z = B(x)$ มีสมการเส้นกำกับเป็นเส้นตรง

$$x = -\frac{a_2}{a_3} \tag{32}$$

และตัดระนาบ yz ที่จุด $x = 0$ จะได้

$$z = \frac{d_2 k_2}{a_2} \equiv z_1 \tag{33}$$

เนื่องจาก $B'(x) = \dfrac{a_3 d_2 x^2 + 2a_2 d_2 x - a_3 d_2 k_2}{(a_2 + a_3 x)^2}$, $B'(x) = 0$ ที่จุด

$$x = -\frac{a_2}{a_3} + \sqrt{\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2 + k_2} \equiv x_m \tag{34}$$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

โดยที่ x_m เป็นจุดต่ำที่สุดใน manifold $\{G=0\}$ ในอัฐภาคที่ 1 เราจะได้ว่า x_m มีค่าเป็นบวก เมื่อพารามิเตอร์ทั้งหมดมีค่าเป็นบวก นอกจากนี้

$$B''(x_m) = \frac{2d_2\left(a_2^2 + a_3^2 k_2\right)}{a_1\left(a_2 + a_3 x_m\right)^3} \tag{35}$$

และ $x_m > 0$ แล้ว $B''(x_m) > 0$ ดังนั้น $z = B(x)$ ได้มาจากค่าน้อยที่สุดตามเส้นตรง

$$\left\{x = x_m \ , \ z = B(x_m) \equiv z_m\right\} \tag{36}$$

ซึ่งขนานกับแกน y ในอัฐภาคที่ 1

Manifold ในสมการ (24) ตัด manifold ในสมการ (28) ตามเส้นโค้ง $\{F = G = 0\}$ ซึ่งสามารถแยกออกเป็น 2 ส่วน ส่วนแรกเป็นจุดที่ตัด manifold $\{F = 0\}$ และ trivial manifold $y = 0$ ของ $\{G = 0\}$ ซึ่งถูกกำหนดโดยเส้นตรง $x = x_1$ บนระนาบ xz อีกส่วนหนึ่งเป็นจุดที่ตัดของ manifold $\{F = 0\}$ และ nontrivial manifold $z = V(x)$ ของ manifold $\{G = 0\}$ ซึ่งถูกกำหนดโดยเส้นโค้ง

$$\{x = A(y) \ , \ z = B(x)\} \tag{37}$$

เราได้ว่า $$z = B(A(y))$$

เนื่องจาก $z = B(x)$ มีจุดต่ำสุดที่ $x = x_m$ และ $z = z_m$

เส้นโค้ง $\{x = A(y) \ , \ z = B(x)\}$ ได้มาจากจุดต่ำสุดที่จุด $N(x_m, y_m, z_m)$ เมื่อ

$$y_m = \frac{a_1}{d_1 x_m} - k_1 \tag{38}$$

เราสังเกตได้ว่าเส้นโค้งตัดระนาบ xz ที่จุด U เมื่อ $y = 0, x = U(0) = x_1$ และ

$$z = \frac{d_2\left(k_2 + x_1^2\right)}{a_2 + a_3 x_1} \equiv z_2 \tag{39}$$

พิจารณา manifold $\{H = 0\}$

manifold นี้ถูกกำหนดโดยสมการ

$$a_4 + \frac{a_5 xz}{k_3 + x} - d_3 z = 0 \tag{40}$$

จะได้

$$z = \frac{a_4\left(k_3 + x\right)}{\left(d_3 - a_5\right)x + d_3 k_3} \equiv C(x) \tag{41}$$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

ซึ่งสมการ (41) เป็นอิสระจากตัวแปร y ดังนั้น manifold นี้ขนานแกน y และตัดระนาบ yz ตามเส้นตรง

$$z = \frac{a_4}{d_3} \equiv z_3 \tag{42}$$

และตัดระนาบ xz ตามเส้นโค้งซึ่งมีเส้นกำกับเป็น

$$x = \frac{d_3 k_3}{a_5 - d_3} \equiv x_2 \tag{43}$$

เราได้ว่า $x_2 > 0$ ก็ต่อเมื่อ

$$d_3 < a_5 \tag{44}$$

การตัดกันของ manifold $\{H = 0\}$ และ $\{G = 0\}$ สามารถแยกออกเป็น 2 ส่วน คือ

1. manifold $\{H = 0\}$ ตัด trivial manifold $y = 0$ ของ manifold $\{G = 0\}$ ตามเส้นโค้ง $z = C(x)$ บนระนาบ xy ตามเส้นโค้ง

$$z = \frac{d_2\left(k_2 + x^2\right)}{a_2 + a_3 x}$$

และ 2. manifold $\{H = 0\}$ ตัด nontrivial manifold ของ manifold $\{G = 0\}$ ตามเส้นตรง

$$\left\{ x = x_3, z = \frac{a_4\left(k_3 + x_3\right)}{\left(d_3 - a_5\right)x_3 + d_3 k_3} \equiv z_4 \right\}$$

