บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่ใช้ในงานวิจัยนี้ ที่ประกอบไปด้วยบทนิยามและแนวคิดรวมทั้งงานวิจัยต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย และวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ ซึ่งเป็นส่วนประกอบสำคัญสำหรับงานวิจัยนี้อย่างมาก

ความรู้พื้นฐาน

วรรณ์ทนา ภาณุพินทุ (2549) ปัญหาต่าง ๆ ที่เราพบในชีวิตประจำวันนั้นสามารถพิจารณาเป็นสมการคณิตศาสตร์ ที่อยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน อัตราการเพิ่มของประชากร ปัญหาของการนำความร้อนในแท่งโลหะ หรือแผ่นโลหะ การหาประจุหรือกระแสในวงจรไฟฟ้า การสั่นของเส้นลวด อัตราการสลายตัวของกัมมันตภาพรังสีเป็นต้น จะเห็นว่าสมการเชิงอนุพันธ์นั้น เป็นพื้นฐานที่สำคัญทั้งในสาขาคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ เพราะว่ากฎเกณฑ์และปัญหาต่าง ๆ ในสาขาวิชาเหล่านี้ล้วนพิจารณาเป็นสมการคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ทั้งสิ้น

นิยาม 2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation) หมายถึง สมการที่มีอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่า (unknown function) รวมอยู่ด้วย ซึ่งอนุพันธ์ที่ปรากฏจะมีเพียงหนึ่งหรือมากกว่าก็ได้ แบ่งได้เป็น 2 ประเภท คือ

1. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equation)
2. สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation)

นิยาม 2.2 สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีฟังก์ชันไม่ทราบค่าของตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equation)

นิยาม 2.3 สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีฟังก์ชันไม่ทราบค่าของตัวแปรอิสระมากกว่าหนึ่งตัวแปรเรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation)

สำหรับในงานวิจัยฉบับนี้เรามุ่งเน้นที่การศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ซึ่งเป็นสมการที่มีตัวแปรอิสระหลายตัว โดยแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้น และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น มีรูปแบบ และการเขียนสัญลักษณ์ ดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม 2.4 ให้ u เป็นตัวแปรอิสระ n ตัว ($x_1, x_2, ..., x_n$) อนุพันธ์ของ u เทียบกับ x_i

โดยเราจะหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับ x ก่อน แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้มาหาอนุพันธ์เทียบ t อีกครั้ง

นิยาม 2.5 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย คือสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีฟังก์ชันไม่ทราบค่าตัวแปรมากกว่า 1 ตัวแปรปรากฏอยู่ในสมการโดยที่สมการมีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันดังนี้

$$P(x,y,z,t:u,u_x,u_y,u_z,u_t,u_{xx},\ldots)=0$$

เมื่อ x,y,z,t เป็นตัวแปรอิสระ u เป็นตัวแปรตาม และ

$$u_x,u_y,u_z,u_t,u_{xx},u_{yy},u_{zz},u_{tt},u_{xy},u_{xz},\ldots$$

เป็นอนุพันธ์ย่อยอันดับต่าง ๆ ของ u

นิยาม 2.6 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (2.1) จะเรียกว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้น (linear partial differential equation) ถ้าฟังก์ชัน P มีสภาพเชิงเส้นในแต่ละตัวแปร $u,u_x,u_y,\ldots$ และถ้าสัมประสิทธิ์ของ u และอนุพันธ์ของ u เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระเท่านั้น สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นจะเรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น (nonlinear partial differential equation)

ในการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ สามารถหาคำตอบของสมการได้ง่ายตามวิธีการต่างๆ เช่น วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ ใช้ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ วิธีแปรตัวพารามิเตอร์ เป็นต้น แต่สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย จะไม่มีรูปแบบวิธีการที่แน่นอนในการหาคำตอบของสมการ สามารถเลือกใช้วิธีการหาคำตอบได้หลายวิธี ซึ่งหลักการเลือกใช้นั้นขึ้นอยู่กับรูปแบบเฉพาะของแต่ละสมการ เช่น วิธีเอ็กซ์โพเนเชียลฟังก์ชัน วิธีไซน์-โคไซน์ วิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน วิธีการแปลงเชิงเส้นคู่ วิธีไฮเพอร์โบลิกแธนเจนต์ เป็นต้น โดยสมการเชิงอนุพันธ์ทั้ง 2 แบบ จะถูกจำแนกตามอันดับสูงสุดของฟังก์ชันไม่ทราบค่า

สมการบูซิเน

สมการบูซิเน ที่มีรูปแบบเป็น

$$u_{tt}-a^2u_{xx}-b\left(u^2\right)_{xx}+u_{xxxx}=0 \tag{2.1}$$

เมื่อ x,t เป็นตัวแปรอิสระ u เป็นตัวแปรตาม และ a,b เป็นพารามิเตอร์ใด ๆ

สมการบูซิเนเป็นสมการที่อธิบายเกี่ยวกับการแพร่ขยายของคลื่นยาวในน้ำตื้น และสมการนี้อธิบายเกี่ยวกับปรากฏการณ์ทางกายภาพ เช่น การแพร่ประสานกันของคลื่น คลื่นเสียงในก๊าซร้อนจัด และการสั่นสะเทือนของเส้นลวด และนอกจากนี้ยังได้นำไปใช้ในการอธิบายปัญหาเกี่ยวกับการไหลผ่านของน้ำใต้ผิวดิน

สมการไคลน์-กอร์ดอน

สมการไคลน์-กอร์ดอน (Klein-Gordon) ที่มีรูปแบบเป็น

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha u - \beta u^2 = 0 \tag{2.2}$$

เมื่อ x,t เป็นตัวแปรอิสระ u เป็นตัวแปรตาม และ α, β เป็นพารามิเตอร์ใด ๆ

สมการไคลน์-กอร์ดอนเป็นสมการที่อธิบายเกี่ยวกับปรากฏการณ์ที่สำคัญทางวิทยาศาสตร์ เช่น ลักษณะทางกายภาพในสถานะของแข็ง และทฤษฎีเกี่ยวกับสนามรังสี

วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์

แกนจิ และอับดุลลาซาเด (Ganji and Abdollahzadeh, 2008) วิธีไฮเพอร์โบลิกแธนเจนต์ และวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ ถูกนำเสนอโดย มาลเฟลท (Malfliet, 1992) และมีการพัฒนามาอย่างต่อเนื่อง สามารถสรุปได้เป็นขั้นตอนวิธีดังนี้

1. พิจารณารูปแบบทั่วไปของสมการไม่เชิงเส้น

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}, \ldots) = 0 \tag{2.3}$$

เมื่อ x,t เป็นตัวแปรอิสระ u เป็นตัวแปรตาม และ

2. หาคำตอบของสมการ (2.2) โดยกำหนดตัวแปรคลื่นเดี่ยว $\xi = x - ct$ ดังนั้น จะได้

$$u(x,t) = U(\mu\xi) \tag{2.4}$$

โดยที่คำตอบคลื่น $U(\mu\xi)$ นั้นเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว c ด้วยข้อตกลงนี้เราจะได้

$$\frac{d}{dt} = -c\frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d^2}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = c^2\frac{d^2}{d\xi^2}$$

(2.5)

$$\frac{d^3}{dx^3} = \frac{d^3}{d\xi^3}$$

$$\frac{d^4}{dx^4} = \frac{d^4}{d\xi^4}$$

$$\frac{d^6}{dx^6} = \frac{d^6}{d\xi^6}$$

$$\frac{d^n}{dx^n} = \frac{d^n}{d\xi^n}$$

และอนุพันธ์อันดับอื่น ๆ อีก ซึ่งในที่นี้ $\frac{d}{dt}$ คือ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระ t ซึ่งสามารถคำนวณได้โดยอาศัยกฎลูกโซ่ แสดงรายละเอียด ดังนี้จากสมการตั้งต้น

$$u(x,t) = U(\mu\xi)$$

โดยการใช้สัญลักษณ์ u แทน $u(x,t)$ และใช้สัญลักษณ์ U แทน $U(\mu\xi)$ ภายใต้เงื่อนไข

$$\xi = x - ct$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \frac{dU}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt} \\
&= \frac{dU}{d\xi}\cdot\frac{d}{dt}(x-ct) \\
&= \frac{dU}{d\xi}\cdot\left[\frac{d}{dt}(x)-\frac{d}{dt}(ct)\right] \\
&= \frac{dU}{d\xi}\cdot\left[\frac{d}{dt}(x)-c\frac{d}{dt}(t)\right] \\
&= \frac{dU}{d\xi}\cdot(0-c) \\
&= -c\frac{dU}{d\xi}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

และสามารถคำนวณหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรตาม u เทียบกับตัวแปรอิสระ x ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= \frac{dU}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx} \\
&= \frac{dU}{d\xi}\cdot\frac{d}{dx}(x-ct) \\
&= \frac{dU}{d\xi}\cdot\left[\frac{d}{dx}(x)-c\frac{d}{dx}(t)\right] \\
&= \frac{dU}{d\xi}\cdot(1-0)
\end{aligned}$$

$$= \frac{dU}{d\xi}$$

เมื่อแทนสมการ (2.4) แล้วจะทำให้แปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย สมการ (2.2) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$P(U, U', U'', \ldots) = 0 \tag{2.6}$$

เมื่อ U เป็นตัวแปรตาม เทียบตัวแปรอิสระ ξ

3. ถ้าทุกเทอมของผลลัพธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญนั้นมีอนุพันธ์ของ ξ แล้วเราจะสามารถปริพันธ์สมการนี้ได้ และกำหนดให้ค่าคงที่ของการปริพันธ์เป็นศูนย์ จะทำให้เราได้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่จัดรูปเรียบร้อยแล้ว

4. ในขั้นนี้เราจะกำหนดตัวแปรอิสระใหม่คือ

$$Y = \operatorname{sech}(\mu\xi) \tag{2.7}$$

ผลจากการกำหนดข้างต้น เราสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้โดยอาศัยทฤษฎีพื้นฐาน

$$\cosh^2(\mu\xi) - \sinh^2(\mu\xi) = 1$$

ซึ่งหาอนุพันธ์ได้โดยกฎลูกโซ่จะได้

$$\frac{d}{d\xi} = \frac{d}{dY}\frac{dY}{d\xi} = -\mu Y\sqrt{1-Y^2}\,\frac{d}{dY}$$

ทำให้เราหาอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{d}{d\xi} = -\mu Y\sqrt{1-Y^2}\,\frac{d}{dY} \tag{2.8}$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} = -\mu Y\sqrt{1-Y^2}\left(-\mu\sqrt{1-Y^2}\,\frac{d}{dY} + \mu\frac{Y^2\frac{d}{dY}}{\sqrt{1-Y^2}} - \mu Y\sqrt{1-Y^2}\,\frac{d^2}{dY^2}\right)$$

และสามารถหาอนุพันธ์อันดับอื่น ๆ ได้ในทำนองเดียวกัน

5. กำหนดให้

$$U(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k \tag{2.9}$$

เมื่อ M เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งเราจะต้องหาค่า M นี้เพื่อแทนในสมการ (2.7) และ (2.8) ในสมการ (2.5) ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ จะได้สมการที่เป็นสมการยกกำลังของ Y

6. พารามิเตอร์ M หาได้จากการนำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นอันดับสูงสุด ในสมการของผลลัพธ์ เปรียบเทียบกับอันดับสูงสุดในพจน์ไม่เชิงเส้น แล้วทำการหา M โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ของกำลังของ Y ในสมการของผลลัพธ์ ซึ่งจะทำให้ได้ระบบสมการพีชคณิตที่เกี่ยวข้องกับ $a_k (k = 0,1,2,...,M)$, μ และ c เมื่อหา M ซึ่งส่วนใหญ่จะเป็นจำนวนเต็มบวกได้แล้ว และใช้ M นี้กับสมการ (2.8) จะทำให้เราได้คำตอบวิเคราะห์ที่เป็นอยู่ในรูปแบบปิด

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยเกี่ยวกับการหาผลเฉลยของสมการบูซิเนและสมการไคลน์-กอร์ดอน

วาซวาซ (Wazwaz, 2005) ศึกษาการเปรียบเทียบวิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ และวิธีไซน์-โคไซน์ เพื่อหาผลเฉลยของสมการไคลน์-กอร์ดอน (Klein-Gordon)

วิธีไซน์-โคไซน์ (The sine-cosine method)

กำหนดรูปแบบของผลเฉลย คือ

$$u(x,t) = \begin{cases} \left\{\lambda \cos^{\beta}\left(\mu\xi\right)\right\}, & |\xi| \le \dfrac{\pi}{2\mu}, \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{2.10}$$

$$u(x,t)=\begin{cases}\{\lambda\sin^{\beta}(\mu\xi)\}, & |\xi|\le\dfrac{\pi}{\mu},\\ 0, & otherwise\end{cases}\tag{2.11}$$

เมื่อ λ,μ และ β เป็นพารามิเตอร์ ซึ่งหาได้โดยแทนค่าอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ของ u ลงในสมการเชิงอนุพนธ์สามัญของสมการตั้งต้น การเทียบเลขชี้กำลังของฟังก์ชันไซน์หรือโคไซน์ในแต่ละคู่ และเทียบสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันไซน์หรือโคไซน์ที่มีเลขชี้กำลังที่เหมือนกัน จะได้ระบบสมการพีชคณิตและสามารถหาค่าพารามิเตอร์ λ,μ และ β และแทนในสมการ (2.10) หรือ (2.11)

วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ (The tanh method)

กำหนดตัวแปรอิสระใหม่คือ

$$Y=\tanh(\mu\xi)\ \text{ เมื่อ }\ \xi=x-ct\tag{2.12}$$

และ

$$u(\mu\xi)=S(Y)=\sum_{k=0}^{M}a_kY^k\tag{2.13}$$

เมื่อ M เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งเราจะต้องหาค่า M นี้เพื่อแทนในสมการ (2.13) และนำค่าที่จากสมการ (2.13) แทนในสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ จะได้สมการที่เป็นสมการยกกำลังของ Y พารามิเตอร์ M หาได้จากการนำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นอันดับสูงสุด ในสมการของผลลัพธ์เปรียบเทียบกับอันดับสูงสุดในพจน์ไม่เชิงเส้น แล้วทำการหา M โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ของกำลังของ Y ในสมการของผลลัพธ์ ซึ่งจะทำให้ได้ระบบสมการพีชคณิตที่เกี่ยวข้องกับ $a_k\,(k=0,1,2,\dots,M)$, μ และ c จะทำให้เราได้คำตอบวิเคราะห์ที่เป็นอยู่ในรูปแบบปิด

สมการควอซีลิเนียร์ไคลน์-กอร์ดอน (The quasilinear Klein-Gordon equation)

พิจารณารูปแบบทั่วไปของสมการ

$$u_{tt}-au_{xx}+bu-ku^3=0\tag{2.14}$$

เปลี่ยนให้อยู่ในรูปสมการอนุพันธ์สามัญ โดยแทนค่า

$$\frac{d^2}{dt^2} = c^2 \frac{d^2}{d\xi^2}$$
(2.15)
$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d^2}{d\xi^2}$$

เปลี่ยนให้อยู่ในรูปสมการอนุพันธ์สามัญ โดยแทนค่าสมการ (2.15) ลงในสมการ (2.14) จะได้

$$c^2 \frac{d^2}{d\xi^2} - a\frac{d^2}{d\xi^2} + bu - ku^3 = 0 \qquad (2.16)$$

และจัดรูปแบบสมการ (2.16) ใหม่ จะได้

$$bu - ku^3 + \left(c^2 - a\right)u'' = 0 \qquad (2.17)$$

การหาผลเฉลยโดยวิธีไซน์-โคไซน์ จะทำให้ได้ผลเฉลย 3 รูปแบบ คือ

1. ผลเฉลยแบบคาบ

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2b}{k}} \csc\left[\sqrt{\frac{b}{c^2 - a}}(x - ct)\right],\ 0 < \sqrt{\frac{b}{c^2 - a}}(x - ct) < \pi, \qquad (2.18)$$

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2b}{k}} \sec\left[\sqrt{\frac{b}{c^2 - a}}(x - ct)\right],\ \left|\sqrt{\frac{b}{c^2 - a}}(x - ct)\right| < \frac{\pi}{2} \qquad (2.19)$$

2. ผลเฉลยเชิงซ้อน เมื่อ $\frac{b}{c^2 - a} < 0$

$$u(x,t) = i\sqrt{\frac{2b}{k}} \operatorname{csc} h\left[\sqrt{\frac{b}{a - c^2}}(x - ct)\right],\ i^2 = -1 \qquad (2.20)$$

3. ผลเฉลยโซลิทอรี่ เมื่อ $\frac{b}{c^2 - a} < 0$

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2b}{k}}\sec h\left[\sqrt{\frac{b}{a-c^2}}(x-ct)\right] \tag{2.21}$$

การหาผลเฉลยโดยวิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ จะทำให้ได้ผลเฉลย 2 รูปแบบ คือ เราได้ค่าพารามิเตอร์ $M=1$ และทำให้ได้ผลเฉลย ดังนี้

