บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

กระบวนการแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีเงื่อนไขค่าขอบแบบแยกไม่ได้โดยใช้วิธีเทย์เลอร์อันดับสี่ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และปรับค่าเริ่มต้นที่ไม่ทราบให้สอดคล้องกับค่าขอบด้วยวิธีนิวตัน-บรอยเดนนั้น ผู้วิจัยได้ดำเนินการศึกษาตามหัวข้อต่อไปนี้

1. วิธียิงเป้าโดยใช้วิธีนิวตัน-บรอยเดน ปรับค่าเริ่มต้น
2. ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
3. การแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

ผลการศึกษาค้นคว้า ผู้วิจัยได้ผลสรุปของวิธีการแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีเงื่อนไขค่าขอบแบบแยกไม่ได้ โดยใช้วิธียิงเป้าประกอบกับระเบียบวิธีนิวตัน-บรอยเดน ดังนี้

วิธียิงเป้าโดยใช้วิธีนิวตัน-บรอยเดน ปรับค่าเริ่มต้น

พิจารณาปัญหาค่าขอบ โดยมีสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (2.25)

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}'(t), t) = 0$$

และเงื่อนไขค่าขอบ (2.26)

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y}'(t_0), \boldsymbol{Y}'(t_f)) = 0$$

ให้ $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{Y}'(t_0)$ และกำหนดฟังก์ชัน $\boldsymbol{S}$ โดย

$$\boldsymbol{S}(t, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{Y}'(t)$$

และฟังก์ชัน $\boldsymbol{F}$ โดย

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{S}(t_f, \boldsymbol{z}))$$

เมื่อ $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{S}(t_f, \boldsymbol{z})$ ปัญหากลายมาเป็นปัญหาการหารากของสมการ $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$

สรุปขั้นตอนการใช้ระเบียบวิธีนิวตัน-บรอยเดน ในการแก้ปัญหาระบบสมการที่มีรูปแบบเป็น

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$$

เมื่อ $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ และ $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ โดยสูตรวิธีของนิวตัน (2.7) จะได้

$$\boldsymbol{z}_{i+1} = \boldsymbol{z}_i - \left[\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_i), \boldsymbol{z}_i)\right]^{-1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_i), \boldsymbol{z}_i), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.1}$$

เมื่อ $\quad \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_i), \boldsymbol{z}_i) = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_i), \boldsymbol{z}_i)\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{z}_i) + \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_i), \boldsymbol{z}_i)$

โดยการประมาณค่าเมทริกซ์จาโคเบียน $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{z}_i)$ ด้วย D_i จะได้

$$\boldsymbol{z}_{i+1} = \boldsymbol{z}_i - \left[\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_i), \boldsymbol{z}_i)D_i + \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_i), \boldsymbol{z}_i)\right]^{-1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_i), \boldsymbol{z}_i), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.2}$$

และใช้สูตรปรับเปลี่ยนเมทริกซ์

$$D_{i+1} = D_i + \frac{1}{\boldsymbol{b}_i^T \boldsymbol{b}_i}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_{i+1}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_i) - D_i\boldsymbol{b}_i)\boldsymbol{b}_i^T \tag{3.3}$$

เมื่อ $\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{z}_{i+1} - \boldsymbol{z}_i$

หมายเหตุ

ในการหาค่า $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_i), \boldsymbol{z}_i) = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_i), \boldsymbol{z}_i)\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{z}_i) + \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_i), \boldsymbol{z}_i)$ โดยปกติสามารถหาค่า $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{z}_i)$ ได้โดยการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

$$\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{S}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}'(t), t)\right]\boldsymbol{p}(t) = 0$$

เมื่อ $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{z}_i) = \boldsymbol{p}(t_f)$

จะเห็นได้ว่าต้องใช้แรงงานในการคำนวณสูง แต่เมื่อแทน $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{z}_i)$ ด้วยเมทริกซ์ D_i จะได้เมทริกซ์ H_i ที่ใช้แทน $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_i), \boldsymbol{z}_i)$ เมื่อ

$$H_i = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_i), \boldsymbol{z}_i)D_i + \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_i), \boldsymbol{z}_i)$$

