บทที่ 4
ผลการวิจัย

สมการบูซิเน

พิจารณารูปแบบทั่วไปของสมการบูซิเน (3.6) และกำหนดตัวแปรคลื่น $\xi = x - ct$ จะได้

$$u(x,t) = U(\mu\xi) \tag{4.1}$$

โดยเราจะเขียนแทน $u(x,t)$ ด้วยสัญลักษณ์ u และ $U(\mu\xi)$ ด้วยสัญลักษณ์ U หาอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= -c\frac{dU}{d\xi} \\
\frac{du}{dx} &= \frac{dU}{d\xi} \\
\frac{d^2u}{dt^2} &= c^2\frac{d^2U}{d\xi^2} \\
\frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{d^2U}{d\xi^2} \\
\frac{d^4u}{dx^4} &= \frac{d^4U}{d\xi^4}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

สำหรับอนุพันธ์อันดับอื่น ๆ ก็สามารถคำนวณหาได้ในทำนองเดียวกัน แทนค่าอนุพันธ์ (4.2) ในสมการ (3.6) จะได้

$$c^2\frac{d^2U}{d\xi^2} - a^2\frac{d^2U}{d\xi^2} - b\frac{d^2(U^2)}{d\xi^2} + \frac{d^4U}{d\xi^4} = 0 \tag{4.3}$$

หาปริพันธ์สมการ (4.3) เทียบ ξ และกำหนดให้ค่าคงที่การปริพันธ์เป็นศูนย์จะได้

$$c^2U - a^2U - bU^2 + \frac{d^2U}{d\xi^2} = 0 \tag{4.4}$$

กำหนดให้

$$U(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k \tag{4.5}$$

เมื่อ M เป็นจำนวนเต็มบวก และเขียน $S(Y)$ แทนด้วยสัญลักษณ์ S จากนั้นกำหนดตัวแปรอิสระใหม่ คือ

$$Y = \operatorname{sech}(\mu\xi) \tag{4.6}$$

หาอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\xi} &= -\mu Y\sqrt{1-Y^2}\,\frac{dS}{dY} \\ \frac{d^2U}{d\xi^2} &= \mu^2\left[\left(Y-2Y^3\right)\frac{dS}{dY}+\left(Y^2-Y^4\right)\frac{d^2S}{dY^2}\right] \end{aligned} \tag{4.7}$$

แทนค่า (4.5) และ (4.7) ในสมการ (4.4) จะได้

$$c^2S - a^2S - bS^2 + \mu^2\left[\left(Y-2Y^3\right)\frac{dS}{dY}+\left(Y^2-Y^4\right)\frac{d^2S}{dY^2}\right] = 0 \tag{4.8}$$

จาก (4.8) นำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นที่มีอนุพันธ์อันดับสูงสุด คือ $\mu^2 Y^4 \dfrac{d^2S}{dY^2}$ และพจน์ที่ไม่เชิงเส้นที่มีอันดับสูงสุด คือ bS^2 มาเปรียบเทียบเลขชี้กำลังเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ M ได้โดยการกระจายอนุกรม $S(Y)$ ในสมการ (4.5) และหาอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$S(Y)=\sum_{k=0}^{M}a_kY^k=a_0+a_1Y+a_2Y^2+...+a_MY^M$$
$$\frac{dS}{dY}=\sum_{k=0}^{M}ka_kY^{k-1}=a_1+2a_2Y+3a_3Y^2+...+Ma_MY^{M-1} \tag{4.9}$$
$$\frac{d^2S}{dY^2}=\sum_{k=0}^{M}k(k-1)a_kY^{k-2}=2a_2+6a_3Y+...+M(M-1)a_MY^{M-2}$$

ดังนั้นจะได้

$$bS^2=b\left(\sum_{k=0}^{M}a_kY^k\right)^2=b\left(a_0+a_1Y+a_2Y^2+...+a_MY^M\right)^2 \tag{4.10}$$

และ

$$\mu^2Y^4\frac{d^2S}{dY^2}=\mu^2Y^4\sum_{k=0}^{M}k(k-1)a_kY^{k-2}$$
$$=\mu^2Y^4\left(2a_2+6a_3Y+...+M(M-1)a_MY^{M-2}\right) \tag{4.11}$$

