บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

กระบวนการแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในแบบอันดับผสม เพื่อลดการสิ้นเปลืองแรงงานที่ใช้ในการคำนวณนั้น ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอน ดังนี้

1. วิธีการประมาณค่าเมทริกซ์จาโคเบียนของวิธีรุงเง-คุตตา แบบไม่ชัดแจ้งแนวเดียว
2. ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในแบบอันดับผสมที่ใช้ทดสอบ
3. ทดสอบการแก้ปัญหาโดยวิธีรุงเง-คุตตา แบบไม่ชัดแจ้งแนวเดียว

วิธีการประมาณค่าเมทริกซ์จาโคเบียนของวิธีรุงเง-คุตตา แบบไม่ชัดแจ้งแนวเดียว

การประมาณค่าเมทริกซ์จาโคเบียนของปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในแบบอันดับผสม มีแนวคิด คือ ตัดพจน์ของ h ที่มีเลขยกกำลังมากกว่าหรือเท่ากับสอง เมื่อ h มีค่าน้อยมาก คือ $h \to 0$ จะให้ค่าที่ถูกต้องใกล้เคียงความจริง โดยสมมุติว่า Φ สามารถหาอนุพันธ์ได้

พิจารณาการประมาณค่าเมทริกซ์จาโคเบียนของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสูง ที่กำหนดค่าขอบสองจุด (1.1) โดยแปลงสมการ (1.1) เป็นระบบสมการอันดับหนึ่ง (2.12) และ (2.13)

พิจารณาเฉพาะเมทริกซ์จาโคเบียน $\Phi'(W)$ จะได้

$$\begin{pmatrix} B_a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ L_0 & R_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & R_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & L_{N-1} & R_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & B_b \end{pmatrix}$$

เมื่อ

$$B_a = \frac{\partial g_a}{\partial w_0} \quad , \quad B_b = \frac{\partial g_b}{\partial w_N}$$
$$L_n = \frac{\partial \phi_n}{\partial w_n} \quad \text{และ} \quad R_n = \frac{\partial \phi_n}{\partial w_{n+1}} \quad , n = 0, \dots, N-1$$

$$\phi_n = w_{n+1} - w_n - h_n \sum_{r=1}^{s} \omega_r k_r$$

เมื่อ

$$k_r = f\left(x_n + c_r h_n, (1-\gamma_r)w_n + \gamma_r w_{n+1} + h_n \sum_{j=1}^{s} \beta_{rj} k_j\right) \quad , r = 1, 2, \ldots, s$$

$$L_n = -I - h_n \sum_{r=1}^{s} \omega_r \left(\frac{\partial k_r}{\partial w_n}\right) \quad \text{และ } R_n = I - h_n \sum_{r=1}^{s} \omega_r \left(\frac{\partial k_r}{\partial w_{n+1}}\right)$$

สำหรับ $r = 1, \ldots, s$

$$\frac{\partial k_r}{\partial w_n} = \left[\frac{\partial F}{\partial w}\right]\left((1-\gamma_r)I + h_n \sum_{j=1}^{r-1} \beta_{rj} \frac{\partial k_j}{\partial w_n}\right) \text{ และ}$$

$$\frac{\partial k_r}{\partial w_{n+1}} = \left[\frac{\partial F}{\partial w}\right]\left(\gamma_r I + h_n \sum_{j=1}^{r-1} \beta_{rj} \frac{\partial k_j}{\partial w_{n+1}}\right)$$

ซึ่งขั้นตอนในการประมาณค่าเมทริกซ์จาโคเบียน มีดังนี้

พิจารณาโดยตัดเงื่อนไขค่าขอบออก

$$\begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & L & R & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial \phi_n}{\partial w_n} & \frac{\partial \phi_n}{\partial w_{n+1}} & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $w_n = \left(u_n^{(0)}, u_n^{(1)}, \ldots, u_n^{(m-1)}\right)^T$ จะได้