เพื่อใช้ในสมการ (3.2) ซึ่งทำให้ลดแรงงานที่ใช้ในการคำนวณได้เป็นอย่างมาก

ขั้นตอนวิธีการแก้สมการ $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$ เป็นดังนี้

1. กำหนด z_0 เป็นจุดเริ่มต้น และ D_0 เป็นเมทริกซ์เริ่มต้น
2. คำนวณค่า $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_0)$ และ $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_0), \boldsymbol{z}_0)$
3. สำหรับ $i = 0$ ถึง K กระทำดังนี้

   3.1 คำนวณค่า $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_i), \boldsymbol{z}_i)$ และ $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_i), \boldsymbol{z}_i)$ และ

$$H_i = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_i), \boldsymbol{z}_i)D_i + \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_i), \boldsymbol{z}_i)$$

   3.2 หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

$$H_i\boldsymbol{b}_i = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_i), \boldsymbol{z}_i)$$

3.3 ให้ $\boldsymbol{z}_{i+1} = \boldsymbol{z}_i + \boldsymbol{b}_i$

3.4 คำนวณค่า $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_{i+1})$ และ $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_{i+1}), \boldsymbol{z}_{i+1})$

3.5 คำนวณ $\boldsymbol{b}_i^T \boldsymbol{b}_i$ และ $D_i \boldsymbol{b}_i$ และปรับเปลี่ยนเมทริกซ์ D_i จาก

$$D_{i+1} = D_i + \frac{1}{\boldsymbol{b}_i^T \boldsymbol{b}_i} (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_{i+1}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_i) - D_i \boldsymbol{b}_i) \boldsymbol{b}_i^T$$

4. หยุดกระทำเมื่อ i มีค่ามากพอ หรือเมื่อ $\boldsymbol{b}_i^T \boldsymbol{b}_i < \varepsilon$ เมื่อ ε เป็นค่าน้อย ๆ

ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

ในการแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญโดยใช้วิธีของเทย์เลอร์อันดับสี่ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น และใช้วิธีนิวตัน-บรอยเดน ในการปรับค่าเริ่มต้น ได้เลือกตัวอย่างสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเพื่อมาทดลองหาผลเฉลย โดยการเลือกตัวอย่าง ผู้วิจัยได้คัดเลือกตัวอย่างเพื่อนำเสนอโดยให้ตัวอย่างมีความครอบคลุมปัญหาที่ปรากฏทั่ว ๆ ไป โดยมีแนวทางดังนี้

1. เป็นปัญหาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ทั้งแบบเชิงเส้น (Linear) แบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear) และสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง

2. เงื่อนไขค่าขอบ เป็นระบบสมการแบบไม่เชิงเส้น ที่ประกอบด้วยตัวแปรที่เป็นค่าที่จุดเริ่มต้น และค่าที่จุดปลายสุด ในลักษณะที่แบ่งแยกไม่ได้

3. เป็นปัญหาที่ทราบผลเฉลยแท้จริง เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของวิธีการ

ตัวอย่าง 1 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่เป็นแบบไม่เชิงเส้นอันดับสอง (Cash & Wright, 1991)

$$x'' - x - x^2 + e^{-2t} = 0$$

เงื่อนไขค่าขอบ

$$x(0)^2 + 2x'(0) + x(1) + x'(1) + 1 = 0$$

$$x(0)x'(1) + x'(0)^2 - x(0) + 2x(1) - e^{-1} = 0$$

ตัวอย่าง 2 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่เป็นแบบไม่เชิงเส้นอันดับสี่

$$x^{(4)} + xx'' - x' - (x''')^2 - 3e^t(-2t-3) + e^{2t}(8t^3 + 34t^2 + 30t + 9) = 0$$