ซึ่งขนานแกน y และ x_3 เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนจริงของ

$$\begin{aligned} &\left(d_3 d_2 - a_5 d_2\right)x^3 + \left(d_2 d_3 k_3 - a_3 a_4\right)x^2 + \left(d_2 d_3 k_2 - a_5 d_2 k_2 - a_3 a_4 k_3 - a_2 a_4\right)x \\ &+\left(d_2 d_3 k_2 k_3 - a_2 a_4 k_3\right) = 0 \end{aligned} \tag{45}$$

กำหนดให้

$$\alpha \equiv d_3 d_2 - a_5 d_2$$

$$\beta \equiv d_2 d_3 k_3 - a_3 a_4$$

$$\gamma \equiv d_2 d_3 k_2 - a_5 d_2 k_2 - a_3 a_4 k_3 - a_2 a_4$$

$$\omega \equiv d_2 d_3 k_2 k_3 - a_2 a_4 k_3$$

สมการ (45) สามารถนำมาเขียนใหม่ได้เป็น

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \omega = 0 \tag{46}$$

x_3 จะมีค่าเกิดขึ้นในอัฐภาคที่เป็นบวกและสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\frac{a_2 a_4}{k_2} < d_2 d_3 < \frac{a_3 a_4}{k_3} \tag{47}$$

เมื่อพารามิเตอร์ทั้งหมดมีค่าเป็นบวก

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

ในทางตรงกันข้าม manifold $\{H = 0\}$ ตัดระนาบ xz ตามเส้นโค้ง $z = C(x)$ ซึ่งตัดเส้นตรง $x = x_1$ ที่จุด $S_1(x_1, 0, z_5)$ เมื่อ

$$z_5 = \frac{a_4(x_1 + k_3)}{(d_3 - a_5)x_1 + d_3 k_3} \tag{48}$$

เส้นโค้ง $\{F = G = 0\}$ ตัดเส้นโค้ง $\{G = H = 0\}$ ที่จุด $S_2(x_3, y_1, z_5)$ เมื่อ

$$y_1 = \frac{a_1}{d_1 x_3} - k_1 \tag{49}$$

ต่อมาเราจะได้นำรูปกราฟทั้ง 3 รูปของสมการแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ มาวิเคราะห์ผลต่าง ๆ ที่จะเกิดขึ้นในแต่ละกรณี ซึ่งแบ่งได้เป็น 2 กรณี ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2 ถ้า ε และ δ มีค่าน้อย ๆ และอสมการ (44) และ (47) เป็นจริง และ