$$L = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi^{(0)}(w_n, w_{n+1})}{\partial u_n^{(0)}} & \frac{\partial \phi^{(0)}(w_n, w_{n+1})}{\partial u_n^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial \phi^{(0)}(w_n, w_{n+1})}{\partial u_n^{(m-1)}} \\ \frac{\partial \phi^{(1)}(w_n, w_{n+1})}{\partial u_n^{(0)}} & \frac{\partial \phi^{(1)}(w_n, w_{n+1})}{\partial u_n^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial \phi^{(1)}(w_n, w_{n+1})}{\partial u_n^{(m-1)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi^{(m-1)}(w_n, w_{n+1})}{\partial u_n^{(0)}} & \frac{\partial \phi^{(m-1)}(w_n, w_{n+1})}{\partial u_n^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial \phi^{(m-1)}(w_n, w_{n+1})}{\partial u_n^{(m-1)}} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

และ

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi^{(0)}(w_n, w_{n+1})}{\partial u_{n+1}^{(0)}} & \frac{\partial \phi^{(0)}(w_n, w_{n+1})}{\partial u_{n+1}^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial \phi^{(0)}(w_n, w_{n+1})}{\partial u_{n+1}^{(m-1)}} \\ \frac{\partial \phi^{(1)}(w_n, w_{n+1})}{\partial u_{n+1}^{(0)}} & \frac{\partial \phi^{(1)}(w_n, w_{n+1})}{\partial u_{n+1}^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial \phi^{(1)}(w_n, w_{n+1})}{\partial u_{n+1}^{(m-1)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi^{(m-1)}(w_n, w_{n+1})}{\partial u_{n+1}^{(0)}} & \frac{\partial \phi^{(m-1)}(w_n, w_{n+1})}{\partial u_{n+1}^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial \phi^{(m-1)}(w_n, w_{n+1})}{\partial u_{n+1}^{(m-1)}} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

จากสูตร MIRK จะได้

$$\Phi_n^{(i)} = \phi^{(i)}\left(u_n^{(i)}, u_{n+1}^{(i)}\right) = u_{n+1}^{(i)} - u_n^{(i)} - h \sum_{r=1}^{s} \omega_r F^{(i)}(U_{n,r}), \tag{3.3}$$

เมื่อ

$$U_{n,r}^{(i)} = (1-\gamma_r) u_n^{(i)} + \gamma_r u_{n+1}^{(i)} + h \sum_{j=1}^{r-1} \beta_{rj} F^{(i)}(U_{n,j}) \tag{3.4}$$

จาก (2.13) เราใช้

$$F(W) = \begin{pmatrix} F^{(0)}(W) \\ F^{(1)}(W) \\ \vdots \\ F^{(m-1)}(W) \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$U_{n,r} = \begin{pmatrix} U_{n,r}^{(0)} \\ U_{n,r}^{(1)} \\ \vdots \\ U_{n,r}^{(m-1)} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

เนื่องจาก L มีขนาด $m \times m$ โดยกำหนดให้เป็นแถว 0 ถึง $m-1$ และผลของการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสูงเป็นระบบสมการอันดับหนึ่ง พบว่า โครงสร้างของแถว 0 ถึง $m-2$ มีตัวแปรต้นตัวเดียวตามกระบวนการลดรูป ส่วนแถวสุดท้าย (แถว $m-1$) มีตัวแปรต้นเช่นเดียวกับสมการตั้งต้น ดังนั้น ในการประมาณค่า Φ' เราจึงแยกพิจารณาการประมาณค่า เป็นแถว 0 ถึง $m-2$ และ แถว $m-1$

การประมาณค่าของอนุพันธ์ย่อย $\partial\Phi_n^{(i)}/\partial u_n^{(k)}$ แยกเป็น

1. แถว 0 ถึง $m-2$ พิจารณาเป็น 3 กรณี คือ $i = k$, $i+1 = k$ และอื่น ๆ

2. แถวสุดท้ายของ L (แถว $m-1$) ซึ่งมีโครงสร้างซับซ้อน จะแยกพิจารณาเป็น 2 ส่วน คือ คอลัมน์ 0 ถึง $m-2$ และ คอลัมน์ $m-1$