1. ผลเฉลยโซลิทอรี่ เมื่อ $\frac{b}{2(c^2-a)}>0$

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{b}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{b}{2(c^2-a)}}(x-ct)\right), \tag{2.22}$$

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{b}{k}}\coth\left(\sqrt{\frac{b}{2(c^2-a)}}(x-ct)\right) \tag{2.23}$$

2. ผลเฉลยเชิงซ้อน จากสมการ (2.22) และ (2.23) เมื่อ $\frac{b}{2(c^2-a)}<0$

$$u(x,t)=i\sqrt{\frac{b}{k}}\tan\left(\sqrt{\frac{b}{2(a-c^2)}}(x-ct)\right), \tag{2.24}$$

$$u(x,t)=i\sqrt{\frac{b}{k}}\cot\left(\sqrt{\frac{b}{2(a-c^2)}}(x-ct)\right),\ i^2=-1 \tag{2.25}$$

สมการไคลน์-กอร์ดอน ไม่เชิงเส้น (The nonlinear Klein-Gordon equation)

พิจารณารูปแบบทั่วไปของสมการ

$$u_{tt}-au_{xx}+bu-ku^n=0, n>1 \tag{2.26}$$

เปลี่ยนให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ จะได้

$$bu - ku'' + \left(c^2 - a\right)u'' = 0 \tag{2.27}$$

การหาผลเฉลยโดยวิธีไซน์-โคไซน์ จะทำให้ได้ผลเฉลย 2 รูปแบบ คือ

1. ผลเฉลยแบบคาบ เมื่อ $\dfrac{b}{c^2 - a} > 0$

$$u(x,t) = \left(\frac{b(n+1)}{2k}\csc^2\left[\frac{n-1}{2}\sqrt{\frac{b}{c^2-a}}(x-ct)\right]\right)^{\frac{1}{n-1}},\quad 0 < \sqrt{\frac{b}{c^2-a}}(x-ct) < \pi, \tag{2.28}$$

$$u(x,t) = \left(\frac{b(n+1)}{2k}\sec^2\left[\frac{n-1}{2}\sqrt{\frac{b}{c^2-a}}(x-ct)\right]\right)^{\frac{1}{n-1}},\quad \left|\sqrt{\frac{b}{c^2-a}}(x-ct)\right| < \frac{\pi}{2} \tag{2.29}$$

2. ผลเฉลยโซลิทอรี่ จากสมการ (2.28) และ (2.29) เมื่อ $\dfrac{b}{c^2 - a} < 0$

$$u(x,t) = \left(-\frac{b(n+1)}{2k}\operatorname{csch}^2\left[\frac{n-1}{2}\sqrt{\frac{b}{a-c^2}}(x-ct)\right]\right)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{2.30}$$

$$u(x,t) = \left(\frac{b(n+1)}{2k}\operatorname{sech}^2\left[\frac{n-1}{2}\sqrt{\frac{b}{a-c^2}}(x-ct)\right]\right)^{\frac{1}{n-1}} \tag{2.31}$$

การหาผลเฉลยโดยวิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ จะทำให้ได้ผลเฉลย 2 รูปแบบ คือ

เราได้ค่าพารามิเตอร์ $M = \dfrac{2}{n-1}$; $n = 2,3$ เลือก $n = 3$ ทำให้ $M = 1$ และทำให้ได้ผลเฉลย ดังนี้

1. ผลเฉลยโซลิทอรี่

1.1 เมื่อ $\dfrac{b}{\left(c^2 - a\right)} > 0$

$$u(x,t) = -\frac{b}{2k}\left(1 - 3\tanh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{\left(c^2-a\right)}}(x-ct)\right)\right), \tag{2.32}$$

$$u(x,t) = -\frac{b}{2k}\left(1-3\coth^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{(c^2-a)}}(x-ct)\right)\right) \tag{2.33}$$

1.2 เมื่อ $\frac{b}{(a-c^2)} > 0$

$$u(x,t) = -\frac{3b}{2k}\operatorname{csc h}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{(a-c^2)}}(x-ct)\right), \tag{2.34}$$

$$u(x,t) = \frac{3b}{2k}\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{(a-c^2)}}(x-ct)\right) \tag{2.35}$$

2. ผลเฉลยแบบคาบ

2.1 จากสมการ (2.32) และ (2.33) เมื่อ $\frac{b}{(c^2-a)} < 0$

$$u(x,t) = -\frac{b}{2k}\left(1+3\tan^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{(a-c^2)}}(x-ct)\right)\right), \tag{2.36}$$

$$u(x,t) = -\frac{b}{2k}\left(1+3\cot^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{(a-c^2)}}(x-ct)\right)\right) \tag{2.37}$$

2.2 จากสมการ (2.34) และ (2.35) เมื่อ $\frac{b}{(a-c^2)} < 0$

$$u(x,t) = \frac{3b}{2k}\csc^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{(c^2-a)}}(x-ct)\right), \tag{2.38}$$

$$u(x,t) = \frac{3b}{2k}\sec^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{(c^2-a)}}(x-ct)\right) \tag{2.39}$$

ในกรณีที่ n ≠ 2,3 ค่าของพารามิเตอร์ M จะไม่เป็นจำนวนเต็ม เราจึงกำหนดการเปลี่ยนรูปแบบเป็น

$$u = v^{\frac{2}{n-1}} \tag{2.40}$$

จะทำให้ได้ $M = 1$ จึงทำให้ได้ผลเฉลย ดังนี้

$$u(x,t) = \left(\frac{b}{k}\right)^{\frac{1}{n-1}} \tag{2.41}$$

สมการในกลุ่มไคลน์-กอร์ดอน ไม่เชิงเส้น (Variant of the nonlinear Klein-Gordon equation)
พิจารณารูปแบบทั่วไปของสมการ

$$u_{tt} - au_{xx} + bu - ku^{-n} = 0, n > 1 \tag{2.42}$$

เปลี่ยนให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ จะได้

$$bu - ku^{-n} + \left(c^2 - a\right)u'' = 0 \tag{2.43}$$

การหาผลเฉลยโดยวิธีไซน์-โคไซน์ จะทำให้ได้ผลเฉลย 2 รูปแบบ คือ

1. ผลเฉลยแบบคอมแพคตอน เมื่อ $\dfrac{b}{c^2 - a} > 0$

$$u(x,t) = \begin{cases} \left\{\dfrac{2k}{b(1-n)}\sin^2\left(\dfrac{n+1}{2}\sqrt{\dfrac{b}{c^2-a}}(x-ct)\right)\right\}^{\frac{1}{n+1}}, & |\mu\xi| < \pi, \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{2.44}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} \left\{\dfrac{2k}{b(1-n)}\cos^2\left(\dfrac{n-1}{2}\sqrt{\dfrac{b}{c^2-a}}(x-ct)\right)\right\}^{\frac{1}{n+1}}, & |\mu\xi| < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{2.45}$$

2. ผลเฉลยแบบโซลิทอรี่ จากสมการ (2.44) และ (2.45) เมื่อ $\dfrac{b}{c^2-a}<0$

$$u(x,t)=\left\{-\frac{2k}{b(1-n)}\sinh^2\left(\frac{n+1}{2}\sqrt{\frac{b}{a-c^2}}(x-ct)\right)\right\}^{\frac{1}{n+1}}, \tag{2.46}$$

$$u(x,t)=\left\{\frac{2k}{b(1-n)}\cosh^2\left(\frac{n-1}{2}\sqrt{\frac{b}{a-c^2}}(x-ct)\right)\right\}^{\frac{1}{n+1}} \tag{2.47}$$

การหาผลเฉลยโดยวิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์

เราได้ค่าพารามิเตอร์ ซึ่งค่าของพารามิเตอร์ M จะไม่เป็นจำนวนเต็มบวก เราจึงกำหนดการเปลี่ยนรูปแบบเป็น

$$u(x,t)=v^{-\frac{2}{n+1}} \tag{2.48}$$

จะทำให้ได้ $M=1$ จึงทำให้ได้ผลเฉลย ดังนี้

1. ผลเฉลยคลื่นเคลื่อนที่ เมื่อ $n=3,\ a>c^2$

$$u(x,t)=\frac{1}{\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{k}}\left(1+\tanh\left(\sqrt{\frac{b}{a-c^2}}(x-ct)\right)\right)\right\}^{\frac{1}{2}}}, \tag{2.49}$$

$$u(x,t)=\frac{1}{\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{k}}\left(1+\coth\left(\sqrt{\frac{b}{a-c^2}}(x-ct)\right)\right)\right\}^{\frac{1}{2}}} \tag{2.50}$$