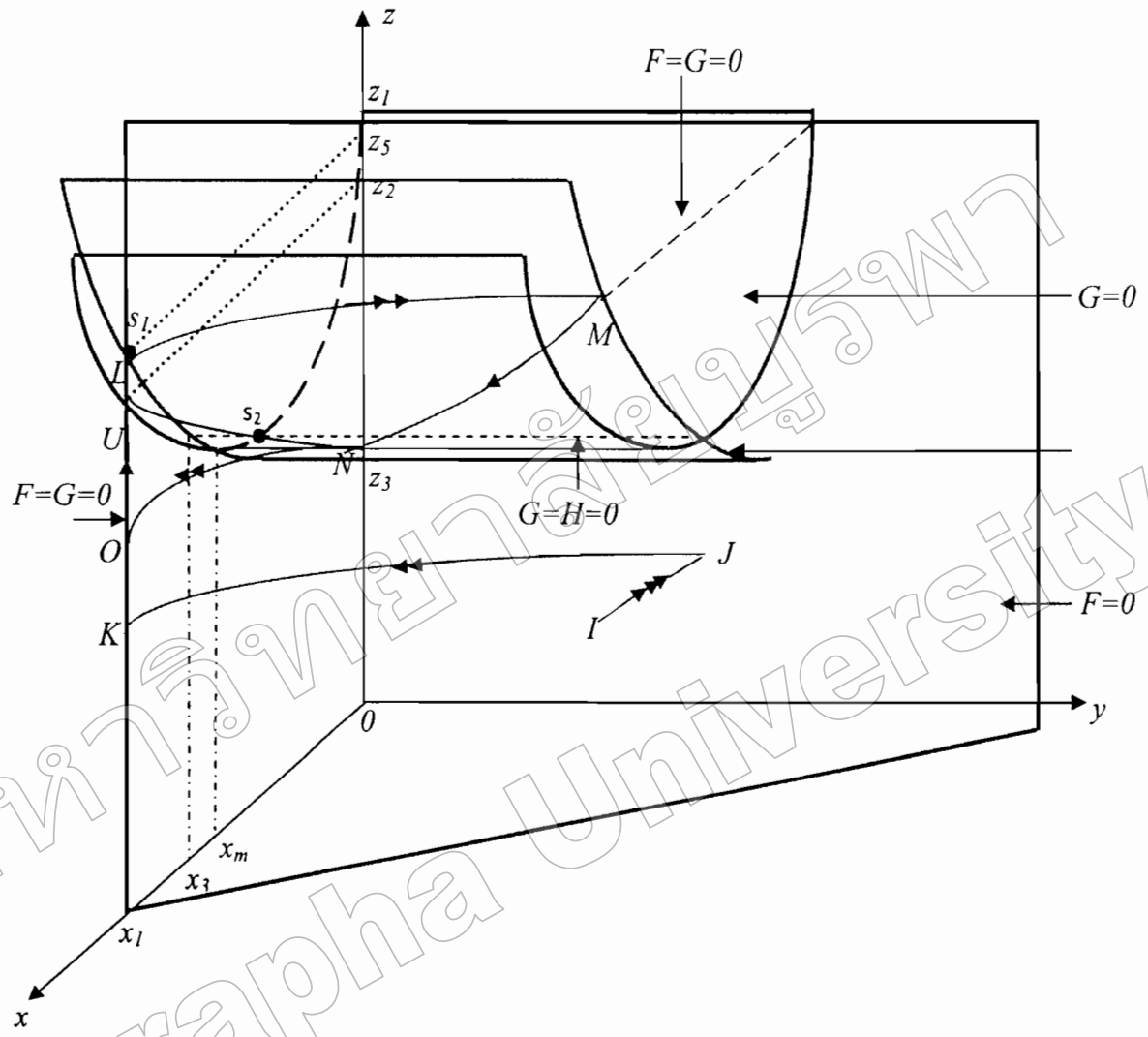
$$x_m < x_3 < x_1 \tag{50}$$

และ $$z_3 < z_m < z_2 < z_5 < z_1 \tag{51}$$

เมื่อพารามิเตอร์ทั้งหมดมีค่าตามที่ได้กำหนดไว้แล้วข้างต้น แล้ว manifold แสดงดังภาพที่ 2 และระบบสมการ (21)-(23) จะมีผลเฉลยเป็นแบบวัฏจักร การเปลี่ยนแปลงในระดับที่ช้า ปานกลาง และเร็ว แสดงโดยลูกศร 1 หัว 2 หัว และ 3 หัว ตามลำดับ

ในภาพที่ 2 ภายใต้เงื่อนไขของทฤษฎีบทที่ 2 เริ่มต้นที่จุด I โดยสมมติให้ตำแหน่งของจุด I=(x_0, y_0, z_0) ในภาพที่ 2 เป็น $\{F \neq 0\}$ การเปลี่ยนแปลงในระดับที่เร็วนำมาสู่เส้นโคจรผลเฉลยที่จุด J บน manifold $\{F=0\}$ ที่ $\{G < 0\}$ และการเปลี่ยนแปลงในระดับปานกลางจะเกิดเมื่อค่า y ลดลงจนกระทั่งเข้าสู่จุด K บนเส้นโค้ง $\{F=G=0\}$ การเปลี่ยนแปลงในระดับที่ช้าเกิดตามเส้นโค้งที่จุด L จนเมื่อความเสถียรของ manifold ย่อยหายไป การกระโดดไปยังจุด M บนส่วนการเสถียรอื่นของ $\{F=G=0\}$ เป็นการเปลี่ยนแปลงในระดับที่ช้า ในตำแหน่งที่ z ลดลงจนเข้าสู่จุด N เนื่องจาก $\{H < 0\}$ เมื่อไปถึงจุด N ความเสถียรของ manifold ย่อยหายไป เกิดการกระโดดของจุด O บนส่วนของการเสถียรอื่นของ $\{F=G=0\}$ เป็นการเปลี่ยนแปลงในระดับที่ช้าในตำแหน่งที่ z เพิ่มขึ้นเนื่องจาก$\{H >0\}$ ด้วยเหตุนี้ การเปลี่ยนแปลงในระดับที่ช้าจะนำมาสู่ระบบที่ย้อนกลับไปที่จุด L ไปตามทิศทางเดิมซ้ำไปเรื่อย ๆ เกิดผลเป็นวงโคจรปิด LMNOL ดังนั้นรูปแบบวัฏจักรในระบบมีจริงสำหรับ ε และ δ ที่มีค่าน้อย ๆ

