

บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีเงื่อนไขทั้งสองปลาย (Two Point Boundary Value conditions) นับว่าเป็นปัญหาที่เกิดขึ้นบ่อย ๆ ในหลาย ๆ ปัญหาทางด้านคณิตศาสตร์ประยุกต์ ตัวอย่างเช่น ปัญหาการเปลี่ยนวงโคจรของยานอวกาศ (อำพล ธรรมเจริญ, 2530) ปัญหานอยมันน์ (สุทธิรา วสุวานิช, 2547)

ปัญหาค่าขอบเป็นปัญหาที่ประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขค่าขอบ

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ :

$$f(Y'(t), t) = 0 \quad (1.1)$$

เงื่อนไขค่าขอบ :

$$g(Y'(t_0), Y'(t_1), \dots, Y'(t_k)) = 0 \quad (1.2)$$

เมื่อ $t \in \mathbb{R}$, $Y'(t) = (y^{(n)}(t), y^{(n-1)}(t), \dots, y'(t), y(t)) \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$, $f: \mathbb{R}^{m \times (n+1)+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, และ $g: \mathbb{R}^{m \times (k+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ กรณีที่ $k=0$ เรียกว่าปัญหาค่าเริ่มต้น ถ้า $k=1$ จะเรียกว่าปัญหาค่าขอบสองจุด และจะเรียกว่าปัญหาค่าขอบหลายจุดในกรณีที่ $k > 1$ สำหรับปัญหาค่าขอบสองจุด ในกรณีที่เงื่อนไข (1.2) อยู่ในรูปของ $g(Y'(t_0)) = 0$, $h(Y'(t_f)) = 0$ เราจะเรียกว่า เงื่อนไขค่าขอบแบบแยกได้ ในกรณีที่ไม่สามารถเขียนเงื่อนไขค่าขอบให้อยู่ในรูปแบบดังกล่าว เราเรียกเงื่อนไขค่าขอบแบบแยกไม่ได้ จะพบว่าปัญหาค่าขอบที่มีผู้วิจัยศึกษาจำนวนมากส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปแบบปัญหาค่าขอบสองจุดที่มีเงื่อนไขค่าขอบแบบแยกได้ ในขณะที่ปัญหาค่าขอบที่มีเงื่อนไขค่าขอบแบบแยกไม่ได้ยังไม่ค่อยถูกนำมาพิจารณาเท่าที่ควร ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาปัญหาในลักษณะดังกล่าว

การพิสูจน์การมีผลเฉลยแน่นอนและมีเพียงผลเฉลยเดียว (The Existence and Uniqueness) สำหรับปัญหาค่าขอบบางปัญหาได้ถูกพิจารณาใน (Jiang & Cui, 2009; Keller, 1966; Tao & Gao, 2002) แต่ในหลาย ๆ ปัญหาการพิสูจน์การมีผลเฉลยแน่นอนและมีเพียงผลเฉลยเดียวทำได้ยาก ดังนั้นการพิสูจน์ผู้วิจัยขอละไว้ไม่นำมาพิจารณาในวิทยานิพนธ์นี้ โดยในวิทยานิพนธ์นี้มีข้อสมมุติว่า ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (1.1), (1.2) มีผลเฉลย

การหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบโดยการวิเคราะห์นั้นอาจเป็นไปได้แต่ก็เพียงเฉพาะปัญหาบางชนิด บางแบบเท่านั้น เพราะปัญหาส่วนใหญ่ค่อนข้างยากเนื่องจากมีสมการเชิงอนุพันธ์

สามัญ หรือเงื่อนไขค่าขอบที่ซับซ้อน จึงต้องใช้วิธีทางตัวเลขช่วยในการประมาณค่าผลเฉลย เช่น วิธีผลต่างจำกัด (Finite-Difference Method) วิธีฟังก์ชันประมาณค่า (Collocation Method) วิธียิงเป้า (Shooting Method) (อำพล ธรรมเจริญ, 2532) วิธี monotone iterative (Cherpion, Coster, & Habets, 2001; Elloe & Zhang, 1998) วิธี quasilinearization (Ahmad, Nieto, & Shahzad, 2002; Khan, 2006) และวิธี variational iteration (Lu, 2007; Momani, Abuasad, & Odibat, 2006)

วิธียิงเป้าของนิวตันเป็นวิธีหนึ่งที่มีประสิทธิภาพและได้รับความนิยมมากในการใช้แก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ แต่มิข้อจำกัดคือ ต้องใช้แรงงานในการคำนวณสูง จากข้อจำกัดดังกล่าวผู้วิจัยจึงมีแนวคิดในการศึกษาวิธีการแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญโดยใช้วิธีนิวตัน-บรอยเดน ในการปรับค่าเริ่มต้นซึ่งวิธีการนี้เป็นวิธีแนวนิวตันโดยใช้การประมาณค่าเมทริกซ์จาโคเบียน ซึ่งจะทำให้แรงงานในการคำนวณลดลง

ในคุณูปนิพนธ์ผู้วิจัยจะศึกษาวิธีการหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีเงื่อนไขค่าขอบแบบแยกไม่ได้ โดยใช้วิธียิงเป้าแต่ใช้วิธีนิวตัน-บรอยเดน ในการปรับค่าเริ่มต้น โดยในตัวอย่างจะแสดงให้เห็นว่าวิธีใหม่ที่น่าสนใจมีประสิทธิภาพและใช้แรงงานน้อย

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อหาวิธีการแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีเงื่อนไขค่าขอบแบบแยกไม่ได้

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

ได้วิธีการแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีเงื่อนไขค่าขอบแบบแยกไม่ได้ที่มีประสิทธิภาพและใช้แรงงานน้อย

ขอบเขตของการวิจัย

1. ศึกษาปัญหาสมการค่าขอบแบบแยกไม่ได้ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
2. ใช้วิธียิงเป้าในการแก้ปัญหาค่าขอบโดยใช้ระเบียบวิธีของเทย์เลอร์อันดับสี่ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นและใช้ระเบียบวิธีนิวตัน-บรอยเดน ในการปรับค่าเริ่มต้น

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. Newton Shooting method (NSM) แทน การแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีเงื่อนไขค่าขอบแบบแยกไม่ได้โดยวิธียิงเป้าและใช้วิธีของนิวตัน ในการปรับค่าเริ่มต้น

2. Broyden Shooting method (BSM) แทน การแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีเงื่อนไขค่าขอบแบบแยกไม่ได้โดยวิธียิงเป้าและใช้วิธีของบรอยเดน ในการปรับค่าเริ่มต้น

3. Newton-Broyden Shooting method (NBSM) แทน การแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีเงื่อนไขค่าขอบแบบแยกไม่ได้โดยวิธียิงเป้าและใช้วิธีนิวตัน-บรอยเดน ในการปรับค่าเริ่มต้น

มหาวิทยาลัยบูรพา
Burapha University