เทียบเลขชี้กำลัง Y^{2M} ในสมการ (4.10) และ Y^{4+M-2} ในสมการ (4.11) จะได้

$$2M=4+M-2$$
$$M=2$$

แทนค่า $M=2$ ในสมการ (4.5) จะได้

$$S(Y)=a_0+a_1Y+a_2Y^2 \tag{4.12}$$

และ
$$\frac{dS}{dY}=a_1+2a_2Y$$
$$\tag{4.13}$$
$$\frac{d^2S}{dY^2}=2a_2$$

แทนค่า (4.12) และ (4.13) ในสมการ (4.8) จะได้สมการวิเคราะห์ในรูปแบบปิดดังนี้

$$c^2\left(a_0+a_1Y+a_2Y^2\right)-a^2\left(a_0+a_1Y+a_2Y^2\right)-b\left(a_0+a_1Y+a_2Y^2\right)^2$$
$$+\mu^2\left[\left(Y-2Y^3\right)\left(a_1+2a_2Y\right)+\left(Y^2-Y^4\right)\left(2a_2\right)\right]=0$$

จัดสมการใหม่

$$\begin{aligned}&\left(c^2a_0-a^2a_0-ba_0^2\right)+\left(c^2a_1-a^2a_1-2ba_0a_1+\mu^2a_1\right)Y\\&+\left(c^2a_2-a^2a_2-2ba_0a_2-ba_1^2+4\mu^2a_2\right)Y^2+\left(-2ba_1a_2-2\mu^2a_1\right)Y^3\\&+\left(-ba_2^2-6\mu^2a_2\right)Y^4=0\end{aligned} \tag{4.14}$$

เทียบสัมประสิทธิ์แต่ละเลขชี้กำลังของ Y จะได้

$$\begin{array}{lll}\text{สัมประสิทธิ์ของ } Y^0 & ; & c^2a_0-a^2a_0-ba_0^2\\ \text{สัมประสิทธิ์ของ } Y^1 & ; & c^2a_1-a^2a_1-2ba_0a_1+\mu^2a_1\\ \text{สัมประสิทธิ์ของ } Y^2 & ; & c^2a_2-a^2a_2-2ba_0a_2-ba_1^2+4\mu^2a_2\\ \text{สัมประสิทธิ์ของ } Y^3 & ; & -2ba_1a_2-2\mu^2a_1\\ \text{สัมประสิทธิ์ของ } Y^4 & ; & -ba_2^2-6\mu^2a_2\end{array} \tag{4.15}$$

แก้ระบบสมการ (4.15) จะทำให้ได้ค่าของพารามิเตอร์ a_0,a_1,a_2 และ μ ดังนี้

$$\text{ชุดที่ 1}:\quad a_0=\frac{c^2-a^2}{b},\quad a_1=0,\quad a_2=\frac{3\left(a^2-c^2\right)}{2b},\quad \mu=\pm\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{2} \tag{4.16}$$

$$\text{ชุดที่ 2}:\quad a_0=0,\qquad a_1=0,\quad a_2=\frac{3\left(c^2-a^2\right)}{2b},\quad \mu=\pm\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{2} \tag{4.17}$$

แทนค่า (4.16) ในสมการ (4.12) โดยเงื่อนไข

$$Y=\operatorname{sech}\left(\mu\xi\right)$$

และ $$\xi = x - ct$$

จากค่าของพารามิเตอร์ a_0, a_1, a_2 และ μ ของสมการ (4.16) จะทำให้ได้ผลเฉลย ดังนี้

ผลเฉลยจริง เมื่อ $c^2 > a^2$

$$u_1(x,t) = \frac{c^2 - a^2}{b} + \frac{3(a^2 - c^2)}{2b}\left[\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{2}(x - ct)\right)\right] \tag{4.18}$$

$$u_2(x,t) = \frac{c^2 - a^2}{b} + \frac{3(a^2 - c^2)}{2b}\left[\operatorname{sech}^2\left(-\frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{2}(x - ct)\right)\right] \tag{4.19}$$

จากสมการ (4.18) และ (4.19) เมื่อ $c^2 < a^2$ จะทำให้ได้ผลเฉลยแบบคาบ ดังนี้

$$u_3(x,t) = \frac{c^2 - a^2}{b} + \frac{3(a^2 - c^2)}{2b}\left[\sec^2\left(\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{2}(x - ct)\right)\right] \tag{4.20}$$

$$u_4(x,t) = \frac{c^2 - a^2}{b} + \frac{3(a^2 - c^2)}{2b}\left[\sec^2\left(-\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{2}(x - ct)\right)\right] \tag{4.21}$$