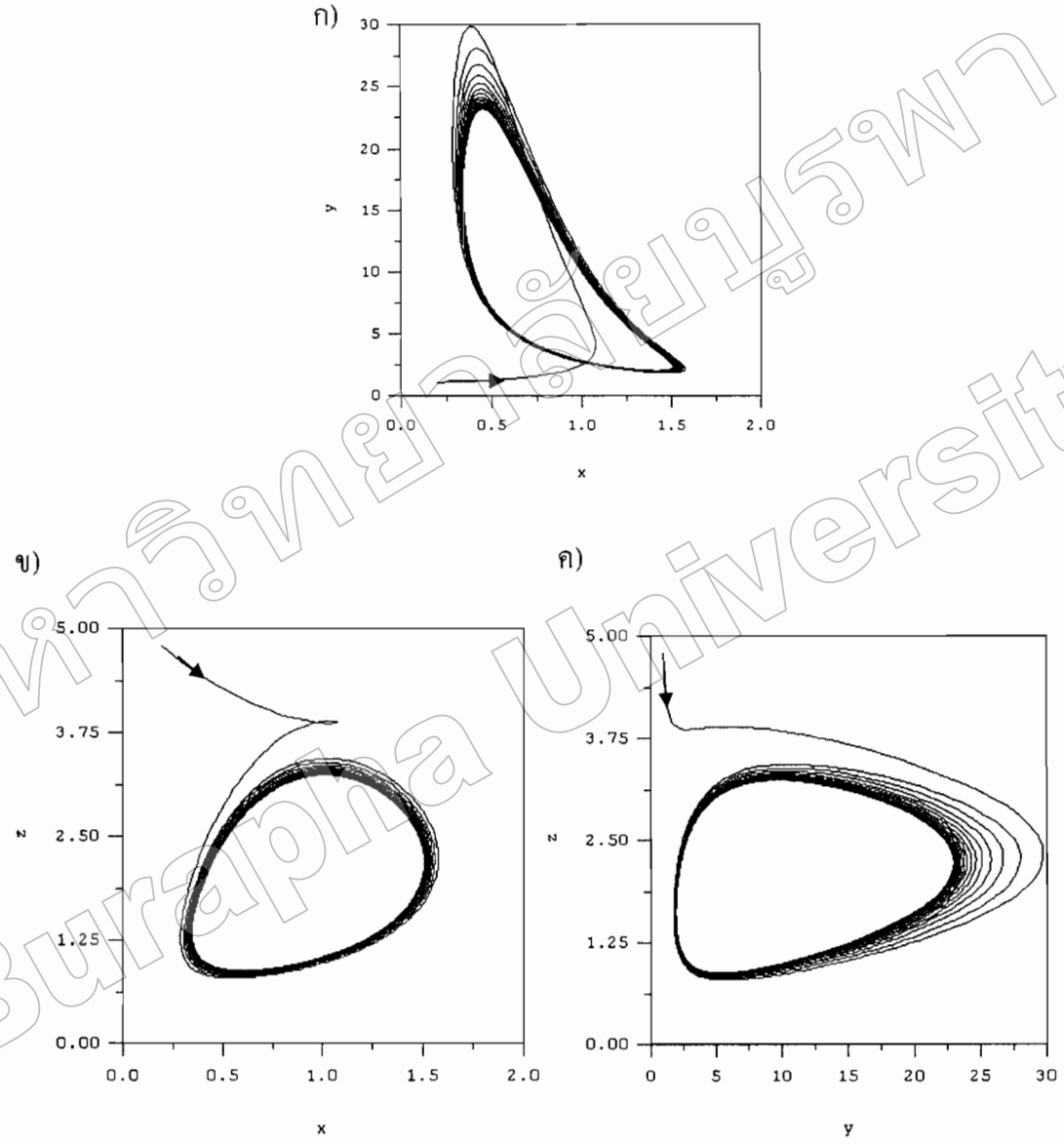
มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University



