

บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ หลายๆ ปัญหาอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และการหาผลเฉลยของปัญหาที่เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญโดยวิธีวิเคราะห์กระทำได้ไม่มากนัก ดังนั้นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขจึงมีบทบาทสำคัญในการใช้แก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและได้รับการค้นคว้า พัฒนาจากนักคณิตศาสตร์หลายๆ ท่าน รวมถึงวิธีรุงเง-คุตตา แบบไม่ชัดแจ้ง (Implicit Runge-Kutta Method) ซึ่งเป็นวิธีการหนึ่งที่ได้รับการยอมรับอย่างกว้างขวางในด้านความมีเสถียรภาพและความแม่นยำของสูตร สามารถแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญทั้งปัญหาค่าเริ่มต้นและปัญหาค่าขอบ โดยในงานวิจัยนี้จะกล่าวถึงเฉพาะปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ซึ่งปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญมี 2 ลักษณะ คือ ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสูงและแบบอันดับผสม สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสูงที่กำหนดค่าขอบสองจุด มีรูปแบบสมการทั่วไป คือ

$$y^{(m)} = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}), \quad a < x < b \quad (1.1)$$

เงื่อนไขค่าขอบ

$$\begin{aligned} g(y(a), y(b)) &= 0 \\ g &\in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับผสมที่กำหนดค่าขอบสองจุด มีรูปแบบสมการทั่วไป คือ

$$y_i^{(m_i)} = f(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1-1)}, \dots, y_d, y_d', \dots, y_d^{(m_d-1)}), \quad a < x < b \quad (1.2)$$

เมื่อ

$$m = \sum_{i=1}^d m_i$$

เงื่อนไขค่าขอบ

$$\begin{aligned} g(y(a), y(b)) &= 0 \\ g &\in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

ในการหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ได้ถูกนำมาพัฒนาในรูปแบบของชุดโปรแกรม เช่น ACDC, COLSYS, COLNEW, COLMOD, TWPBVP และ MIRKDC เป็นต้น โดย TWPBVP และ MIRKDC นั้น ได้พัฒนาขึ้นโดยใช้วิธีรุงเง-คุตตา

แบบไม่ชัดแจ้งแนวเดียว (Mono-Implicit Runge-Kutta (MIRK) Method) ซึ่งเป็นคลาสิกย่อยของวิธีรุงเง-คุตตาแบบไม่ชัดแจ้ง แนวคิดของวิธีการดังกล่าวนำเสนอครั้งแรกโดย Cash (1975) ซึ่งมีประสิทธิภาพและความเสถียรภาพเป็นที่ยอมรับ แต่ในทางปฏิบัติไม่ได้รับความนิยมเนื่องจากใช้แรงงานในการคำนวณสูง จากข้อจำกัดดังกล่าว ได้มีนักวิจัยทางคณิตศาสตร์มุ่งศึกษาวิธีการลดการใช้แรงงานในการคำนวณของวิธีรุงเง-คุตตาแบบไม่ชัดแจ้งแนวเดียว (MIRK) โดยนำเสนอวิธีการในการลดปัญหาดังกล่าวในสมการอันดับสูง เพื่อให้ครอบคลุมกับลักษณะปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาวิธีปรับปรุงประสิทธิภาพวิธีรุงเง-คุตตาแบบไม่ชัดแจ้งแนวเดียว ที่ใช้ในการแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในแบบอันดับผสม โดยใช้วิธีการกระทำซ้ำเดิมของนิวตัน-ราฟสัน (Newton's Method) เพื่อแก้ปัญหสมการแบบไม่เชิงเส้นด้วยการประมาณค่าเมทริกซ์จาโคเบียน ซึ่งจะทำให้ใช้แรงงานในการคำนวณลดลง โดยสมมุติให้ความกว้างของช่วงมีค่าน้อยมาก คือ $h \rightarrow 0$ เมื่อ h มีเลขยกกำลังที่มากกว่าหรือเท่ากับสองจะมีค่าน้อยมากจนสามารถตัดทิ้งได้ ดังนั้นจะให้ค่าที่ถูกต้องใกล้เคียงความจริง จากแนวคิดดังกล่าว ผู้วิจัยจึงมุ่งพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อทำการคำนวณหาคำตอบปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในสมการแบบอันดับผสม โดยใช้วิธีข้างต้นเพื่อความสะดวกรวดเร็วและแม่นยำในการคำนวณ

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

ศึกษาและปรับปรุงประสิทธิภาพในการแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในสมการแบบอันดับผสมโดยวิธีรุงเง-คุตตา

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับการวิจัย

นำการแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในสมการแบบอันดับผสมโดยวิธีรุงเง-คุตตา ที่มีประสิทธิภาพสูงขึ้นไปใช้ในการแก้ปัญหทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์

ขอบเขตของการวิจัย

1. ในงานวิจัยนี้จะศึกษาปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในสมการแบบอันดับผสมซึ่งมีเงื่อนไขค่าขอบแบบแยกได้
2. มีข้อสมมุติว่า Φ (Residual Function) สามารถหาอนุพันธ์ได้

3. ใช้วิธีรุงเง-คุดตา แบบไม่ขัดแย้งแนวเดียว แบบ 5 ชั้น อันดับ 6 ในการคำนวณ
4. ในการคำนวณกำหนดให้ความกว้างของแต่ละช่วงมีขนาดเท่า ๆ กัน
5. ทำการทดสอบกับปัญหา ต่อไปนี้

$$\begin{aligned} g'' &= (gf' - fg')/0.1 \\ f''' &= (-ff''' - gg')/0.1 \end{aligned}$$

เมื่อ $g(0) = -1$, $g(1) = 1$ และ $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0$

6. ความคลาดเคลื่อนของผลเฉลย ได้จากการเปรียบเทียบผลเฉลยที่คำนวณโดยชุดโปรแกรม COLNEW

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. MIRK56org แทน การแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในแบบอันดับผสมโดยวิธีรุงเง-คุดตา แบบไม่ขัดแย้งแนวเดียว ที่ไม่ใช้การประมาณค่าเมทริกซ์จาโคเบียน
2. MIRK56apx แทน การแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในแบบอันดับผสมโดยวิธีรุงเง-คุดตา แบบไม่ขัดแย้งแนวเดียว ที่ใช้การประมาณค่าเมทริกซ์จาโคเบียน