2. ผลเฉลยเชิงซ้อน เมื่อ $n=3,\ c^2>a$

$$u(x,t)=\frac{1}{\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{k}}\left(1+i\tan\left(\sqrt{\frac{b}{c^2-a}}(x-ct)\right)\right)\right\}^{\frac{1}{2}}}, \tag{2.51}$$

$$u(x,t)=\frac{1}{\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{k}}\left(1-i\cot\left(\sqrt{\frac{b}{c^2-a}}(x-ct)\right)\right)\right\}^{\frac{1}{2}}},\ i^2=-1 \tag{2.52}$$

วาซวาซ (Wazwaz, 2006) ศึกษาและหาผลเฉลยของสมการคลื่นบูซิเน (wave Boussinesq) และรูปแบบทั่วไปของสมการคลื่นบูซิเน เพื่อหาผลเฉลยคลื่นโซลิทอรี่และคอมแพคตอน โดยงานวิจัยนี้ใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ในการหาผลเฉลยโดยกล่าวไว้ข้างต้น

สมการคลื่นบูซิเน (The Boussinesq wave equation)

พิจารณารูปแบบทั่วไปของสมการ

$$u_{tt}-u_{xx}+3\left(u^2\right)_{xx}+au_{xxxx}=0 \tag{2.53}$$

เปลี่ยนให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$\left(c^2-1\right)u+\frac{3}{2}u^2+au''=0 \tag{2.54}$$

เราได้ค่าพารามิเตอร์ $M=2$ และทำให้ได้ผลเฉลย ดังนี้

1. ผลเฉลยโซลิตอน

    1.1 เมื่อ $c^2<1,\ a>0$

$$u(x,t)=\left(1-c^2\right)\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-c^2}{a}}(x-ct)\right], \tag{2.55}$$

$$u(x,t)=\left(1-c^2\right)\operatorname{csch}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-c^2}{a}}(x-ct)\right] \tag{2.56}$$

1.2 เมื่อ $c^2 > 1,\ a > 0$

$$u(x,t) = -\frac{1}{3}\left(1-c^2\right)\left\{1-3\tanh^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c^2-1}{a}}\left(x-ct\right)\right]\right\}, \tag{2.57}$$

$$u(x,t) = -\frac{1}{3}\left(1-c^2\right)\left\{1-3\coth^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c^2-1}{a}}\left(x-ct\right)\right]\right\} \tag{2.58}$$

2. ผลเฉลยแบบคาบ จากสมการ (2.55) และ (2.58) เมื่อ $c^2 < 1,\ a < 0$

$$u(x,t) = \left(1-c^2\right)\sec^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1-c^2}{a}}\left(x-ct\right)\right], \tag{2.59}$$

$$u(x,t) = \left(1-c^2\right)\csc^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1-c^2}{a}}\left(x-ct\right)\right], \tag{2.60}$$

$$u(x,t) = -\frac{1}{3}\left(1-c^2\right)\left\{1-3\tan^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{c^2-1}{a}}\left(x-ct\right)\right]\right\}, \tag{2.61}$$

$$u(x,t) = -\frac{1}{3}\left(1-c^2\right)\left\{1-3\cot^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{c^2-1}{a}}\left(x-ct\right)\right]\right\} \tag{2.62}$$

สมการคลื่นบูซิเนรูปทั่วไป (The generalized Boussinesq wave equation)

พิจารณารูปแบบทั่วไปของสมการ

$$u_{tt} - u_{xx} + 3\left(u^n\right)_{xx} + au_{xxxx} = 0, n > 1 \tag{2.63}$$

เปลี่ยนให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$\left(c^2-1\right)u + \frac{3}{2}u^n + au'' = 0 \tag{2.64}$$

เราได้ค่าพารามิเตอร์ $M=\dfrac{2}{n-1}$ ซึ่งทำให้ค่าพารามิเตอร์ M ไม่เป็นจำนวนเต็มจึงทำการเปลี่ยนรูปแบบ ดังนี้

$$u=v^{\frac{1}{n-1}} \tag{2.65}$$

ทำให้ได้ค่าของพารามิเตอร์ $M=2$ และทำให้ได้ผลเฉลย ดังนี้

1. ผลเฉลยโซลิตอน เมื่อ $c^2<1,\ a>0$

$$u(x,t)=\left\{-\frac{1}{3}(n+1)\left(c^2-1\right)\operatorname{sech}^2\left[\frac{n-1}{2}\sqrt{\frac{1-c^2}{a}}(x-ct)\right]\right\}^{\frac{1}{n-1}}, \tag{2.66}$$

$$u(x,t)=\left\{-\frac{1}{3}(n+1)\left(c^2-1\right)\operatorname{csch}^2\left[\frac{n-1}{2}\sqrt{\frac{1-c^2}{a}}(x-ct)\right]\right\}^{\frac{1}{n-1}} \tag{2.67}$$

2. ผลเฉลยแบบคาบ จากสมการ (2.66) และ (2.67) เมื่อ $c^2<1,\ a<0$

$$u(x,t)=\left\{-\frac{1}{3}(n+1)\left(c^2-1\right)\sec^2\left[\frac{n-1}{2}\sqrt{-\frac{1-c^2}{a}}(x-ct)\right]\right\}^{\frac{1}{n-1}}, \tag{2.68}$$

$$u(x,t)=\left\{-\frac{1}{3}(n+1)\left(c^2-1\right)\csc^2\left[\frac{n-1}{2}\sqrt{-\frac{1-c^2}{a}}(x-ct)\right]\right\}^{\frac{1}{n-1}} \tag{2.69}$$

3. ผลเฉลยคลื่น

ในกรณีค่า n ในสมการ (2.64) มีค่าเท่ากับ 1 จะได้

$$u''+\left(\frac{c^2}{a}+\frac{1}{2a}\right)u=0 \tag{2.70}$$

ทำให้ได้ผลเฉลย ดังนี้

$$u(x,t)=A\cos\left[\sqrt{\left(\frac{c^2}{a}+\frac{1}{2a}\right)}(x-ct)\right]+B\sin\left[\sqrt{\left(\frac{c^2}{a}+\frac{1}{2a}\right)}(x-ct)\right] \quad (2.71)$$

4. ผลเฉลยแบบคอมแพคตอน

ในกรณีที่ n เป็นจำนวนเต็มลบ โดยกำหนด $n=-m,\ m>0$ ทำให้ได้ผลเฉลยคอมแพคตอนเมื่อ $a>0$

$$u(x,t)=\begin{cases}\left\{-\dfrac{3}{(-m+1)(c^2-1)}\cos^2\left[\dfrac{n-1}{2}\sqrt{\dfrac{1-c^2}{a}}(x-ct)\right]\right\}^{\frac{1}{m+1}}, & |\mu\xi|<\dfrac{\pi}{2} \\ 0 & otherwise\end{cases} \quad (2.72)$$

$$u(x,t)=\begin{cases}\left\{-\dfrac{3}{(-m+1)(c^2-1)}\sin^2\left[\dfrac{n-1}{2}\sqrt{\dfrac{1-c^2}{a}}(x-ct)\right]\right\}^{\frac{1}{m+1}}, & |\mu\xi|<\pi \\ 0 & otherwise\end{cases} \quad (2.73)$$

5. ผลเฉลยโซลิทอรี่

สำหรับ $n=-m,\ m>0$ และ $a<0$ ได้ผลเฉลยดังนี้

$$u(x,t)=\left\{-\frac{3}{(-m+1)(c^2-1)}\cosh^2\left[\frac{n-1}{2}\sqrt{-\frac{1-c^2}{a}}(x-ct)\right]\right\}^{\frac{1}{m+1}}, \quad (2.74)$$

$$u(x,t)=\left\{-\frac{3}{(-m+1)(c^2-1)}\sinh^2\left[\frac{n-1}{2}\sqrt{-\frac{1-c^2}{a}}(x-ct)\right]\right\}^{\frac{1}{m+1}} \quad (2.75)$$

วาซวาซ (Wazwaz, 2008) ได้ทำการหาผลเฉลยการคลื่นที่ของคลื่นของสมการบูซิเน (wave Boussinesq) และสมการไคลน์-กอร์ดอน (Klein-Gordon) โดยการศึกษาการหาผลเฉลยโดย

วิธีขยายไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ วิธีอัตราส่วนฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกไซน์ วิธีอัตราส่วนฟังก์ชันไฮเพอร์โลบิกโคไซน์และวิธีอัตราส่วนฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

วิธีขยายไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ (The extended tanh method)

กำหนดตัวแปรอิสระใหม่คือ

$$Y = \tanh(\mu\xi) \quad \text{เมื่อ} \quad \xi = x - ct \tag{2.76}$$

และ

$$u(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k + \sum_{k=1}^{M} b_k Y^{-k} \tag{2.77}$$