ภาพที่ 3 การแสดง manifold ทั้ง 3 คือ {F=0} , {G=0} และ {H=0} ในระนาบ xyz ระบบสมการ (21)-(23) มีผลเฉลยเป็นแบบวัฏจักร ส่วนของวิถีโคจรเขียนแทนโดยลูกศร 1 หัว 2 หัว และ 3 หัว ซึ่งแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงในระดับที่ช้า เร็ว และปานกลาง ตามลำดับ

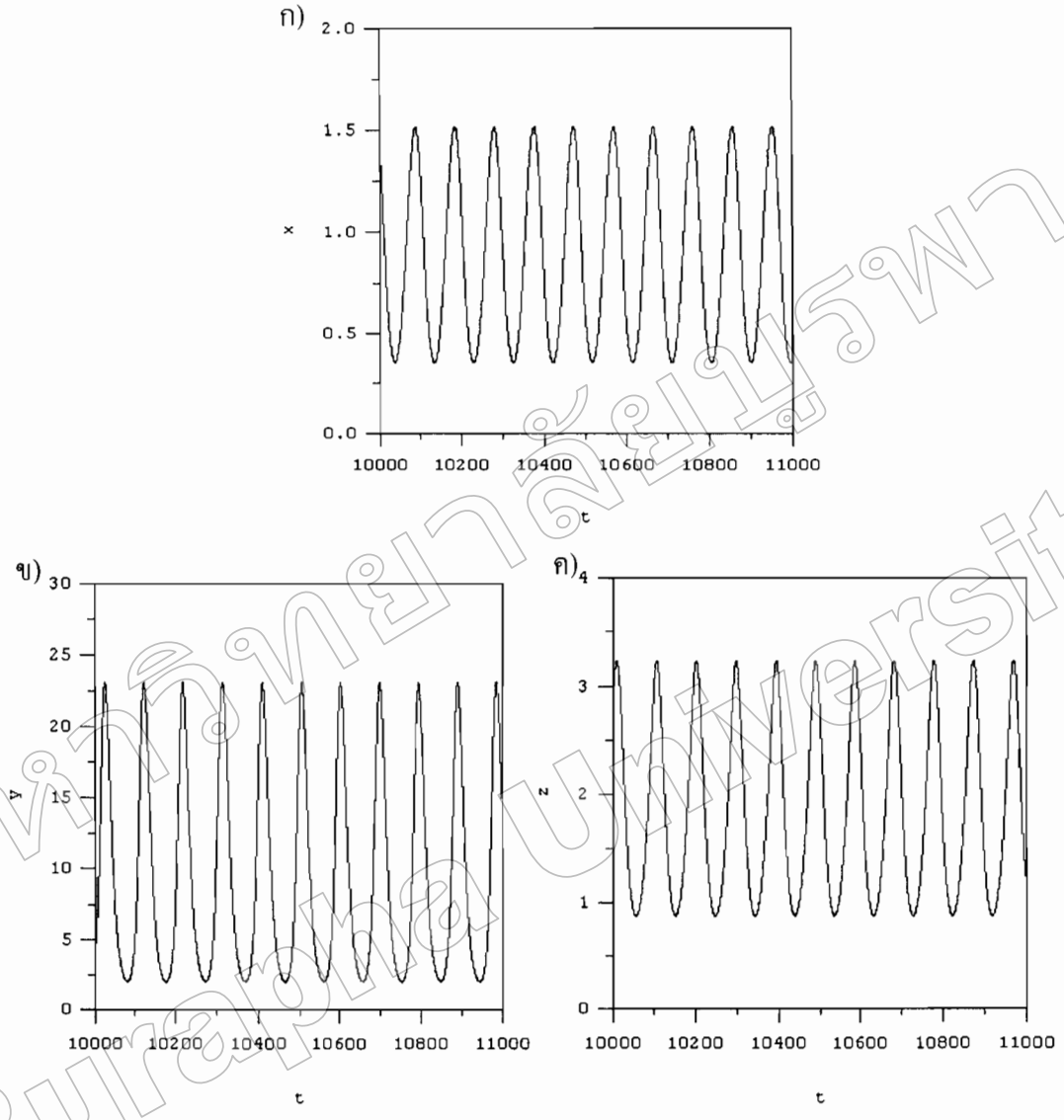
มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