ส่วนการประมาณค่า R มีวิธีการประมาณค่าในทำนองเดียวกัน

เริ่มต้นประมาณค่าจากการหาอนุพันธ์ย่อยของ $U_{n,r}^{(i)}$ เทียบกับ $u_n^{(k)}$ และ $u_{n+1}^{(k)}$ ซึ่งจะแยกพิจารณา 2 กรณี คือ $i = k$ และ $i \neq k$

จาก

$$\frac{\partial U_{n,r}^{(i)}}{\partial u_n^{(k)}} = (1-\gamma_r)\frac{\partial u_n^{(i)}}{\partial u_n^{(k)}} + h\sum_{j=1}^{r-1}\beta_{rj}\frac{\partial F^{(i)}(U_{n,j})}{\partial U_{n,j}}\frac{\partial U_{n,j}}{\partial u_n^{(k)}} \tag{3.7}$$

สำหรับ $i = k$ จะได้

$$\frac{\partial U_{n,r}^{(i)}}{\partial u_n^{(i)}} = (1-\gamma_r)I + \mathrm{O}(h) \tag{3.8}$$

เมื่อ $\mathrm{O}(h)$ มีความหมายว่า เป็นพจน์ที่ h มีเลขยกกำลังเป็นจำนวนบวก

สำหรับ $i \neq k$ จะได้

$$\frac{\partial U_{n,r}^{(i)}}{\partial u_n^{(k)}} = 0 + \mathrm{O}(h) \tag{3.9}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{\partial U_{n,r}^{(i)}}{\partial u_{n+1}^{(k)}} = \gamma_r \frac{\partial u_{n+1}^{(i)}}{\partial u_{n+1}^{(k)}} + h\sum_{j=1}^{r-1}\beta_{rj}\frac{\partial F^{(i)}(U_{n,j})}{\partial U_{n,j}}\frac{\partial U_{n,j}}{\partial u_{n+1}^{(k)}} \tag{3.10}$$

สำหรับ $i=k$, (3.10) จะได้

$$\frac{\partial U_{n,r}^{(i)}}{\partial u_{n+1}^{(i)}} = \gamma_r I + \mathrm{O}(h) \tag{3.11}$$

สำหรับ $i \neq k$, (3.10) จะได้

$$\frac{\partial U_{n,r}^{(i)}}{\partial u_{n+1}^{(k)}} = 0 + \mathrm{O}(h) \tag{3.12}$$

พิจารณา (3.3) และใช้ (2.13)

สำหรับ $i = 0,\ldots,m-2$

$$\Phi_n^{(i)} = u_{n+1}^{(i)} - u_n^{(i)} - h\sum_{r=1}^{s}\omega_r U_{n,r}^{(i+1)} , \tag{3.13}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial \Phi_n^{(i)}}{\partial u_n^{(k)}} = -\frac{\partial u_n^{(i)}}{\partial u_n^{(k)}} - h\sum_{r=1}^{s}\omega_r \frac{\partial U_{n,r}^{(i+1)}}{\partial u_n^{(k)}} \tag{3.14}$$

สำหรับ $i=k$, แทนที่ (3.9) ใน (3.14) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_n^{(i)}}{\partial u_n^{(i)}} &= -I - h\sum_{r=1}^{s}\omega_r(0+\mathrm{O}(h)) \\ &= -I + \mathrm{O}(h^2) \\ &\approx -I \end{aligned} \tag{3.15}$$

สำหรับ $i+1=k$, แทนที่ (3.8) ใน (3.14) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_n^{(i)}}{\partial u_n^{(i+1)}} &= -h\sum_{r=1}^{s}\omega_r((1-\gamma_r)I + \mathrm{O}(h)) \\ &= (-h\sum_{r=1}^{s}\omega_r(1-\gamma_r)I) + \mathrm{O}(h^2) \\ &= -h(1-\gamma)I + \mathrm{O}(h^2) \\ &\approx -h(1-\gamma)I \end{aligned} \tag{3.16}$$

เมื่อ $\sum_{r=1}^{s}\omega_r = 1$ และกำหนดให้ $\gamma = \sum_{r=1}^{s}\omega_r\gamma_r$

