บทที่ 5
สรุปและอภิปรายผล

ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางจีออเดซิกเพียงตัวเดียว แบบไฮเพอร์โบลิก โดยที่ $\operatorname{card}(X) \geq 2$

ค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์บนปริภูมิ X นิยามโดย

สำหรับ $x \in X$ นิยาม

$$C_{NJ}^{d}(x) = \sup\left\{ \frac{d(y_1,y_2)^2 + 4d(x,y_0)^2}{2\left(d(x,y_1)^2 + d(x,y_2)^2\right)} : \begin{array}{l} y_1, y_2 \in X,\ y_0 = m[y_1,y_2] \\ \text{และ } (x,x) \neq (y_1,y_2) \end{array} \right\}$$

และนิยาม

$$C_{NJ}^{d}(X) = \sup\{C_{NJ}(x) : x \in X\}$$

โดยที่ y_0 เป็นจุดกึ่งกลางของเซกเมนต์ $[y_1,y_2]$
ได้ข้อสรุปที่สำคัญที่ได้จากการศึกษาแบ่งออกเป็นหัวข้อ ดังนี้

1. ค่าของค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์บนปริภูมิอิงระยะทาง

1.1 ทฤษฎีบท 4.3 ถ้า X เป็นปริภูมิจีออเดซิกเพียงตัวเดียวแบบไฮเพอร์โบลิก โดยที่ $\operatorname{card}(X) \geq 2$ แล้ว $1 \leq C_{NJ}^{d}(X) \leq 2$

1.2ทฤษฎีบท 4.4 ถ้า X เป็นปริภูมิภายใต้เมตริกที่เกิดจากนอร์ม จะได้ว่า $C_{NJ}(X) = C_{NJ}^{d}(X)$

1.3 ทฤษฎีบท 4.5 ให้ X เป็นปริภูมิจีออเดซิกเพียงตัวเดียวแบบไฮเพอร์โบลิก โดยที่ $\operatorname{card}(X) \geq 2$ จะได้ว่า $C_{NJ}^{d}(X) = 1$ ก็ต่อเมื่อ X เป็นปริภูมิ CAT(0)

2. ความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์กับสมบัติอื่น ๆ

2.1 ทฤษฎีบท 4.6 ถ้า X เป็นปริภูมิจีออเดซิกเพียงตัวเดียวแบบไฮเพอร์โบลิก โดยที่ $\operatorname{card}(X) \geq 2$ แล้ว $\tilde{N}(X) \leq \left(C_{NJ}{}^{d}(X) - \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

2.2 ทฤษฎีบท 4.7 ถ้า X เป็นปริภูมิจีออเดซิกเพียงตัวเดียวแบบไฮเพอร์โบลิก โดยที่ $\operatorname{card}(X) \geq 2$ ที่ $C_{NJ}^{d}(X) < 5/4$ แล้ว X มีโครงสร้างปรกติแบบเอกรูป

2.3 บทแทรก 4.8 ถ้า X เป็นปริภูมิ CAT(0) แล้ว X มีโครงสร้างปรกติแบบเอกรูป

2.4 ทฤษฎีบท 4.9 ถ้า X เป็นปริภูมิอิงระยะทางจีออเดซิกเพียงตัวเดียวแบบ

ไฮเพอร์โบลิกบริบูรณ์ที่มีขอบเขต ซึ่ง $C_{NJ}^{d}(X) < 5/4$ แล้ว สำหรับทุก ๆ การส่งแบบไม่ขยาย $T: X \to X$ มีจุดตรึง

2.5 ทฤษฎีบท 4.10 ให้ X เป็นปริภูมิจีออเดซิกเพียงตัวเดียวแบบไฮเพอร์โบลิก โดยที่ $\operatorname{card}(X) \geq 2$ ดังนั้น $J_d(X) \leq \sqrt{2C_{NJ}^{d}(X)}$

2.6 บทแทรก 4.12 ขอบเขตบนของ $J_d(X)$ คือ 2

2.7 บทแทรก 4.12 ถ้า $C_{NJ}^{d}(X) < 2$ แล้ว $J_d(X) < 2$

2.8 บทแทรก 4.13 ถ้า X เป็นปริภูมิ CAT(0) แล้ว $J_d(X) < \sqrt{2}$

2.9 ทฤษฎีบท 4.16 ถ้า $C_{NJ}^{d}(X) < 2$ แล้ว ปริภูมิไฮเพอร์โบลิก X เป็นนอนสแควแบบเอกรูปขึ้นกับเมตริก d

2.10 บทแทรก 4.17 ปริภูมิ CAT (0) เป็นนอนสแควแบบเอกรูปขึ้นกับเมตริก d

2.11 บทแทรก 4.22 ให้ X เป็นปริภูมิที่คอนเวกซ์แบบเอกรูป ถ้า $C_{NJ}^{d}(X) < 5/4$ แล้ว $\delta(x,1,1) > 0$

2.12 บทตั้ง 4.23 ถ้า X เป็นปริภูมิ CAT(0) แล้ว $\delta(x,1,\varepsilon) \leq 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$

2.13 ทฤษฎีบท 4.24 $C_{NJ}^{d}(X) \geq \sup\left\{ \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + (1 - \delta(x,1,\varepsilon))^2 : \varepsilon \in (0,2] \right\}$

แนวทางในการทำวิจัยต่อ

ขยายขอบเขตบนของค่า $C_{NJ}^{d}(X)$ ที่ 5/4 ในทฤษฎีบทที่ 4.7 เป็นจำนวนอื่นที่มากกว่า