

บทที่ 5

อภิปรายและสรุปผล

จากการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น ที่มีรูปแบบของสมการเฉพาะ คือ สมการบูซิเน และสมการไคลน์-กอร์ดอน ซึ่งมุ่งเน้นการหาผลเฉลยโดยใช้วิธีไฮเพอร์โบลิก เซแคนต์ เพื่อให้ได้ผลเฉลยที่มีรูปแบบทั่วไป และสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับสมการที่มีค่าสัมประสิทธิ์เฉพาะแยกตามกรณี เพื่อให้เราได้ผลเฉลยในรูปแบบต่าง ๆ ทั้งที่เป็นผลเฉลยจริง ผลเฉลยเชิงซ้อน และผลเฉลยแบบคาบ สำหรับค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่เป็นจำนวนจริงสามารถสรุปผลวิเคราะห์ได้ ดังนี้

อภิปรายและสรุปผลการวิเคราะห์

1. การหาผลเฉลยโดยวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์

จากวิธีการหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น โดยวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์นั้นนับว่าเป็นวิธีที่ไม่ซับซ้อนในการคำนวณหาค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ทั้งยังได้ผลเฉลยที่แน่นอน แต่แตกต่างจากบางวิธีที่สามารถหาผลเฉลยได้ เริ่มต้นการเลือกตัวแปรอิสระใหม่ วิธีนี้จะกำหนดตัวแปรเพียงตัวเดียวเท่านั้น อีกทั้งเมื่อหาผลเฉลยได้แล้วเราสามารถแทนค่าของพารามิเตอร์ต่าง ๆ ลงในรูปแบบของคำตอบได้อย่างชัดเจน ซึ่งต่างจากวิธีไซน์-โคไซน์นั้นอาจจะต้องเลือกตัวแปรอิสระใหม่หลายกรณี และผลเฉลยที่หาโดยวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์นั้นเป็นผลเฉลยที่ชัดเจน ไม่ต้องเปลี่ยนรูปแบบของผลเฉลยเป็นรูปแบบอื่นๆ แต่ผลเฉลยที่หาโดยวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์และวิธีขยายไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์นั้นอาจต้องเปลี่ยนรูปแบบของผลเฉลยใหม่ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกอื่น ดังนั้นวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ นับว่าเป็นวิธีที่สามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้นได้อย่างมีประสิทธิภาพ

2. ผลเฉลยของสมการบูซิเน

โดยวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ เราสามารถหาผลเฉลยของสมการบูซิเน ที่มีรูปแบบเป็น

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} - b(u^2)_{xx} + u_{xxx} = 0$$

ทำให้ได้ผลเฉลยใหม่แบ่งได้ ดังนี้

2.1 ค่าของพารามิเตอร์ a_0, a_1, a_2 และ μ ชุดที่ 1

2.1.1 ผลเฉลยจริง สำหรับค่าพารามิเตอร์ $c^2 - a^2 > 0$

2.1.2 ผลเฉลยแบบคาบ สำหรับค่าพารามิเตอร์ $c^2 - a^2 < 0$

2.2 ค่าของพารามิเตอร์ a_0, a_1, a_2 และ μ ชุดที่ 2

2.2.1 ผลเฉลยจริง สำหรับค่าพารามิเตอร์ $a^2 - c^2 > 0$

2.2.2 ผลเฉลยแบบคาบ สำหรับค่าพารามิเตอร์ $a^2 - c^2 < 0$

เมื่อ a และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

3. ผลเฉลยของสมการไคลน์-กอร์ดอน

โดยวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ เราสามารถหาผลเฉลยของสมการไคลน์-กอร์ดอน ที่มีรูปแบบเป็น

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha u - \beta u^2 = 0$$

ทำให้ได้ผลเฉลยใหม่แบ่งได้ ดังนี้

3.1 ค่าของพารามิเตอร์ a_0, a_1, a_2 และ μ ชุดที่ 1

3.1.1 ผลเฉลยจริง สำหรับค่าพารามิเตอร์ $\frac{\alpha}{c^2 - 1} > 0$

3.1.2 ผลเฉลยแบบคาบ สำหรับค่าพารามิเตอร์ $\frac{\alpha}{c^2 - 1} < 0$

3.2 ค่าของพารามิเตอร์ a_0, a_1, a_2 และ μ ชุดที่ 2

3.2.1 ผลเฉลยจริง สำหรับค่าพารามิเตอร์ $\frac{\alpha}{1 - c^2} > 0$

3.2.2 ผลเฉลยแบบคาบ สำหรับค่าพารามิเตอร์ $\frac{\alpha}{1 - c^2} < 0$

ข้อเสนอแนะ

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยทำการหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นที่มีรูปแบบเฉพาะ คือ สมการบูซิเน และสมการไคลน์-กอร์ดอน โดยวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์แต่โดยทั่วไปยังมีปัญหาที่มีรูปแบบเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นในลักษณะอื่น ๆ ที่ยังไม่ถูกพิจารณาเพื่อหาผลเฉลยที่มีรูปแบบทั่วไป ซึ่งเป็นพื้นฐานในการนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาที่มีรูปแบบเฉพาะ อาทิเช่น สมการกลุ่มบูซิเน และสมการไคลน์-กอร์ดอน ที่อยู่ในรูปแบบอื่น ๆ