เมื่อ M เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งเราจะต้องหาค่า M นี้เพื่อแทนในสมการ (2.77) และนำค่าที่จากสมการ (2.77) แทนในสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ จะได้สมการที่เป็นสมการยกกำลังของ Y พารามิเตอร์ M หาได้จากการนำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นอันดับสูงสุด ในสมการของผลลัพธ์เปรียบเทียบกับอันดับสูงสุดในพจน์ไม่เชิงเส้น แล้วทำการหา M โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ของกำลังของ Y ในสมการของผลลัพธ์ ซึ่งจะทำให้ได้ระบบสมการพีชคณิตที่เกี่ยวข้องกับ $a_k(k = 0,1,2,...,M)$, $b_k(k = 1,2,3,...,M)$, μ และ c จะทำให้เราได้คำตอบวิเคราะห์ที่เป็นอยู่ในรูปแบบปิด

วิธีอัตราส่วนฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกไซน์และโคไซน์ (The rational sinh and cosh method)

อัตราส่วนฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกไซน์และโคไซน์ มีรูปแบบเป็น

$$u(x,t) = \frac{a_0 + b_0 \sinh(\mu(x-ct))}{1 + a_1 \sinh(\mu(x-ct))} \tag{2.78}$$

$$u(x,t) = \frac{a_0 + b_0 \cosh(\mu(x-ct))}{1 + a_1 \cosh(\mu(x-ct))} \tag{2.79}$$

โดยที่ a_0, a_1, b_0 และ μ เป็นพารามิเตอร์ที่ต้องหาค่า โดยการแทนค่าในสมการ (2.78) หรือ (2.79) ในสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และเทียบสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก ซึ่งจะทำให้ได้ระบบสมการพีชคณิตที่เกี่ยวข้องกับ a_0, a_1, b_0 และ μ จะทำให้เราได้คำตอบวิเคราะห์ที่เป็นอยู่ในรูปแบบปิด

วิธีอัตราส่วนฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (The rational exponential functions method)
อัตราส่วนฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกไซน์และโคไซน์ มีรูปแบบเป็น

$$u(x,t) = \frac{a_0 e^{\mu(x-ct)}}{\left(1+a_1 e^{\mu(x-ct)}\right)^2} \tag{2.80}$$

โดยที่ a_0, a_1 และ μ เป็นพารามิเตอร์ที่ต้องหาค่า โดยการแทนค่าในสมการ (2.80) ในสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และเทียบสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลซึ่งจะทำให้ได้ระบบสมการพีชคณิตที่เกี่ยวข้องกับ a_0, a_1 และ μ จะทำให้เราได้คำตอบวิเคราะห์ที่เป็นอยู่ในรูปแบบปิด

การคำนวณหาผลเฉลยของสมการบูซิเน (The Boussinesq equation)

วิธีขยายไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์

พิจารณารูปแบบทั่วไปของสมการ

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} - b\left(u^2\right)_{xx} + u_{xxxx} = 0 \tag{2.81}$$

เปลี่ยนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$\left(c^2 - a^2\right)u - bu^2 + u'' = 0 \tag{2.82}$$

จะได้ค่าของพารามิเตอร์ $M = 2$ ทำให้ได้ผลเฉลย 2 รูปแบบ คือ

1. ผลเฉลยโซลิตอน

   1.1 เมื่อ $c^2 > a^2$

$$u(x,t)=\frac{a^2-c^2}{2b}\left(1-3\tanh^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c^2-a^2}\,(x-ct)\right]\right), \qquad (2.83)$$

$$u(x,t)=\frac{a^2-c^2}{2b}\left(1-3\coth^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c^2-a^2}\,(x-ct)\right]\right), \qquad (2.84)$$

$$u(x,t)=\frac{c^2-a^2}{8b}\left(2+3\tanh^2\left[\frac{1}{4}\sqrt{c^2-a^2}\,(x-ct)\right]+3\coth^2\left[\frac{1}{4}\sqrt{c^2-a^2}\,(x-ct)\right]\right) \qquad (2.85)$$

1.2 เมื่อ $a^2>c^2$

$$u(x,t)=-\frac{3}{2b}\left(a^2-c^2\right)\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{a^2-c^2}\,(x-ct)\right], \qquad (2.86)$$

$$u(x,t)=\frac{3}{2b}\left(a^2-c^2\right)\operatorname{csch}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{a^2-c^2}\,(x-ct)\right], \qquad (2.87)$$

$$u(x,t)=-\frac{3}{8b}\left(a^2-c^2\right)\left(2-\tanh^2\left[\frac{1}{4}\sqrt{a^2-c^2}\,(x-ct)\right]-\frac{3}{2}\coth^2\left[\frac{1}{4}\sqrt{a^2-c^2}\,(x-ct)\right]\right) \qquad (2.88)$$

2. ผลเฉลยคลื่นเคลื่อนที่

2.1 จากสมการ (2.83) และ (2.85) เมื่อ $c^2<a^2$

$$u(x,t)=\frac{a^2-c^2}{2b}\left(1+3\tan^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{a^2-c^2}\,(x-ct)\right]\right), \qquad (2.89)$$

$$u(x,t)=\frac{a^2-c^2}{2b}\left(1+3\cot^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{a^2-c^2}\,(x-ct)\right]\right), \qquad (2.90)$$

$$u(x,t)=\frac{c^2-a^2}{4b}\left(1-3\tan^2\left[\frac{1}{4}\sqrt{a^2-c^2}\,(x-ct)\right]-\frac{3}{2}\cot^2\left[\frac{1}{4}\sqrt{a^2-c^2}\,(x-ct)\right]\right) \qquad (2.91)$$

2.1 จากสมการ (2.86) และ (2.88) เมื่อ $a^2<c^2$

$$u(x,t) = -\frac{3}{2b}\left(a^2 - c^2\right)\sec^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c^2 - a^2}\,(x - ct)\right], \tag{2.92}$$

$$u(x,t) = -\frac{3}{2b}\left(a^2 - c^2\right)\csc^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c^2 - a^2}\,(x - ct)\right], \tag{2.93}$$

$$u(x,t) = -\frac{3}{8b}\left(a^2 - c^2\right)\left(2 + \tan^2\left[\frac{1}{4}\sqrt{c^2 - a^2}\,(x - ct)\right] + \frac{3}{2}\cot^2\left[\frac{1}{4}\sqrt{c^2 - a^2}\,(x - ct)\right]\right) \tag{2.94}$$

วิธีอัตราส่วนฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกไซน์

แทนค่าสมการ (2.78) ในสมการ (2.82) และหาผลเฉลยได้ ดังนี้

1. ผลเฉลยเชิงซ้อน

$$u(x,t) = \frac{3\left(c^2 - a^2\right)}{b\left(1 + i\sinh\left[\sqrt{a^2 - c^2}\,(x - ct)\right]\right)},\ c^2 < a^2, \tag{2.95}$$

$$u(x,t) = \frac{\left(c^2 - a^2\right)\left(2 - i\sinh\left[\sqrt{c^2 - a^2}\,(x - ct)\right]\right)}{b\left(1 + i\sinh\left[\sqrt{c^2 - a^2}\,(x - ct)\right]\right)},\ c^2 > a^2 \tag{2.96}$$

2. ผลเฉลยจริงแม่นตรง

$$u(x,t) = \frac{3\left(c^2 - a^2\right)}{b\left(1 - i\sin\left[\sqrt{c^2 - a^2}\,(x - ct)\right]\right)},\ c^2 > a^2, \tag{2.97}$$

$$u(x,t) = \frac{\left(c^2 - a^2\right)\left(2 + \sin\left[\sqrt{c^2 - a^2}\,(x - ct)\right]\right)}{b\left(1 - \sin\left[\sqrt{a^2 - c^2}\,(x - ct)\right]\right)},\ c^2 < a^2 \tag{2.98}$$

วิธีอัตราส่วนฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกโคไซน์

แทนค่าสมการ (2.79) ในสมการ (2.82) และหาผลเฉลยได้ ดังนี้

1. ผลเฉลยโซลิตอน

$$u(x,t)=\frac{3\left(c^2-a^2\right)}{b\left(1\pm i\cosh\left[\sqrt{a^2-c^2}\,(x-ct)\right]\right)},\ c^2<a^2, \tag{2.99}$$

$$u(x,t)=\frac{\left(a^2-c^2\right)\left(2\mp\cosh\left[\sqrt{c^2-a^2}\,(x-ct)\right]\right)}{b\left(1\mp\cosh\left[\sqrt{c^2-a^2}\,(x-ct)\right]\right)},\ c^2>a^2 \tag{2.100}$$

