บทที่ 4
ผลการวิจัย

การนำเสนอข้อมูลผลการทดสอบปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีเงื่อนไขค่าขอบแบบแยกไม่ได้ โดยใช้วิธีของเทย์เลอร์อันดับสี่ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และปรับค่าเริ่มต้นที่ไม่ทราบให้สอดคล้องกับค่าขอบด้วยวิธีนิวตัน-บรอยเดน ได้ผลดังนี้

ผลการคำนวณ

สำหรับขั้นตอนการหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีเงื่อนไขค่าขอบแบบแยกไม่ได้ สมการ (3.4) – (3.5) กำหนดค่าต่าง ๆ ดังนี้

$t_0 = 0$ และ $t_f = 1$

$x(0)^2 + 2x'(0) + x(1) + x'(1) + 1 = 0$

$x(0)x'(1) + x'(0)^2 - x(0) + 2x(1) - e^{-1} = 0$

กำหนดจุดเริ่มต้น $z_0 = [x(0), x'(0)]^T = [1.5, 0]^T$ และ $D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เริ่มต้น จะได้ว่า $z_0 = [x(0), x'(0)]^T$ ลู่เข้าสู่ $[1, -1]^T$ ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นของปัญหาค่าเริ่มต้นที่ทำให้ค่า $x(0)^2 + 2x'(0) + x(1) + x'(1) + 1 = 0$ และ $x(0)x'(1) + x'(0)^2 - x(0) + 2x(1) - e^{-1} = 0$ ตามต้องการ

ตารางที่ 1 แสดงค่าจุดเริ่มต้น $x(0)$ และ $x'(0)$ ค่าของฟังก์ชัน $F1 = x(0)^2 + 2x'(0) + x(1) + x'(1) + 1$ และ $F2 = x(0)x'(1) + x'(0)^2 - x(0) + 2x(1) - e^{-1}$ ในแต่ละขั้นตอนการคำนวณ

i	$x(0)$	$x'(0)$	$F1$	$F2$
0	1.5	0	13.762475	15.79833237
1	-0.0596202	-2.5079982	-8.434296	0.762160033
2	1.1748282	-1.7000215	-2.490514	-0.524682645
3	0.889649	-0.9770347	-0.670471	-0.604573567
4	2.619936	-2.095074	17.928808	35.70918184
5	1.1666366	-2.1946276	-4.968921	-0.843364281
6	1.5085689	-1.5777934	1.2902095	2.833612807
7	1.4060284	-1.3709796	1.497986	2.438225413
8	1.1676469	-1.1626555	0.4461241	0.765386217

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

ตารางที่ 1 (ต่อ)

i	$x(0)$	$x'(0)$	$F1$	$F2$
9	1.0318712	-1.0292349	0.0830533	0.13210575
10	1.0036324	-1.002839	0.011982	0.016144446
11	1.0004156	-1.0002943	0.0015399	0.001935098
12	1.0000278	-1.0000194	0.0001045	0.000130225
13	1.0000002	-1.0000002	9.854E-07	1.2268E-06
14	1	-1	8.694E-10	1.0816E-09
15	1	-1	6.317E-13	7.85705E-13
16	1	-1	8.882E-16	8.882E-16

เมื่อคำนวณได้ 16 ขั้น จะได้ว่าค่าของฟังก์ชันเข้าใกล้ศูนย์ จุดเริ่มต้นที่สอดคล้องเหมาะสม คือ $x(0) = 1$ และ $x'(0) = -1$

ตารางที่ 2 แสดงผลการคำนวณค่าฟังก์ชัน (แก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ) หลังจากได้จุดเริ่มต้นที่เหมาะสม

i	x	x'
0	1	-1
1	0.951229	-0.951229
2	0.904837	-0.904837
3	0.860708	-0.860708
4	0.818731	-0.818731
5	0.778801	-0.778801
6	0.740818	-0.740818
7	0.704688	-0.704688
8	0.67032	-0.67032
9	0.637628	-0.637628
10	0.606531	-0.606531
11	0.57695	-0.57695
12	0.548812	-0.548812
13	0.522046	-0.522046
14	0.496585	-0.496585
15	0.472367	-0.472367
16	0.449329	-0.449329
17	0.427415	-0.427415
18	0.40657	-0.40657
19	0.386741	-0.386741
20	0.367879	-0.367879