เงื่อนไขค่าขอบ

$$x(0)^2 + x'(0)x'(1) - x(1)^2 x'''(0) + e = 0$$

$$3x'''(0)x'(1) + x'''(1) + x'(0)^2 - 1 = 0$$

$$x''(0)x''(1)^2 + x'(0)x'''(1) - 4x'(1) + 5e = 0$$

$$x''(0)^2 + x(1)x'''(1) + 3x'(0)^2 x''(1) + 4x'''(0)x'(1) = 0$$

ตัวอย่าง 3 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่เป็นแบบไม่เชิงเส้นอันดับห้า (Vedat, 2007)

$$x^{(5)} - e^{-t}x^2 = 0$$

เงื่อนไขค่าขอบ

$$x^2(0) - 2x'(0)x(1) + x''(1) + x^{(4)}(1) - 1 = 0$$

$$x'(0)x'''(1) + x''(0) - x'(1) + x'''(0) - 2x^{(4)}(0) = 0$$

$$x(0) + x^2(1) - x''(1)x'(1) - 2x'''(0) + 1 = 0$$

$$x''(0) + x'''(1) - 2x^{(4)}(1) - x^{(4)}(0) + e = 0$$

$$x'(0)x'''(0) - x(1) + x''(1) + x(0) - 2 = 0$$

ตัวอย่าง 4 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่เป็นแบบเชิงเส้นอันดับสามและอันดับหนึ่ง (Pruess, 1986)

$$x''' - x' + 4e^{2t}y - 4(t^2+1)e^t = 0$$

$$y' - tx'' + tx + y + 4t^2e^t - (2t-1)e^{-t} = 0$$

เงื่อนไขค่าขอบ

$$x''(1) + 4x'(0)x'(1) + y^2(0) = 0$$

$$x(0)^2 + y(1) + x''(0)x'(1) + x'(0) + 1 = 0$$

$$x''(1) - x(1)^2 + y(0) - x(0) - 4e = 0$$

$$y(1) - 2x''(0) + x'(1) - x(1) - e = 0$$

การแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

การแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ด้วยวิธียิงเป้าโดยใช้วิธีของเทย์เลอร์อันดับสี่ ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและปรับค่าเริ่มต้นด้วยวิธีนิวตัน-บรอยเดน มีขั้นตอนวิธีดังนี้

1. กำหนด $\boldsymbol{Y}'(t_0) = \boldsymbol{z}_0$ เป็นจุดเริ่มต้น และ D_0 (มีมิติเท่ากับ $\dfrac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial \boldsymbol{z}}$) เป็นเมทริกซ์เริ่มต้น
2. หาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น (2.25) โดยใช้จุดเริ่มต้น $\boldsymbol{z}_0$ จะได้ $\boldsymbol{Y}'(t_f)$
3. คำนวณค่า $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y}'(t_f), \boldsymbol{z})$ และให้ $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{Y}'(t_f)$
4. สำหรับ $i = 0$ ถึง K กระทำดังนี้

4.1 คำนวณ $H_i = \boldsymbol{F_u}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_i), \boldsymbol{z}_i)D_i + \boldsymbol{F_z}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_i), \boldsymbol{z}_i)$ เมื่อ $\boldsymbol{F_u}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_i), \boldsymbol{z}_i) = \dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{S}}$ และ $\boldsymbol{F_z}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_i), \boldsymbol{z}_i) = \dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{z}}$

4.2 หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น $H_i\boldsymbol{b}_i = -\boldsymbol{F}$ ได้ค่า $\boldsymbol{b}_i$

4.3 ให้ $\boldsymbol{z}_{i+1} = \boldsymbol{z}_i + \boldsymbol{b}_i$

4.4 หาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น (2.25) โดยใช้จุดเริ่มต้น $\boldsymbol{z}_{i+1}$ จะได้ $\boldsymbol{Y}'(t_f)$

4.5 คำนวณค่า $\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{Y}'(t_f)$ และ $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}_{i+1}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y}'(t_f), \boldsymbol{z}_{i+1})$