สำหรับ $i \neq k$ และ $i+1 \neq k$, แทนที่ (3.9) ใน (3.14) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_n^{(i)}}{\partial u_n^{(k)}} &= -h\sum_{r=1}^{s}\omega_r(0+\mathrm{O}(h)) \\ &= \mathrm{O}(h^2) \\ &\approx 0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

พิจารณา (3.13)

สำหรับ $i=0,\ldots,m-2$ จะได้

$$\frac{\partial \Phi_n^{(i)}}{\partial u_{n+1}^{(k)}} = \frac{\partial u_{n+1}^{(i)}}{\partial u_{n+1}^{(k)}} - h\sum_{r=1}^{s}\omega_r \frac{\partial U_{n,r}^{(i+1)}}{\partial u_{n+1}^{(k)}} \tag{3.18}$$

สำหรับ $i=k$, แทนที่ (3.12) ใน (3.18) จะได้

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_n^{(k)}}{\partial u_{n+1}^{(k)}} &= I - h\sum_{r=1}^{s}(0+\mathrm{O}(h)) \\ &= I+\mathrm{O}(h^2) \\ &\approx I\end{aligned} \tag{3.19}$$

สำหรับ $i+1=k$, แทนที่ (3.11) ใน (3.18) จะได้

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_n^{(i)}}{\partial u_{n+1}^{(i+1)}} &= -h\sum_{r=1}^{s}\omega_r(\gamma_r I+\mathrm{O}(h)) \\ &= (-h\sum_{r=1}^{s}\omega_r(\gamma_r I))+\mathrm{O}(h^2) \\ &= -h\gamma I+\mathrm{O}(h^2) \\ &\approx -h\gamma I\end{aligned} \tag{3.20}$$

สำหรับ $i\neq k$ และ $i+1\neq k$, แทนที่ (3.12) ใน (3.18) จะได้

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_n^{(i)}}{\partial u_{n+1}^{(k)}} &= -h\sum_{r=1}^{s}\omega_r(0+\mathrm{O}(h)) \\ &= \mathrm{O}(h^2) \\ &\approx 0\end{aligned} \tag{3.21}$$

จาก (3.3) พิจารณา สำหรับ $i=m-1$

$$\Phi_n^{(m-1)} = u_{n+1}^{(m-1)} - u_n^{(m-1)} - h\sum_{r=1}^{s}\omega_r f\left(U_{n,r}^{(0)},\ldots,U_{n,r}^{(m-1)}\right) \tag{3.22}$$

หาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ $u_n^{(k)}$ จะได้

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_n^{(m-1)}}{\partial u_n^{(k)}} &= -\frac{\partial u_n^{(m-1)}}{\partial u_n^{(k)}} - h\sum_{r=1}^{s}\omega_r\Bigg(f_0(\ldots)\frac{\partial U_{n,r}^{(0)}}{\partial u_n^{(k)}} + f_1(\ldots)\frac{\partial U_{n,r}^{(1)}}{\partial u_n^{(k)}}+\ldots \\ &\quad + f_{m-1}(\ldots)\frac{\partial U_{n,r}^{(m-1)}}{\partial u_n^{(k)}}\Bigg)\end{aligned} \tag{3.23}$$

เราใช้ตัวย่อ $f_i(\ldots)$ แทน อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $f\left(U_{n,r}^{(0)},U_{n,r}^{(1)},\ldots,U_{n,r}^{(m-1)}\right)$ เทียบกับตัวแปรลำดับที่ i^{th} หาค่าที่จุด $\left(U_{n,r}^{(0)},U_{n,r}^{(1)},\ldots,U_{n,r}^{(m-1)}\right)$

พิจารณาพจน์ที่อยู่ในรูป

$$-h\sum_{r=1}^{s}\omega_r f_q(\ldots)\frac{\partial U_{n,r}^{(q)}}{\partial u_n^{(k)}} \tag{3.24}$$