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

ตัวอย่าง 2 ปัญหาค่าขอบกำหนดค่าต่าง ๆ ดังนี้

$t_0 = 0$ และ $t_f = 1$

$x(0)^2 + x'(0)x'(1) - x(1)^2x'''(0) + e = 0$

$3x'''(0)x'(1) + x'''(1) + x'(0)^2 - 1 = 0$

$x''(0)x''(1)^2 + x'(0)x'''(1) - 4x'(1) + 5e = 0$

$x''(0)^2 + x(1)x'''(1) + 3x'(0)^2x''(1) + 4x'''(0)x'(1) = 0$

กำหนดจุดเริ่มต้น $z_0 = [x(0), x'(0), x''(0), x'''(0)]^T = [1, 0.5, 0.5, -2]^T$ และ $D_0 = I_4$ เป็นเมทริกซ์เริ่มต้น จะได้ว่า $z_0 = [x(0), x'(0), x''(0), x'''(0)]^T$ ลู่เข้าสู่ $[0, 1, 0, -3]^T$ ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นของปัญหาค่าเริ่มต้นที่ทำให้ค่า $x(0)^2 + x'(0)x'(1) - x(1)^2x'''(0) + e = 0$, $3x'''(0)x'(1) + x'''(1) + x'(0)^2 - 1 = 0$, $x''(0)x''(1)^2 + x'(0)x'''(1) - 4x'(1) + 5e = 0$ และ $x''(0)^2 + x(1)x'''(1) + 3x'(0)^2x''(1) + 4x'''(0)x'(1) = 0$ ตามต้องการ

สำหรับตารางผลเฉลยของปัญหาอยู่ในภาคผนวก (ตารางที่ 5 และตารางที่ 6)

ตัวอย่าง 3 ปัญหาค่าขอบกำหนดค่าต่าง ๆ ดังนี้

$t_0 = 0$ และ $t_f = 1$

$x^2(0) - 2x'(0)x(1) + x''(1) + x^{(4)}(1) - 1 = 0$

$x'(0)x'''(1) + x''(0) - x'(1) + x'''(0) - 2x^{(4)}(0) = 0$

$x(0) + x^2(1) - x''(1)x'(1) - 2x'''(0) + 1 = 0$

$x''(0) + x'''(1) - 2x^{(4)}(1) - x^{(4)}(0) + e = 0$

$x'(0)x'''(0) - x(1) + x''(1) + x(0) - 2 = 0$

กำหนดจุดเริ่มต้น $z_0 = [x(0), x'(0), x''(0), x'''(0), x^{(4)}(0)]^T = [0.8, 0.5, 0.5, 0, 0]^T$ และ $D_0 = I_5$ เป็นเมทริกซ์เริ่มต้น จะได้ว่า $z_0 = [x(0), x'(0), x''(0), x'''(0), x^{(4)}(0)]^T$ ลู่เข้าสู่ $[1, 1, 1, 1, 1]^T$ ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นของปัญหาค่าเริ่มต้นที่ทำให้ค่า $x^2(0) - 2x'(0)x(1) + x''(1) + x^{(4)}(1) - 1 = 0$, $x'(0)x'''(1) + x''(0) - x'(1) + x'''(0) - 2x^{(4)}(0) = 0$, $x(0) + x^2(1) - x''(1)x'(1) - 2x'''(0) + 1 = 0$, $x''(0) + x'''(1) - 2x^{(4)}(1) - x^{(4)}(0) + e = 0$ และ $x'(0)x'''(0) - x(1) + x''(1) + x(0) - 2 = 0$ ตามต้องการ

สำหรับตารางผลเฉลยของปัญหาอยู่ในภาคผนวก (ตารางที่ 7 และตารางที่ 8)