2. ผลเฉลยแบบคาบ

$$u(x,t)=\frac{3\left(c^2-a^2\right)}{b\left(1\pm\cos\left[\sqrt{c^2-a^2}\,(x-ct)\right]\right)},\ c^2<a^2, \tag{2.101}$$

$$u(x,t)=\frac{\left(a^2-c^2\right)\left(2\mp\cos\left[\sqrt{a^2-c^2}\,(x-ct)\right]\right)}{b\left(1\mp\cos\left[\sqrt{a^2-c^2}\,(x-ct)\right]\right)},\ c^2<a^2 \tag{2.102}$$

วิธีอัตราส่วนฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

แทนค่าสมการ (2.80) ในสมการ (2.82) และหาผลเฉลยได้ ดังนี้

$$u(x,t)=\frac{6\lambda\left(c^2-a^2\right)e^{-\sqrt{a^2-c^2}|x-ct|}}{b\left(1+\lambda e^{-\sqrt{a^2-c^2}|x-ct|}\right)^2} \tag{2.103}$$

การคำนวณหาผลเฉลยของสมการไคลน์-กอร์ดอน (The Klein-Gordon equation)

วิธีขยายไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์

พิจารณารูปแบบทั่วไปของสมการ

$$u_{tt}-u_{xx}+\alpha u-\beta u^2=0 \tag{2.104}$$

เปลี่ยนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$\left(c^2-1\right)u''+\alpha u-\beta u^2=0 \tag{2.105}$$

จะได้ค่าของพารามิเตอร์ $M=2$ ทำให้ได้ผลเฉลย 2 รูปแบบ คือ

1. ผลเฉลยโซลิตอน

1.1 เมื่อ $\dfrac{\alpha}{c^2-1}>0$

$$u(x,t)=-\frac{\alpha}{2\beta}\left(1-3\tanh^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{c^2-1}}(x-ct)\right]\right), \tag{2.106}$$

$$u(x,t)=-\frac{\alpha}{2\beta}\left(1-3\coth^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{c^2-1}}(x-ct)\right]\right), \tag{2.107}$$

$$u(x,t)=\frac{\alpha}{4\beta}\left(1+\frac{3}{2}\tanh^2\left[\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{c^2-1}}(x-ct)\right]+\frac{3}{2}\coth^2\left[\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{c^2-1}}(x-ct)\right]\right) \tag{2.108}$$

1.2 เมื่อ $\dfrac{\alpha}{1-c^2}>0$

$$u(x,t)=\frac{3\alpha}{2\beta}\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{1-c^2}}(x-ct)\right], \tag{2.109}$$

$$u(x,t)=-\frac{3\alpha}{2\beta}\operatorname{csch}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{1-c^2}}(x-ct)\right], \tag{2.110}$$

$$u(x,t)=\frac{3\alpha}{8\beta}\left(\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{1-c^2}}(x-ct)\right]-\operatorname{csch}^2\left[\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{1-c^2}}(x-ct)\right]\right) \tag{2.111}$$

2. ผลเฉลยแบบคาบ

2.1 จากสมการ (2.106) และ (2.108) เมื่อ $\dfrac{\alpha}{c^2-1}<0$

$$u(x,t) = -\frac{\alpha}{2\beta}\left(1+3\tan^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{1-c^2}}(x-ct)\right]\right), \tag{2.112}$$

$$u(x,t) = -\frac{\alpha}{2\beta}\left(1+3\cot^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{1-c^2}}(x-ct)\right]\right), \tag{2.113}$$

$$u(x,t) = \frac{\alpha}{4\beta}\left(1-\frac{3}{2}\tan^2\left[\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{1-c^2}}(x-ct)\right]-\frac{3}{2}\cot^2\left[\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{1-c^2}}(x-ct)\right]\right) \tag{2.114}$$

2.2 จากสมการ (2.109) และ (2.111) เมื่อ $\frac{\alpha}{1-c^2} < 0$

$$u(x,t) = \frac{3\alpha}{2\beta}\sec^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{c^2-1}}(x-ct)\right], \tag{2.115}$$

$$u(x,t) = -\frac{3\alpha}{2\beta}\csc^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{c^2-1}}(x-ct)\right], \tag{2.116}$$

$$u(x,t) = \frac{3\alpha}{8\beta}\left(\sec^2\left[\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{c^2-1}}(x-ct)\right]+\csc^2\left[\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{c^2-1}}(x-ct)\right]\right) \tag{2.117}$$

วิธีอัตราส่วนฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกไซน์

แทนค่าสมการ (2.78) ในสมการ (2.105) และหาผลเฉลยได้ ดังนี้

1. ผลเฉลยโซลิตอน

$$u(x,t) = \frac{3\alpha}{\beta\left(1+i\sinh\left[\sqrt{\frac{\alpha}{1-c^2}}(x-ct)\right]\right)}, \quad \frac{\alpha}{1-c^2} > 0, \tag{2.118}$$

$$u(x,t)=-\frac{\alpha\left(2-i\sinh\left[\sqrt{\frac{\alpha}{c^2-1}}(x-ct)\right]\right)}{\beta\left(1+i\sinh\left[\sqrt{\frac{\alpha}{c^2-1}}(x-ct)\right]\right)},\quad \frac{\alpha}{c^2-1}>0 \tag{2.119}$$

2. ผลเฉลยแบบคาบ

$$u(x,t)=\frac{3\alpha}{\beta\left(1-\sin\left[\sqrt{\frac{\alpha}{c^2-1}}(x-ct)\right]\right)},\quad \frac{\alpha}{c^2-1}>0, \tag{2.120}$$

$$u(x,t)=-\frac{\alpha\left(2+\sin\left[\sqrt{\frac{\alpha}{c^2-1}}(x-ct)\right]\right)}{\beta\left(1-\sin\left[\sqrt{\frac{\alpha}{c^2-1}}(x-ct)\right]\right)},\quad \frac{\alpha}{1-c^2}>0 \tag{2.121}$$

วิธีอัตราส่วนฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกโคไซน์

แทนค่าสมการ (2.79) ในสมการ (2.105) และหาผลเฉลยได้ ดังนี้

1. ผลเฉลยโซลิตอน

$$u(x,t)=\frac{3\alpha}{\beta\left(1\pm\cosh\left[\sqrt{\frac{\alpha}{1-c^2}}(x-ct)\right]\right)},\quad \frac{\alpha}{1-c^2}>0, \tag{2.122}$$

$$u(x,t)=-\frac{\alpha\left(2\mp\cosh\left[\sqrt{\frac{\alpha}{c^2-1}}(x-ct)\right]\right)}{\beta\left(1\pm\cosh\left[\sqrt{\frac{\alpha}{c^2-1}}(x-ct)\right]\right)},\quad \frac{\alpha}{c^2-1}>0 \tag{2.123}$$

2. ผลเฉลยแบบคาบ

$$u(x,t)=\frac{3\alpha}{\beta\left(1\pm\cos\left[\sqrt{\frac{\alpha}{c^2-1}}(x-ct)\right]\right)},\ \frac{\alpha}{c^2-1}>0, \tag{2.124}$$

$$u(x,t)=-\frac{\alpha\left(2\mp\cos\left[\sqrt{\frac{\alpha}{1-c^2}}(x-ct)\right]\right)}{\beta\left(1\pm\cos\left[\sqrt{\frac{\alpha}{1-c^2}}(x-ct)\right]\right)},\ \frac{\alpha}{1-c^2}>0 \tag{2.125}$$

วิธีอัตราส่วนฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

แทนค่าสมการ (2.80) ในสมการ (2.105) และหาผลเฉลยได้ ดังนี้

$$u(x,t)=\frac{6\alpha\lambda e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{1-c^2}}|x-ct|}}{\beta\left(1+\lambda e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{1-c^2}}|x-ct|}\right)^2} \tag{2.126}$$

งานวิจัยเกี่ยวข้องกับการใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์

แกนจิ และอับดุลลาซาเด (Ganji and Abdollahzadeh, 2008) ผลเฉลยแม่นตรงสำหรับสมการเคดีวีอันดับ 7 ของ แล็กซ์ (Lax's seventh-order KdV) โดยวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ และวิธีเอ็กซ์โพเนนเชียลฟังก์ชันตรรกยะ ซึ่งมีรูปแบบสมการ ดังนี้

$$u_t+(35u^4+70(u^2u_{xx}+uu_x^2)+7(2uu_{xxx}+3u_{xx}^2+4u_xu_{xxx})+u_{xxxxxx})_x=0 \tag{2.127}$$

ใช้สมการ (2.4) และ (2.5)

ให้ $\quad u(x,t)=U(\xi)$

เมื่อ $\quad \xi=\alpha(x-\beta)t$

ดังนั้นจะได้ $\quad \frac{d}{dt}=-\alpha\beta\frac{d}{d\xi}$

$$\frac{d}{dx} = \alpha \frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \alpha^2 \frac{d^2}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3}{dx^3} = \alpha^3 \frac{d^3}{d\xi^3}$$