สำหรับ $q=0,\ldots,m-1$ จาก (3.9) จะได้

$$
\begin{aligned}
-h\sum_{r=1}^{s}\omega_r f_q(\ldots)\frac{\partial U_{n,r}^{(q)}}{\partial u_n^{(k)}} &= -h\sum_{r=1}^{s}\omega_r f_q(\ldots)\left(0+\mathrm{O}(h)\right) \\
&= \mathrm{O}\left(h^2\right) \\
&\approx 0
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

สำหรับ $q=k$ จาก (3.8) จะได้

$$
\begin{aligned}
-h\sum_{r=1}^{s}\omega_r f_k(\ldots)\frac{\partial U_{n,r}^{(k)}}{\partial u_n^{(k)}} &= -h\sum_{r=1}^{s}\omega_r f_k(\ldots)\left((1-\gamma_r)I+\mathrm{O}(h)\right) \\
&= \left(-h\sum_{r=1}^{s}\omega_r f_k(\ldots)(1-\gamma_r)I\right)+\mathrm{O}\left(h^2\right) \\
&\approx -h\sum_{r=1}^{s}\omega_r f_k(\ldots)(1-\gamma_r)I \\
&\approx -h(1-\gamma)f_k(\ldots)
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

พิจารณา (3.23) สำหรับ $k=0,\ldots,m-2$ จาก (3.25) และ (3.26) จะได้

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi_n^{(m-1)}}{\partial u_n^{(k)}} &= \left(-h\sum_{r=1}^{s}\omega_r\left(f_k(\ldots)\frac{\partial U_{n,r}^{(k)}}{\partial u_n^{(k)}}\right)\right)+\mathrm{O}\left(h^2\right) \\
&= \left(-h\sum_{r=1}^{s}\omega_r f_k(\ldots)(1-\gamma_r)I\right)+\mathrm{O}\left(h^2\right) \\
&\approx -h(1-\gamma)f_k\left(u_n^{(0)},u_n^{(1)},\ldots u_n^{(m-1)}\right)
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

พิจารณา (3.23) สำหรับ $k=m-1$ จาก (3.25) และ (3.26) จะได้

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi_n^{(m-1)}}{\partial u_n^{(m-1)}} &= -I-\left(h\sum_{r=1}^{s}\omega_r\left(f_{m-1}(\ldots)\frac{\partial U_{n,r}^{(m-1)}}{\partial u_n^{(m-1)}}\right)\right)+\mathrm{O}\left(h^2\right) \\
&= -I-\left(h\sum_{r=1}^{s}\omega_r f_{m-1}(\ldots)(1-\gamma_r)I\right)+\mathrm{O}\left(h^2\right) \\
&\approx -I-h\sum_{r=1}^{s}\omega_r f_{m-1}(\ldots)(1-\gamma_r)I \\
&\approx -I-h(1-\gamma)f_{m-1}\left(u_n^{(0)},u_n^{(1)},\ldots u_n^{(m-1)}\right)
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

จากนั้น หาอนุพันธ์ย่อยของ (3.22) เทียบกับ u_{n+1} ซึ่งมีวิธีการทำนองเดียวกันกับการหาอนุพันธ์ย่อยของ (3.22) เทียบกับ u_n ดังนั้น จะได้

$$
\frac{\partial\Phi_n^{(m-1)}}{\partial u_{n+1}^{(k)}} \approx -h\gamma f_k\left(u_n^{(0)},u_n^{(1)},\ldots u_n^{(m-1)}\right)
\tag{3.29}
$$

สำหรับ $k=0,\ldots,m-2$ และ

$$
\frac{\partial\Phi_n^{(m-1)}}{\partial u_{n+1}^{(m-1)}} \approx I-h\gamma f_{m-1}\left(u_n^{(0)},u_n^{(1)},\ldots u_n^{(m-1)}\right)
\tag{3.30}
$$

เราจะได้เมทริกซ์จาโคเบียนที่ถูกประมาณค่าตามต้องการ เขียนแทนด้วย $\tilde{\Phi}'$ ซึ่งมี

รูปแบบเป็น $\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \tilde{L} & \tilde{R} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ โดยแทนที่ (3.15), (3.16), (3.17), (3.27) และ (3.28) ใน (3.1) และให้ $\alpha = 1-\gamma$ จะได้