การจำลองข้อมูลทางคอมพิวเตอร์



ภาพที่ 4 การจำลองทางคอมพิวเตอร์ของสมการแบบจำลอง (21)-(23) เมื่อ $\varepsilon = 0.45$, $\delta = 0.9$ $a_1 = 0.65, a_2 = 0.35, a_3 = 0.52, a_4 = 0.1, a_5 = 0.8, d_1 = 0.1, d_2 = 0.25, d_3 = 0.3,$ $k_1 = 2, k_2 = 5, k_3 = 2,\ x(0) = 0.1, y(0) = 1, z(0) = 5$ ซึ่งแสดงเส้นโคจรผลเฉลยเป็นวัฏจักร ก) ระนาบ *xy* ข) ระนาบ *xz* และ ค) ระนาบ *yz*

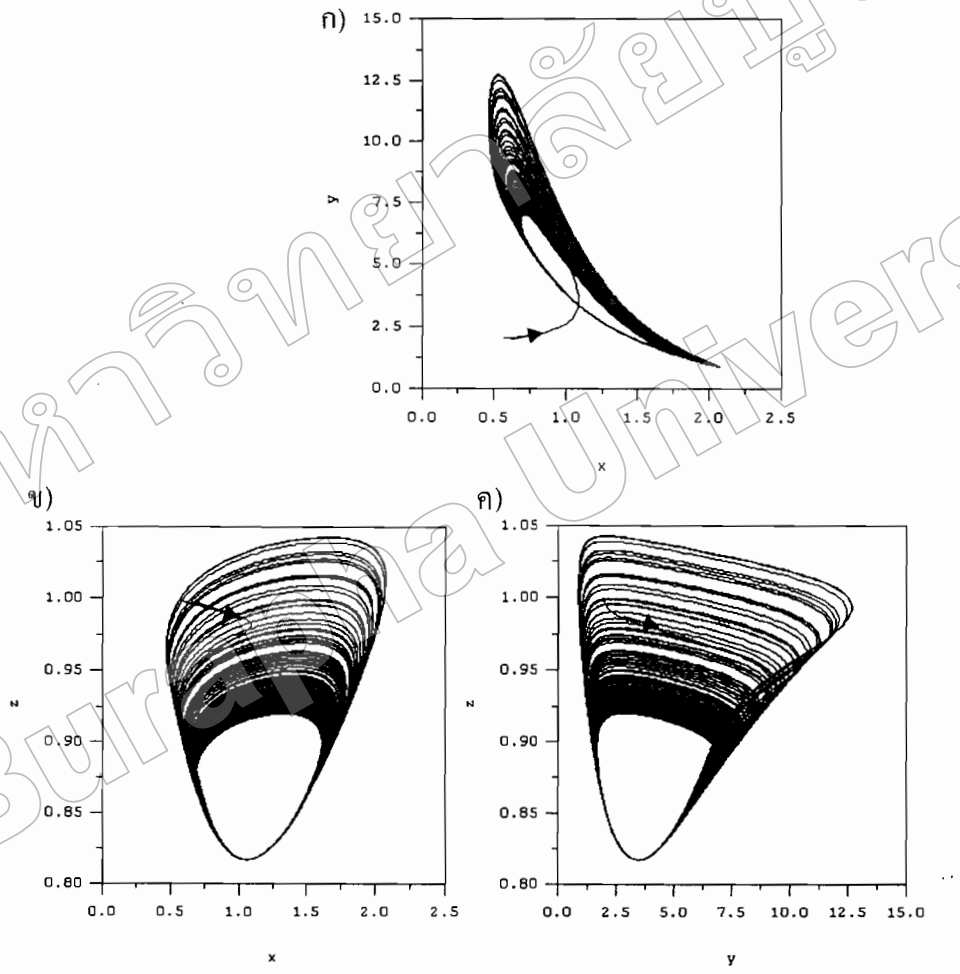
มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University



ภาพที่ 5 การแสดงอนุกรมเวลาของ ก) วิตามินดี ข) เซลล์สร้างกระดูก และ ค) เซลล์สลายกระดูกของกรณีที่เป็นแบบวัฏจักร ดังแสดงในภาพที่ 4