จากค่าของพารามิเตอร์ a_0, a_1, a_2 และ μ ของสมการ (4.17) จะทำให้ได้ผลเฉลย ดังนี้

ผลเฉลยจริง เมื่อ $a^2 > c^2$

$$u_5(x,t) = \frac{3(c^2 - a^2)}{2b}\left[\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{2}(x - ct)\right)\right] \tag{4.22}$$

$$u_6(x,t) = \frac{3(c^2 - a^2)}{2b}\left[\operatorname{sech}^2\left(-\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{2}(x - ct)\right)\right] \tag{4.23}$$

จากสมการ (4.22) และ (4.23) เมื่อ $a^2 < c^2$ จะทำให้ได้ผลเฉลยแบบคาบ ดังนี้

$$u_7(x,t)=\frac{3\left(c^2-a^2\right)}{2b}\left[\sec^2\left(\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{2}(x-ct)\right)\right] \tag{4.24}$$

$$u_8(x,t)=\frac{3\left(c^2-a^2\right)}{2b}\left[\sec^2\left(-\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{2}(x-ct)\right)\right] \tag{4.25}$$

สมการไคลน์-กอร์ดอน

พิจารณารูปแบบทั่วไปของสมการไคลน์-กอร์ดอน (3.7) แทนค่าสมการ (4.2) จะเปลี่ยนเป็น

$$c^2\frac{d^2U}{d\xi^2}-\frac{d^2U}{d\xi^2}+\alpha U-\beta U^2=0 \tag{4.26}$$

แทนค่า (4.5) และ (4.7) ในสมการ (4.26) จะได้

$$\left(c^2-1\right)\mu^2\left[\left(Y-2Y^3\right)\frac{dS}{dY}+\left(Y^2-Y^4\right)\frac{d^2S}{dY^2}\right]+\alpha S-\beta S^2=0 \tag{4.27}$$

จาก (4.27) นำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นที่มีอนุพันธ์อันดับสูงสุด คือ $\left(c^2-1\right)\mu^2Y^4\frac{d^2S}{dY^2}$ และพจน์ที่ไม่เชิงเส้นที่มีอันดับสูงสุด คือ βS^2 มาเปรียบเทียบเลขชี้กำลังเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ M ได้โดยการกระจายอนุกรม $S(Y)$ ในสมการ (4.5) ดังนั้นจะได้

$$\beta S^2=\beta\left(\sum_{k=0}^{M}a_kY^k\right)^2=\beta\left(a_0+a_1Y+a_2Y^2+\ldots+a_MY^M\right)^2 \tag{4.28}$$

และ

$$\begin{aligned}\left(c^2-1\right)\mu^2Y^4\frac{d^2S}{dY^2}&=\left(c^2-1\right)\mu^2Y^4\sum_{k=0}^{M}k(k-1)a_kY^{k-2}\\&=\left(c^2-1\right)\mu^2Y^4\left(2a_2+6a_3Y+\ldots+M(M-1)a_MY^{M-2}\right)\end{aligned} \tag{4.29}$$

เทียบเลขชี้กำลัง Y^{2M} ในสมการ (4.28) และ Y^{4+M-2} ในสมการ (4.29) จะได้

$$\begin{aligned} 2M &= 4 + M - 2 \\ M &= 2 \end{aligned}$$

แทนค่า $M = 2$ ในสมการ (4.5) จะได้

$$S(Y) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 \tag{4.30}$$

และ

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dY} &= a_1 + 2a_2 Y \\ \frac{d^2 S}{dY^2} &= 2a_2 \end{aligned} \tag{4.31}$$

แทนค่า (4.30) และ (4.31) ในสมการ (4.27) จะได้สมการวิเคราะห์ในรูปแบบปิดดังนี้

$$\begin{aligned} &\left(c^2 - 1\right)\mu^2\left[\left(Y - 2Y^3\right)\left(a_1 + 2a_2 Y\right) + \left(Y^2 - Y^4\right)\left(2a_2\right)\right] \\ &+\alpha\left(a_0 + a_1 Y + 2a_2 Y^2\right) - \beta\left(a_0 + a_1 Y + 2a_2 Y^2\right)^2 = 0 \end{aligned}$$