เปลี่ยนสมการที่ (2.127) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ จะได้

$$\begin{aligned} &-\beta U' + 140U^3U' + 280\alpha^2 UU'U'' + 70\alpha^2 U^2 U''' + 70\alpha^2 U'^3 \\ &+ 42\alpha^4 U'U^{(4)} + 14\alpha^4 UU^{(5)} + 70\alpha^4 U''U''' + \alpha^6 U^{(7)} = 0 \end{aligned} \tag{2.128}$$

กำหนด

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k \quad \text{เมื่อ} \quad Y = \operatorname{sech}(\xi) \tag{2.129}$$

จากสมการ (2.8) จะได้

$$\frac{dU(\xi)}{d\xi} = -Y\sqrt{1-Y^2}\,\frac{dS}{dY}$$

$$\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2} = -Y\sqrt{1-Y^2}\left(-\sqrt{1-Y^2}\,\frac{dS}{dY} + \frac{Y^2\frac{dS}{dY}}{\sqrt{1-Y^2}} - Y\sqrt{1-Y^2}\,\frac{d^2S}{dY^2}\right)$$

$$\frac{d^3U(\xi)}{d\xi^3} = -Y\sqrt{1-Y^2}\left(1-6Y^2\frac{dS}{dY} + (3Y-6Y^2)\frac{d^2S}{dY^2} + Y^2(1-Y^2)\frac{d^3S}{dY^3}\right) \tag{2.130}$$

และอนุพันธ์อันดับอื่น ๆ หาได้ในทำนองเดียวกันจาก (2.129) จะได้

$$S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 + \ldots + a_M Y^M$$

$$S'(Y) = \sum_{k=0}^{M} k a_k Y^{k-1} = a_1 + 2a_2 Y + 3a_3 Y^2 + \ldots + M a_M Y^{M-1}$$

$$S''(Y) = \sum_{k=0}^{M} k(k-1) a_k Y^{k-2} = 2a_2 + 6a_3 Y + \ldots + M(M-1) a_M Y^{M-2}$$

$$S'''(Y) = \sum_{k=0}^{M} k(k-1)(k-2) a_k Y^{k-3}$$
$$= 6a_3 + .24a_4 Y + .. + M(M-1)(M-2) a_M Y^{M-3} \quad (2.131)$$

แทน (2.130) และ (2.131) โดยเงื่อนไข (2.129) ในสมการ (2.128) เพื่อหาค่าพารามิเดอร์ M ซึ่งได้จากการนำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นของอันดับสูงสุดในสมการของผลลัพธ์มาเท่ากับอันดับสูงสุดในพจน์ไม่เชิงเส้น แล้วทำการหา M โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ของกำลังของ Y นั่นคือ เทียบเลขชี้กำลังของพจน์ Y^{M+8} ที่ปรากฏขึ้นในพจน์ $U^{(7)}$ ซึ่งเป็นอนุพันธ์อันดับสูงสุดของพจน์เชิงเส้นกับ Y^{4M+2} ในพจน์ U^3U' ซึ่งเป็นพจน์ไม่เชิงเส้นอันดับสูงสุดของสมการ (2.128) จะได้

$$M + 8 = 4M + 2$$

นั่นคือ
$$M = 2$$

แทนค่า $M = 2$ ในสมการ (2.128) จะได้

$$S(Y) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 \quad (2.132)$$

และหาอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$S'(Y) = a_1 + 2a_2 Y$$

$$S''(Y) = 2a_2$$

$$S'''(Y) = S^{(4)}(Y) = S^{(5)}(Y) = S^{(6)}(Y) = S^{(7)}(Y) = 0$$

แทนค่า (2.132) และอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ลงในสมการ (2.128) แล้วพิจารณาสัมประสิทธิ์แต่ละกำลังของ Y จะได้ระบบสมการที่ประกอบด้วย a_0, a_1, a_2, α และ β ดังนี้

$$Y^0 \ : -14\alpha^4 a_0 a_1 - 140a_0^3 a_1 - 70\alpha^2 a_0^2 a_1 - \alpha^6 a_1 + \beta a_1 = 0\,,$$

$$Y^1 \ : \begin{array}{l} -420\alpha^2 a_1^2 a_0 - 128\alpha^6 a_2 - 126\alpha^4 a_1^2 - 448\alpha^4 a_0 a_2 - 280a_2 a_0^3 \\ +2\beta a_2 - 560\alpha^2 a_2 a_0^2 - 420a_0^2 a_1^2 = 0, \end{array}$$

$$Y^2 \ : \begin{array}{l} -2940\alpha^4 a_0 a_1 a_2 + 140a_0^3 a_1 + 490\alpha^2 a_0^2 a_1 - 420a_0 a_1^3 + 854\alpha^4 a_0 a_1 \\ -1260a_0^2 a_2 a_1 - 2058\alpha^4 a_1 a_0 - \beta a_1 - 420\alpha^2 a_1^3 + 547\alpha^6 a_1 = 0, \end{array}$$

$$Y^3 \ : \begin{array}{l} 7168\alpha^4 a_0 a_2 - 2\beta a_2 + 280a_0^3 a_2 - 4032\alpha^4 a_2^2 + 420a_0^2 a_1^2 \\ -1680a_0 a_1^2 a_2 + 2366\alpha^4 a_1^2 + 2240\alpha^2 a_0^2 a_2 - 3080\alpha^2 a_1^2 a_2 \\ -140a_1^4 - 840a_2^2 a_0^2 + 8192\alpha^6 a_2 + 1820\alpha^2 a_1^2 a_0 = 0, \end{array}$$

$$Y^4 \ : \begin{array}{l} -700a_2 a_1^3 - 2520\alpha^4 a_1 a_0 + 21238\alpha^4 a_1 a_2 - 5950\alpha^2 a_2^2 a_1 \\ +9940\alpha^2 a_0 a_2 a_1 + 1260a_1 a_0^2 a_2 - 420\alpha^2 a_0^2 a_1 + 420a_0 a_1^3 \\ +1470\alpha^2 a_1^3 - 2100a_2^2 a_0 a_1 - 4746\alpha^6 a_1 = 0, \end{array}$$

$$Y^5 \ : \begin{array}{l} -5768\alpha^4 a_1^2 - 48384\alpha^6 a_2 - 1400\alpha^2 a_0 a_1^2 + 9380\alpha^2 a_1^2 a_2 \\ -1680\alpha^2 a_0^2 a_2 + 1680a_1^2 a_0 a_2 - 3360\alpha^2 a_2^3 - 1260a_2^2 a_1^2 \\ -840a_0 a_2^3 - 16800\alpha^4 a_0 a_2 + 30912\alpha^4 a_2^2 + 840a_0^2 a_2^2 + 10080\alpha^2 a_0 a_2^2 \\ +140a_1^4 = 0, \end{array}$$

$$Y^6 \ : \begin{array}{l} 700a_1^3 a_2 - 980a_1 a_2^3 + 9240\alpha^6 a_1 + 16730\alpha^2 a_1 a_2^2 + 2100a_0 a_1 a_2^2 \\ -43876\alpha^4 a_1 a_2 - 1050\alpha^2 a_1^3 - 7000\alpha^2 a_2 a_1 a_0 + 1680\alpha^4 a_0 a_1 = 0, \end{array}$$

$$Y^7 \ : \begin{array}{l} -6720\alpha^2 a_0 a_2^2 - 280a_2^4 + 840a_0 a_2^3 - 6300\alpha^2 a_1^2 a_2 \\ +80460\alpha^6 a_2 + 10080\alpha^4 a_0 a_2 + 1260a_1^2 a_2^2 + 8960\alpha^2 a_2^3 \\ -57120\alpha^4 a_2^2 + 3528\alpha^4 a_1^2 = 0, \end{array}$$

$$Y^8 \ : \ -10780\alpha^2 a_1 a_2^2 + 24696\alpha^4 a_1 a_2 - 5040\alpha^6 a_1 + 980 a_1 a_2^3 = 0,$$

$$Y^9 \ : \ 30240\alpha^4 a_2^2 - 5600\alpha^2 a_2^3 + 250 a_2^4 - 40320\alpha^6 a_2 = 0 \tag{2.133}$$

แก้ระบบสมการ (2.133) จะได้

$$\beta = 64\alpha^6 + 224\alpha^4 a_0 + 140 a_0^3 + 280\alpha^2 a_0^2,$$
$$a_1 = 0 \, , \ a_2 = 2\alpha^2 \tag{2.134}$$