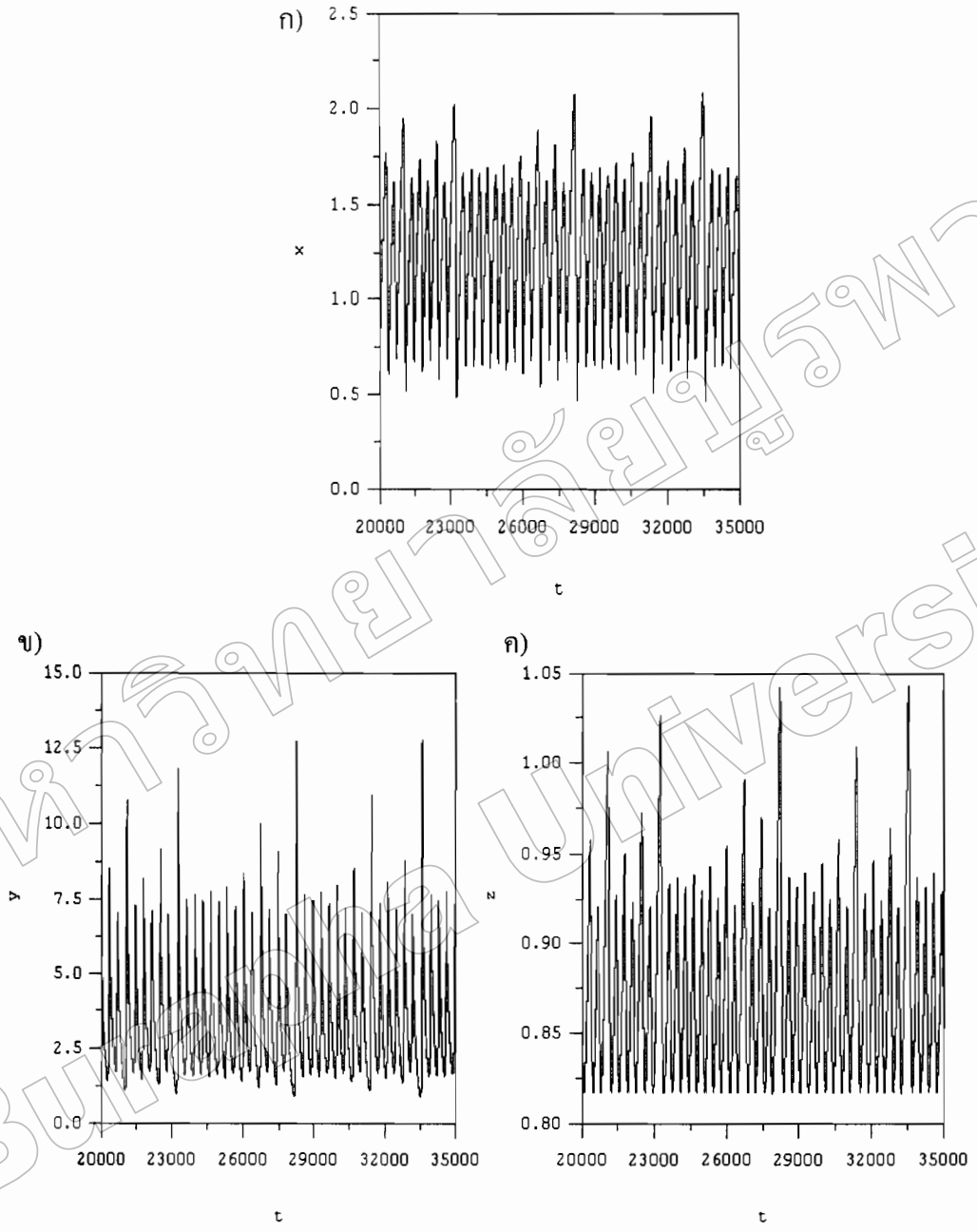
มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

เราใช้ผลเฉลยเชิงตัวเลขเพื่อสำรวจพฤติกรรมแบบอลวนของแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ของการสร้างและสลายกระดูกที่กระตุ้นโดยวิตามินดี ในสมการ (21) - (23) โดยการเลือกชุดของพารามิเตอร์ที่ได้รับการแนะนำมาจากระบบไม่เชิงเส้นซึ่งแสดงพฤติกรรมแบบรูปแบบวัฏจักรมาแล้ว คือชุดพารามิเตอร์ที่ใช้ในภาพที่ 4 เราจึงนำชุดพารามิเตอร์ที่แสดงพฤติกรรมแบบรูปแบบวัฏจักรนั้นมาปรับค่า ได้ผลเฉลยเชิงตัวเลขแสดงพฤติกรรมแบบอลวนแสดงดังภาพที่ 6