จัดสมการใหม่

$$\begin{aligned} &\left(\alpha a_0 - \beta a_0^2\right) + \left(\mu^2 c^2 a_1 - \mu^2 a_1 + \alpha a_1 - 2\beta a_0 a_1\right)Y \\ &+\left(4\mu^2 c^2 a_2 - 4\mu^2 a_2 + \alpha a_2 - 2\beta a_0 a_2 - \beta a_1^2\right)Y^2 \\ &+\left(-2\mu^2 c^2 a_1 + 2\mu^2 a_1 - 2\beta a_1 a_2\right)Y^3 + \left(-6\mu^2 c^2 a_2 + 6\mu^2 a_2 - \beta a_2^2\right) = 0 \end{aligned} \tag{4.32}$$

เทียบสัมประสิทธิ์แต่ละเลขชี้กำลังของ Y จะได้

สัมประสิทธิ์ของ Y^0 ; $\alpha a_0 - \beta a_0^2$

สัมประสิทธิ์ของ Y^1 : $\mu^2 c^2 a_1 - \mu^2 a_1 + \alpha a_1 - 2\beta a_0 a_1$

สัมประสิทธิ์ของ Y^2 ; $4\mu^2c^2a_2 - 4\mu^2a_2 + \alpha a_2 - 2\beta a_0a_2 - \beta a_1^2$ (4.33)
สัมประสิทธิ์ของ Y^3 ; $-2\mu^2c^2a_1 + 2\mu^2a_1 - 2\beta a_1a_2$
สัมประสิทธิ์ของ Y^4 ; $-6\mu^2c^2a_2 + 6\mu^2a_2 - \beta a_2^2$

แก้ระบบสมการ (4.33) จะทำให้ได้ค่าของพารามิเตอร์ a_0, a_1, a_2 และ μ ดังนี้

ชุดที่ 1 : $a_0 = \dfrac{\alpha}{\beta}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\dfrac{3\alpha}{2\beta}, \quad \mu = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\alpha}{c^2-1}}$ (4.34)

ชุดที่ 2 : $a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \dfrac{3\alpha}{2\beta}, \quad \mu = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\alpha}{1-c^2}}$ (4.35)

จากค่าของพารามิเตอร์ a_0, a_1, a_2 และ μ ของสมการ (4.34) จะทำให้ได้ผลเฉลย ดังนี้

ผลเฉลยจริง เมื่อ $\dfrac{\alpha}{c^2-1} > 0$

$$u_1(x,t) = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{3\alpha}{2\beta}\left[\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{c^2-1}}(x-ct)\right)\right] \tag{4.36}$$

$$u_2(x,t) = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{3\alpha}{2\beta}\left[\operatorname{sech}^2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{c^2-1}}(x-ct)\right)\right] \tag{4.37}$$

จากสมการ (4.36) และ (4.37) เมื่อ $\dfrac{\alpha}{c^2-1} < 0$ จะทำให้ได้ผลเฉลยแบบคาบ ดังนี้

$$u_3(x,t) = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{3\alpha}{2\beta}\left[\sec^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{1-c^2}}(x-ct)\right)\right] \tag{4.38}$$

$$u_4(x,t) = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{3\alpha}{2\beta}\left[\sec^2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{1-c^2}}(x-ct)\right)\right] \tag{4.39}$$

จากค่าของพารามิเตอร์ a_0, a_1, a_2 และ μ ของสมการ (4.35) จะทำให้ได้ผลเฉลย ดังนี้

ผลเฉลยจริง เมื่อ $\frac{\alpha}{1-c^2} > 0$

$$u_5(x,t) = \frac{3\alpha}{2\beta}\left[\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{1-c^2}}(x-ct)\right)\right] \tag{4.40}$$

$$u_6(x,t) = \frac{3\alpha}{2\beta}\left[\operatorname{sech}^2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{1-c^2}}(x-ct)\right)\right] \tag{4.41}$$

จากสมการ (4.40) และ (4.41) เมื่อ $\frac{\alpha}{1-c^2} < 0$ จะทำให้ได้ผลเฉลยแบบคาบ ดังนี้

$$u_7(x,t) = \frac{3\alpha}{2\beta}\left[\sec^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{c^2-1}}(x-ct)\right)\right] \tag{4.42}$$

$$u_8(x,t) = \frac{3\alpha}{2\beta}\left[\sec^2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{c^2-1}}(x-ct)\right)\right] \tag{4.43}$$