4.6 คำนวณค่า $\boldsymbol{b}_i^T\boldsymbol{b}_i$ และ $\boldsymbol{a}_i = \dfrac{1}{\boldsymbol{b}_i^T\boldsymbol{b}_i}(\boldsymbol{u}_{i+1} - \boldsymbol{u}_i - D_i\boldsymbol{b}_i)$ และปรับเปลี่ยนเมทริกซ์ D_i จาก

$$D_{i+1} = D_i + \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_i^T$$

5. หยุดกระทำเมื่อ i มีค่ามากพอ หรือเมื่อ $\boldsymbol{b}_i^T\boldsymbol{b}_i < \varepsilon$ เมื่อ ε เป็นค่าน้อย ๆ

จากขั้นตอนวิธีจะได้ว่า เราคำนวณเมทริกซ์ D แทนการคำนวณ $\dfrac{\partial \boldsymbol{S}_f}{\partial \boldsymbol{z}}$ ดังนั้นวิธีการนี้จะสามารถลดแรงงานและเวลาในการคำนวณได้ เนื่องจากเราไม่ต้องหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่เป็นแบบเชิงเส้น จะแสดงการแก้ปัญหาในตัวอย่าง 1 โดยละเอียดดังนี้

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$x'' - x - x^2 + e^{-2t} = 0 \tag{3.4}$$

เงื่อนไขค่าขอบ

$$x(0)^2 + 2x'(0) + x(1) + x'(1) + 1 = 0$$
$$x(0)x'(1) + x'(0)^2 - x(0) + 2x(1) - e^{-1} = 0 \tag{3.5}$$

1. แก้ปัญหาโดยกำหนดค่าเริ่มต้น $\boldsymbol{z}_0 = [x(0), x'(0)]^T$ และ $D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เริ่มต้น

จากปัญหาค่าขอบเราสามารถหาอนุพันธ์เพื่อใช้ในสูตรของเทย์เลอร์อันดับสี่ ได้ดังนี้

$$x'' = x + x^2 - e^{-2t}$$

$$x''' = x' + 2xx' + 2e^{-2t}$$

$$x^{(4)} = x'' + 2xx'' + 2x'^2 - 4e^{-2t}$$

$$x^{(5)} = x''' + 2xx''' + 6x'x'' + 8e^{-2t}$$

หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญข้างต้นโดยระเบียบวิธีของเทย์เลอร์อันดับสี่ โดยสูตร

$$x_{i+1} = x_i + hx'(t_i) + \frac{h^2}{2}x''(t_i) + \frac{h^3}{6}x'''(t_i) + \frac{h^4}{24}x^{(4)}(t_i)$$

และกำหนดค่า $h = 0.05$ ค่า x, x' ที่ขาดหายไปได้จากสูตร

$$x = x + hx' + \frac{h^2}{2}x'' + \frac{h^3}{6}x''' + \frac{h^4}{24}x^{(4)}$$

$$x' = x' + hx'' + \frac{h^2}{2}x''' + \frac{h^3}{6}x^{(4)} + \frac{h^4}{24}x^{(5)}$$

โดยจุดเริ่มต้น $z_0 = [x(0), x'(0)]^T$ แก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเราจะได้จุดปลายเป็น

$$\boldsymbol{X}'(t_f) = [x(1), x'(1)]^T$$

ฟังก์ชัน $\boldsymbol{F}$ คือ $\boldsymbol{F}(z) = \begin{bmatrix} x(0)^2 + 2x'(0) + x(1) + x'(1) + 1 \\ x(0)x'(1) + x'(0)^2 - x(0) + 2x(1) - e^{-1} \end{bmatrix}$

2. ตรวจสอบว่า $\boldsymbol{X}'(t_f)$ สอดคล้องเงื่อนไขค่าขอบหรือไม่ ถ้าสอดคล้องเราจะหยุด และได้ $\boldsymbol{X}(t)$ เป็นผลเฉลย ถ้ายังไม่สอดคล้องให้ทำขั้นตอนที่ 3 ต่อไป

3. คำนวณค่า $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(z) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}'(t_f), z)$ และให้ $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{X}'(t_f)$