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} -I & -h\alpha I & & & \\ & -I & -h\alpha I & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -I & -h\alpha I \\ -h\alpha f_0 & -h\alpha f_1 & \dots & -h\alpha f_{m-2} & -I-h\alpha f_{m-1} \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

และ แทนที่ (3.19), (3.20), (3.21), (3.29) และ (3.30) ใน (3.2) จะได้

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} I & -h\gamma I & & & \\ & I & -h\gamma I & & \\ & & \ddots & & \\ & & & I & -h\gamma I \\ -h\gamma f_0 & -h\gamma f_1 & \dots & -h\gamma f_{m-2} & I-h\gamma f_{m-1} \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในแบบอันดับผสม ที่กำหนดค่าขอบสองจุด (2.5) สามารถแปลงสมการเป็นระบบสมการอันดับหนึ่ง (2.6) และประมาณค่าเมทริกซ์จาโคเบียนของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในแบบอันดับผสมที่กำหนดค่าขอบสองจุด ได้ทำนองเดียวกันกับการประมาณค่าเมทริกซ์จาโคเบียนของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง ที่กำหนดค่าขอบสองจุดจาก (2.7) เราใช้

$$F(W) = \begin{pmatrix} F^{(0)}(W) \\ F^{(1)}(W) \\ \vdots \\ F^{(m_1-1)}(W) \\ \vdots \\ F^{(m-2)}(W) \\ F^{(m-1)}(W) \end{pmatrix}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$U_{n,r} = \begin{pmatrix} U_{n,r}^{(0)} \\ U_{n,r}^{(1)} \\ \vdots \\ U_{n,r}^{(m_1-1)} \\ \vdots \\ U_{n,r}^{(m-2)} \\ U_{n,r}^{(m-1)} \end{pmatrix}$$

จะได้รูปแบบของ $\tilde{L}$ และ $\tilde{R}$ คือ

$$\tilde{L}=\begin{pmatrix} -I & -h\alpha I & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -I & -h\alpha I & \dots & 0 & 0 \\ -h\alpha f_0^1 & -h\alpha f_1^1 & \dots & -h\alpha f_{m_1-2}^1 & -I-h\alpha f_{m_1-1}^1 & \dots & -h\alpha f_{m-2}^1 & -h\alpha f_{m-1}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -I & -h\alpha I \\ -h\alpha f_0^d & -h\alpha f_1^d & \dots & -h\alpha f_{m_1-2}^d & -h\alpha f_{m_1-1}^d & \dots & -h\alpha f_{m-2}^d & -I-h\alpha f_{m-1}^d \end{pmatrix}$$

และ

$$\tilde{R}=\begin{pmatrix} I & -h\gamma I & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & -h\gamma I & \dots & 0 & 0 \\ -h\gamma f_0^1 & -h\gamma f_1^1 & \dots & -h\gamma f_{m_1-2}^1 & I-h\gamma f_{m_1-1}^1 & \dots & -h\gamma f_{m-2}^1 & -h\gamma f_{m-1}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & I & -h\gamma I \\ -h\gamma f_0^d & -h\gamma f_1^d & \dots & -h\gamma f_{m_1-2}^d & -h\gamma f_{m_1-1}^d & \dots & -h\gamma f_{m-2}^d & I-h\gamma f_{m-1}^d \end{pmatrix}$$

จะพบว่า เมทริกซ์จาโคเบียนที่ประมาณค่าแล้ว Φ' เป็นเมทริกซ์มากเลขศูนย์ $\tilde{L}$ และ $\tilde{R}$ แต่ละอันจะมีจำนวน m แถว ซึ่งจะหนาแน่นเฉพาะแถวที่ $m_1, m_1+m_2, \dots, m_1+m_2+\dots+m_d=m$ เท่านั้น $\tilde{L}$ และ $\tilde{R}$ แต่ละอันจะมีจำนวนสมาชิกเป็น $m \times m$ สมาชิก แต่จะมีจำนวนสมาชิกอย่างมาก $2(m-d)+(d\times m)$ ที่ไม่เป็นศูนย์ ซึ่งตรงข้ามกับเมทริกซ์จาโคเบียนที่ไม่ถูกประมาณค่า L และ R จะหนาแน่นมากกว่า

ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในแบบอันดับผสมที่ใช้ทดสอบ

ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในอันดับผสม ที่ใช้ในการทดสอบนี้เรียกว่า Swirling Flow III (Ascher et al., 1988) ซึ่งปัญหาค่าขอบดังกล่าว อยู่ในรูปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นอันดับสองและอันดับสี่ ODEs: (Mixed second / fourth order nonlinear system)

$$\begin{aligned} g'' &= (gf'-fg')/0.1 \\ f'''' &= (-ff'''-gg')/0.1 \end{aligned}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} &g(0)=-1, \quad g(1)=1 \\ &f(0)=f'(0)=f(1)=f'(1)=0 \end{aligned}$$

แปลงระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญข้างต้นให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง จะได้

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= (xu - zy)/0.1 \\ z' &= u \\ u' &= v \\ v' &= w \\ w' &= (-zw - xy)/0.1 \end{aligned}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} &x(0) = -1, \quad x(1) = 1 \\ &z(0) = u(0) = z(1) = u(1) = 0 \end{aligned}$$

ทดสอบการแก้ปัญหาโดยวิธีรุงเง-คุตตา แบบไม่ชัดแจ้งแนวเดียว

ทดสอบการแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในแบบอันดับผสม โดยวิธีรุงเง-คุตตา แบบไม่ชัดแจ้งแนวเดียว ที่มีการประมาณค่าเมทริกซ์จาโคเบียนตามวิธีการประมาณค่าที่นำเสนอในข้างต้น โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ MATLAB (licensed MATLAB จากภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา) กระทำภายใต้เงื่อนไข ดังนี้

1. ใช้วิธีรุงเง-คุตตา แบบไม่ชัดแจ้งแนวเดียว แบบ 5 ขั้น อันดับ 6 ในการคำนวณ
2. การคำนวณกำหนดให้ความกว้างของแต่ละช่วงมีขนาดเท่า ๆ กัน
3. การคำนวณดังกล่าวควรจะเสร็จสิ้นภายใน 40 ครั้ง ($MAXITS = 40$) ของการกระทำ ถ้าหากยังไม่ลู่เข้า หรือ ถ้า $\|\Delta W\|^2 > 100 = MAXN$ ให้ปรับจุดเริ่มต้นแล้วทำการคำนวณซ้ำอีกครั้ง

เงื่อนไขของการหยุดกระทำ เรากำหนดให้ $TOL = 0.0000001$

ขั้นตอนวิธีของนิวตัน

- Input : เมทริกซ์ A และ เวกเตอร์ b และกำหนด W เป็นจุดเริ่มต้น
- Output : ผลเฉลย W
- Algorithm
  1. หารากของระบบสมการ $A\Delta W = -b$
  2. คำนวณนอร์ม $err = \|\Delta W\|^2$
  3. ให้ $W = W + \Delta W$

ขั้นตอนการแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในสมการแบบอันดับผสม

- Input : กำหนดช่วง N และ กำหนด $W = (w_0, w_1, \ldots, w_N)$ เป็นจุดเริ่มต้น
- Output : ผลเฉลย W
- Algorithm
  1. Set iteration counter (k = 0)
  2. Loop:
     (a) คำนวณ Residual Function $b = \Phi(W)$
     (b) คำนวณเมทริกซ์จาโคเบียน $A = \Phi'(W)$ สำหรับ MIRK56org หรือ $A = \tilde{\Phi}'(W)$ สำหรับการประมาณค่าเมทริกซ์จาโคเบียน MIRK56apx
     (c) ใช้ขั้นตอนวิธีนิวตัน
       - Success if $err < TOL$, exit
       - Failure if $k > MAXITS$, exit
       - Failure if $err > MAXN$, exit
       - Failure if status = 4 , exit
     (d) increment iteration counter k