ภาพที่ 6 การจำลองทางคอมพิวเตอร์ของสมการแบบจำลอง (21)-(23) เมื่อ $\varepsilon = 0.99$, $\delta = 0.02$, $a_1 = 0.8732$, $a_2 = 0.15$, $a_3 = 0.9$, , $a_4 = 0.3$, $a_5 = 0.71$, $d_1 = 0.1462$, $d_2 = 0.35$, $d_3 = 0.7$, $k_1 = 2$, $k_2 = 1.5$, $k_3 = 1.2$, $x(0) = 5$, $y(0) = 2$, $z(0) = 1$ แสดงเส้นโคจรผลเฉลยเป็นอลวนบน ก) ระนาบ xy ข) ระนาบ xz และ ค) ระนาบ yz

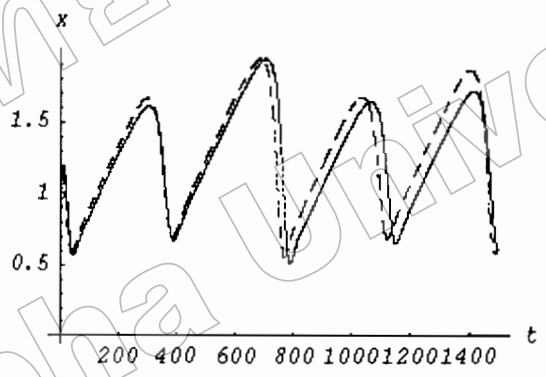
มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University



ภาพที่ 7 การแสดงอนุกรมเวลาของ ก) วิตามินดี ข) เซลล์สร้างกระดูก และ ค) เซลล์สลายกระดูกของกรณีอลวน ดังแสดงในภาพที่ 6

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

ในภาพที่ 7ก) แสดงการเปลี่ยนแปลงระดับของวิตามินดีในเลือดเมื่อเทียบกับเวลา จะเห็นว่าความเข้มข้นของวิตามินดีในเลือดเปลี่ยนแปลงขึ้น ๆ ลง ๆ สลับกันไป อีกทั้งจากการสังเกตพฤติกรรมแบบอลวน พบว่า เมื่อเราเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขเริ่มต้นเพียงเล็กน้อยจะนำไปสู่พฤติกรรมที่แตกต่างไป เราแสดงพฤติกรรมนี้โดยการเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลข แสดงได้ดังภาพที่ 8 ซึ่งแสดงการเปลี่ยนแปลงระดับของวิตามินดีในเลือดเมื่อเทียบกับเวลาของระบบสมการ (21) - (23) ที่มีพฤติกรรมแบบอลวน เมื่อใช้พารามิเตอร์ดังภาพที่ 6 และเงื่อนไขเริ่มต้น $x(0)$ ต่างกัน กล่าวคือ เมื่อ $x(0) = 0.1$ และ $x(0) = 0.3$ โดย $y(0)$ และ $z(0)$ ไม่เปลี่ยนแปลง จะเห็นว่า ระดับของวิตามินดีในเลือดมีการเปลี่ยนแปลงคล้ายกัน เมื่อใช้เงื่อนไขเริ่มต้นต่างกันสำหรับช่วงเวลาสั้น ๆ ดังนั้นการก่อกวนระดับความเข้มเข้นของวิตามินดีในเลือดเล็กน้อยอาจนำไปสู่ผลลัพธ์ที่ไม่สามารถทำนายได้



ภาพที่ 8 การแสดงการเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นของวิตามินดีในเลือดเมื่อเทียบกับเวลาของระบบสมการ (21) - (23) ที่มีพฤติกรรมแบบอลวน เมื่อใช้พารามิเตอร์ดังภาพที่ 6 และเงื่อนไขเริ่มต้น $x(0)$ ต่างกัน เมื่อ $x(0) = 0.1$ แสดงโดย ------ และ $x(0) = 0.3$ แสดงโดย โดย $y(0)$ และ $z(0)$ ไม่เปลี่ยนแปลง

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University