4. สำหรับ $i = 1$ ถึง K กระทำดังนี้

4.1 คำนวณ

$$\begin{aligned} H_i &= \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{z}} + \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{S}} D_i \\ &= \begin{bmatrix} 2x(0) & 2 \\ x'(1) - 1 & 2x'(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & x(0) \end{bmatrix} D_i \end{aligned}$$

4.2 หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น $H_i \boldsymbol{b}_i = -\boldsymbol{F}$ ได้ค่า $\boldsymbol{b}_i$

4.3 ให้ $\boldsymbol{z}_{i+1} = \boldsymbol{z}_i + \boldsymbol{b}_i$

4.4 หาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น (3.4) โดยใช้จุดเริ่มต้น $\boldsymbol{z}_{i+1}$ จะได้ $\boldsymbol{X}'(t_f)$

4.5 คำนวณค่า $\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{X}'(t_f)$ และ $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}_{i+1}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}'(t_f), \boldsymbol{z}_{i+1})$

4.6 คำนวณค่า $\boldsymbol{b}_i^T \boldsymbol{b}_i$ และ $\boldsymbol{a}_i = \dfrac{1}{\boldsymbol{b}_i^T \boldsymbol{b}_i}(\boldsymbol{u}_{i+1} - \boldsymbol{u}_i - D_i \boldsymbol{b}_i)$ และปรับเปลี่ยนเมทริกซ์ D_i จาก

$$D_{i+1} = D_i + \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{b}_i^T$$

5. หยุดกระทำเมื่อ i มีค่ามากพอ หรือเมื่อ $\boldsymbol{b}_i^T \boldsymbol{b}_i < \varepsilon$ เมื่อ ε เป็นค่าน้อย ๆ

การแก้ปัญหาค่าขอบในตัวอย่าง 2 กำหนดจุดเริ่มต้น $\boldsymbol{z}_0 = [x(0), x'(0), x''(0), x'''(0)]^T$ ดังนั้นฟังก์ชัน $\boldsymbol{F}$ คือ

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}) = \begin{bmatrix} x(0)^2 + x'(0)x'(1) - x(1)^2 x'''(0) + e \\ 3x'''(0)x'(1) + x'''(1) + x'(0)^2 - 1 \\ x''(0)x''(1)^2 + x'(0)x'''(1) - 4x'(1) + 5e \\ x''(0)^2 + x(1)x'''(1) + 3x'(0)^2 x''(1) + 4x'''(0)x'(1) \end{bmatrix}$$

การแก้ปัญหาค่าขอบในตัวอย่าง 3 กำหนดจุดเริ่มต้น $\boldsymbol{z}_0 = [x(0), x'(0), x''(0), x'''(0), x^{(4)}(0)]^T$ ดังนั้นฟังก์ชัน $\boldsymbol{F}$ คือ

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}) = \begin{bmatrix} x^2(0) - 2x'(0)x(1) + x''(1) + x^{(4)}(1) - 1 \\ x'(0)x'''(1) + x''(0) - x'(1) + x'''(0) - 2x^{(4)}(0) \\ x(0) + x^2(1) - x''(1)x'(1) - 2x'''(0) + 1 \\ x''(0) + x'''(1) - 2x^{(4)}(1) - x^{(4)}(0) + e \\ x'(0)x'''(0) - x(1) + x''(1) + x(0) - 2 \end{bmatrix}$$

การแก้ปัญหาค่าขอบในตัวอย่าง 4 กำหนดจุดเริ่มต้น $\boldsymbol{z}_0 = [x(0), x'(0), x''(0), y(0)]^T$ ดังนั้นฟังก์ชัน $\boldsymbol{F}$ คือ

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}) = \begin{bmatrix} x''(1) + 4x'(0)x'(1) + y^2(0) \\ x(0)^2 + y(1) + x''(0)x'(1) + x'(0) + 1 \\ x''(1) - x(1)^2 + y(0) - x(0) - 4e \\ y(1) - 2x''(0) + x'(1) - x(1) - e \end{bmatrix}$$