ในสมการ (2.134) เลือก $a_0 = 0$ จะได้

$$\beta = 64\alpha^6$$
$$a_1 = 0 \ , \ a_2 = 2\alpha^2 \tag{2.135}$$

แทนค่าตัวแปร β, a_1 และ a_2 จากสมการ (2.135) ในสมการ (2.132) จะได้คำตอบแม่นตรงของสมการคลื่นที่อยู่ในรูป

$$u = 2\left[\alpha \operatorname{sech}(\alpha(x - 64\alpha^6 t)\right]^2$$

วาซวาซ (Wazwaz, 2007) ได้หาผลเฉลยของสมการโคโนเปลเช็งโก-ดูโบรสกี (2+1) มิติ (The (2 + 1)-dimensional Konopelchenko–Dubrovsky equation) ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$u_t - u_{xxx} - 6buu_x + \frac{3}{2}a^2u^2u_x - 3v_y + 3au_xv = 0$$
$$u_y = v_x \tag{2.136}$$

ใช้สมการ (2.4) และ (2.5)

$$u_y = v_x$$

ใช้สมการ (2.4) และ (2.5)

ให้ $u(x,y,t) = U(\mu\xi)$ และ $v(x,y,t) = V(\mu\xi)$

เมื่อ $\xi = x + y - ct$

ดังนั้นจะได้

$$\frac{d}{dt} = -c\frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{d}{dy} = \frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d^2}{d\xi^2}$$

เปลี่ยนสมการ (2.136) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$-cU' - U''' - 3b(U^2)' + \frac{1}{2}a^2(U^3)' - 3V' + 3aU'V = 0$$

(2.137)

$$U' = V'$$

โดยการอินทิเกรตทั้งสมการที่สองใน (2.137) และให้ค่าคงที่เป็นศูนย์จะได้

$$U = V \tag{2.138}$$

แทนค่า (2.138) ใน (2.137) แล้วอินทิเกรดสมการแรกจะได้

$$(c+3)U + 3(b-\frac{a}{2})U^2 - \frac{1}{2}a^2U^3 + U'' = 0 \qquad (2.139)$$

กำหนด $$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k$$

(2.140)

เมื่อ $$Y = \operatorname{sech}(\mu\xi)$$

จะหาอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{dU(\xi)}{d\xi} = -\mu Y\sqrt{1-Y^2}\,\frac{dS}{dY}$$

(2.141)

$$\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2} = -\mu^2 Y\sqrt{1-Y^2}\left(-\sqrt{1-Y^2}\,\frac{dS}{dY} + \frac{Y^2\frac{dS}{dY}}{\sqrt{1-Y^2}} - Y\sqrt{1-Y^2}\,\frac{d^2S}{dY^2}\right)$$

และ $$S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k = a_0 + a_1Y + a_2Y^2 + \ldots + a_M Y^M$$

$$S'(Y) = \sum_{k=0}^{M} k a_k Y^{k-1} = a_1 + 2a_2Y + 3a_3Y^2 + \ldots + M a_M Y^{M-1}$$

$$S''(Y) = \sum_{k=0}^{M} k(k-1) a_k Y^{k-2} = 2a_2 + 6a_3Y + \ldots + M(M-1) a_M Y^{M-2} \qquad (2.142)$$

แทน (2.141) และ (2.142) โดยเงื่อนไข (2.140) ในสมการ (2.139) เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ M ซึ่งได้จากการนำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นอันดับสูงสุดในสมการของผลลัพธ์ มาเปรียบเทียบกับอันดับสูงสุดในพจน์ไม่เชิงเส้น แล้วทำการหา M โดยการเทียบสัมประสิทธิ์กำลังของ Y นั่นคือ เทียบเลขชี้กำลังของพจน์ Y^{M+2} ที่ปรากฏขึ้นในพจน์ U'' ซึ่งเป็นอนุพันธ์อันดับสูงสุดของพจน์เชิงเส้นกับ Y^{3M} ในพจน์ U^3 ซึ่งเป็นพจน์ไม่เชิงเส้นอันดับสูงสุดของสมการ (2.139) จะได้

$$M+2=3M$$

นั่นคือ $$M=1$$

แทนค่า $M=1$ ในสมการ (2.140) จะได้

$$S(Y)=a_0+a_1Y$$

(2.143)

และหาอนุพันธ์ได้ดังนี้ $$S'(Y)=a_1$$

แทนค่า (2.143) ลงในสมการ (2.139) แล้วพิจารณาสัมประสิทธิ์แต่ละกำลังของ Y จะได้ระบบสมการที่ประกอบด้วย a_0, a_1, μ และ c ดังนี้

$$Y^0 : \quad a_1(a^2a_1^2+4\mu^2)=0\,,$$

$$Y^1 : \quad a_1^{\,2}(-6b+3a+3a^2a_0)=0\,,$$

$$Y^2 : \quad a_1(-2c-12ba_0-6+6aa_0-2\mu^2+3a^2a_0)=0\,,$$

$$Y^3 : \quad -2ca_0-6ba_0^2+3aa_0^2+a^2a_0^3-6a_0=0 \qquad (2.144)$$

แก้ระบบสมการ (2.144) จะได้

$$a_0=\frac{(2b-a)}{a^2}\,,$$

$$a_1=\pm\frac{\sqrt{2}(a-2b)}{a^2}\,,$$

(2.145)

$$\mu=i\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a-2b}{a}\,, \qquad i^2=-1$$

แทนค่า (2.145) โดยเงื่อนไข (2.140) ลงในสมการ (2.143) ทำให้เราได้สมการทำนายเป็น

$$u(x,y,t)=\frac{(2b-a)}{a^2}\left(1\pm\sqrt{2}\sec\left[\frac{a-2b}{\sqrt{2}a}\left(x+y+\frac{4(ab-a^2-b^2)}{a^2}t\right)\right]\right)$$

และ

$$u(x,y,t)=\frac{(2b-a)}{a^2}\left(1\pm\sqrt{2}\csc\left[\frac{a-2b}{\sqrt{2}a}\left(x+y+\frac{4(ab-a^2-b^2)}{a^2}t\right)\right]\right)$$

วาซวาซ (Wazwaz, 2007) ได้ใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์-ไฮเพอร์โบลิกโคแทนเจนต์ และวิธี ไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ สำหรับสมการจูเลนต์-มิโอเดก (Jaulent–Miodek equation) ที่มีรูปแบบ

$$\begin{aligned} u_t+u_{xxx}+\frac{3}{2}vv_{xxx}+\frac{9}{2}v_xv_{xx}-6uu_x-6uvv_x-\frac{3}{2}u_xv^2&=0 \\ v_t+v_{xxx}-6u_xv-6uv_x-\frac{15}{2}v_xv^2&=0 \end{aligned} \qquad (2.146)$$

ในทำนองเดียวกับการหาผลเฉลยของระบบสมการ (2.136) งานวิจัยนี้ทำให้ได้ผลเฉลยแม่นตรงของคลื่นโซลิทอรี่ $u(x,t)$ และ $v(x,t)$ ที่อยู่ในรูปไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ (sech) ไม่ใช่เป็นเพียงสมการทำนาย ดังนี้

$$u_1(x,t)=\frac{1}{8}\gamma^2\left(1-4\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2}\gamma\left(x+\frac{1}{2}\gamma^2t\right)\right]\right) \qquad (2.147)$$

$$v_1(x,t)=\gamma\,\mathrm{sech}\left[\frac{1}{2}\gamma\left(x+\frac{1}{2}\gamma^2t\right)\right] \qquad (2.148)$$

และ

และ

$$u_2(x,t) = \frac{1}{4}\left(\gamma^2 - \beta^2\right) - \frac{1}{2}\beta\gamma \operatorname{sech}\left[\gamma\left(x + \frac{1}{2}\left(6\beta^2 + \gamma^2\right)t\right)\right]$$
$$-\frac{3}{4}\gamma^2 \operatorname{sech}\left[\gamma\left(x + \frac{1}{2}\left(6\beta^2 + \gamma^2\right)t\right)\right] \tag{2.149}$$

$$v_2(x,t) = \beta + \gamma \operatorname{sech}\left[\gamma\left(x + \frac{1}{2}\left(6\beta^2 + \gamma^2\right)t\right)\right] \tag{2.150}$$

จากงานวิจัยที่เกี่ยวข้องนี้ทำให้ทราบว่าสมการบูซิเน สมการไคลน์-กอร์ดอนและวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ เป็นวิธีหนึ่งที่สามารถใช้หาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น และระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้อย่างมีประสิทธิภาพ สามารถนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาอื่น ๆ ทำให้เกิดแนวทางในการที่จะนำไปสู่การศึกษา ปัญหาสมการบูซิเน และสมการไคลน์-กอร์ดอน ในครั้งนี้ด้วย