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

ตัวอย่าง 4 ปัญหาค่าขอบกำหนดค่าต่าง ๆ ดังนี้

$t_0 = 0$ และ $t_f = 1$

$x''(1) + 4x'(0)x'(1) + y^2(0) = 0$

$x(0)^2 + y(1) + x''(0)x'(1) + x'(0) + 1 = 0$

$x''(1) - x(1)^2 + y(0) - x(0) - 4e = 0$

$y(1) - 2x''(0) + x'(1) - x(1) - e = 0$

กำหนดจุดเริ่มต้น $z_0 = [x(0), x'(0), x''(0), y(0)]^T = [-1, -1, 1, 0]^T$ และ $D_0 = I_4$ เป็นเมทริกซ์เริ่มต้น จะได้ว่า $z_0 = [x(0), x'(0), x''(0), y(0)]^T$ ลู่เข้าสู่ $[0, -1, 0, 0]^T$ ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นของปัญหาค่าเริ่มต้นที่ทำให้ค่า $x''(1) + 4x'(0)x'(1) + y^2(0) = 0$,

$x(0)^2 + y(1) + x''(0)x'(1) + x'(0) + 1 = 0$, $x''(1) - x(1)^2 + y(0) - x(0) - 4e = 0$ และ

$y(1) - 2x''(0) + x'(1) - x(1) - e = 0$ ตามต้องการ

สำหรับตารางผลเฉลยของปัญหาอยู่ในภาคผนวก (ตารางที่ 9 และตารางที่ 10)

ค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุดของผลเฉลย

การแสดงค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลย จะนำเสนอค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดของผลเฉลย (Maximum Error) โดยเปรียบทียบกับผลเฉลยที่แท้จริงของแต่ละปัญหาโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข 3 วิธี คือ BSM NSM และ NBSM

ตารางที่ 3 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุดของผลเฉลย

	Maximum Error		
	BSM	NSM	NBSM
ตัวอย่าง 1	Divergence	1.50E-08	1.50E-08
ตัวอย่าง 2	Divergence	1.12E-08	1.12E-08
ตัวอย่าง 3	Divergence	3.72E-08	3.72E-08
ตัวอย่าง 4	Divergence	9.30E-08	9.30E-08

จากตารางที่ 3 พบว่า วิธี NBSM และวิธี NSM ทั้งสองวิธีมีค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุดเท่ากัน ในขณะที่วิธี BSM ไม่สามารถแก้ปัญหาที่นำเสนอได้

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

ความสิ้นเปลืองของแรงงานในการทำซ้ำ

การแสดงความสิ้นเปลืองของแรงงานในการทำซ้ำ จะนำเสนอจำนวนรอบของการทำซ้ำ (N) และการนับ Floating-Point Operations (FLOP) ของแต่ละปัญหาโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข 3 วิธี คือ BSM NSM และ NBSM

ตารางที่ 4 แสดงจำนวนและร้อยละการลดลงของความสิ้นเปลืองแรงงานในการทำซ้ำ

	N			FLOP		Saving (%)
	BSM	NSM	NBSM	NSM	NBSM	NBSM
ตัวอย่าง 1	Divergence	8	16	97750	93004	4.86
ตัวอย่าง 2	Divergence	9	13	355236	168086	52.68
ตัวอย่าง 3	Divergence	15	20	647414	392818	39.33
ตัวอย่าง 4	Divergence	12	20	373759	359489	3.82

จากตารางที่ 4 พบว่า วิธี NBSM มีประสิทธิภาพเทียบเท่าวิธี NSM ถึงแม้ว่าในการแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีเงื่อนไขค่าขอบแบบแยกไม่ได้โดยวิธี NBSM นั้นจะมีจำนวนรอบของการทำซ้ำมากกว่า วิธี NSM แต่แรงงานในการทำซ้ำของวิธี NBSM น้อยกว่า วิธี NSM นอกจากนั้น พบว่า แรงงานในการทำซ้ำของวิธี NBSM สามารถลดลงได้ร้อยละ 4-53 เมื่อเปรียบเทียบกับวิธี NSM ในขณะที่วิธี BSM ไม่สามารถแก้ปัญหาที่นำเสนอได้

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University