

บทที่ 5

อภิปรายและสรุปผล

สรุปผลการวิจัย

1. เซตผลคูณภายในเป็นลบคือเซตที่มีค่าผลคูณภายในระหว่างสมาชิกสองสมาชิกใด ๆ มีค่าเป็นลบ นั่นคือเซตที่นิยามว่า ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟิลด์ของจำนวนจริง ถ้า S เป็นเซตของเวกเตอร์ใน V S เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ ถ้า $\langle x, y \rangle < 0$ ทุก ๆ $x, y \in S$ เมื่อ $x \neq y$ เซตผลคูณภายในเป็นลบมีสมบัติดังนี้คือ

1.1 ให้ $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ เป็นเซตย่อยในปริภูมิเวกเตอร์และเป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ ถ้า A เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น แล้วจะไม่มีเวกเตอร์ x_{m+1} ซึ่ง $\langle x_i, x_{m+1} \rangle < 0$ ทุก $i = 1, 2, \dots, m$

1.2 ให้ $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ เป็นสับเซตของปริภูมิเวกเตอร์ และเป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ ให้ $k_j, j = 1, 2, \dots, m$ เป็นจำนวนจริง และ $x_{m+1} = k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_mx_m$ ถ้า $\langle x_i, x_{m+1} \rangle < 0$ ทุก $i = 1, 2, \dots, m$ แล้ว $k_j < 0$ ทุก $j = 1, 2, \dots, m$

1.3 ให้ $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ เป็นสับเซตในปริภูมิเวกเตอร์ และเป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ ให้ $k_j, j = 1, 2, \dots, m$ เป็นจำนวนจริง ถ้า $\langle x_i, k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_mx_m \rangle > 0$ ทุก $i = 1, 2, \dots, m$ แล้ว $k_j > 0$ ทุก $j = 1, 2, \dots, m$

1.4 ให้ $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ เป็นสับเซตของปริภูมิเวกเตอร์ และเป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ ให้ $k_j, j = 1, 2, \dots, m$ เป็นจำนวนจริง ถ้า $\langle x_i, k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_mx_m \rangle \leq 0$ ทุก $i = 1, 2, \dots, m$ แล้ว $k_j \leq 0$ ทุก $j = 1, 2, \dots, m$

1.5 ถ้า S เป็นเซตที่มีเซตย่อยแท้เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบที่ไม่อิสระเชิงเส้นแล้ว S ไม่เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ

1.6 สับเซตแท้ของเซตผลคูณภายในเป็นลบเป็นอิสระเชิงเส้น

1.7 ในปริภูมิเวกเตอร์มิติ n เซตผลคูณภายในเป็นลบจะมีอย่างมาก $n+1$ เวกเตอร์

1.8 ให้ $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ เป็นเซตย่อยในปริภูมิเวกเตอร์และเป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ แล้ว A เป็นอิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อมีจำนวนลบ $k_i, i = 1, 2, \dots, m$ ซึ่ง $\langle x_i, k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_mx_m \rangle < 0$ ทุก $i = 1, 2, \dots, m$

1.9 ถ้า A เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบและเป็นอิสระเชิงเส้นแล้ว Cone A เป็นกรวยป้าน

วิธีสร้างเซตผลคูณภายในเป็นลบ 2 วิธีคือ

1. สร้างจากเซตผลคูณภายในเป็นลบที่มีอยู่แล้ว โดยใช้บทตั้ง 4.1.2 (a)

เริ่มจาก

1.1 มี $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบและเป็นอิสระเชิงเส้น

1.2 หากค่า k_i จากระบบสมการ $\langle a_i, k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m \rangle < 0$ ทุก $i = 1,$

$2, \dots, m$

1.3 ให้ $a_{m+1} = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m$ จะได้เซตใหม่คือ $\{a_1, a_2, \dots, a_{m+1}\}$

2. สร้างจากเซตเชิงตั้งฉากปกติ

ให้ $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติ $a_i \in \mathbb{R}^m$ โดยที่ $m \geq n$

2.1 หา $u_1, u_2, \dots, u_{n+1}$ จาก

$$u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, u_n = \begin{bmatrix} (1/2)^{(n-1)} \\ (1/2)^{(n-2)} \\ \vdots \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ และ } u_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่า $\{u_1, u_2, \dots, u_{n+1}\}$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ

2.2 หาเมทริกซ์ P จาก $P = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$ เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก

2.3 ให้ $v_i = Pu_i \quad i=1, 2, \dots, n+1$ จึงได้เซต $\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$

2. เงื่อนไขที่ทำให้ระบบสมการเชิงเส้น $Ax = 0$ มีคำตอบเป็นบวกคือ A เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ

3. เงื่อนไขที่ทำให้ระบบสมการเชิงเส้น $Ax = b$ มีคำตอบเป็นบวกคือ เมทริกซ์ $[A, -b]$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ

4. เงื่อนไขที่ทำให้ระบบสมการเชิงเส้น $Ax = b$ มีคำตอบไม่เป็นลบคือ A เป็นเอ็ม-เมทริกซ์ และ $b \geq 0$

ข้อเสนอแนะ

จากการวิจัย ผู้วิจัยพบข้อความที่เป็นจริง ซึ่งได้นำมาทำเป็นทฤษฎีบทในงานวิจัย
อย่างไรก็ตาม ผู้วิจัยพบข้อสังเกตที่น่าสนใจจึงได้จึงได้รวบรวมไว้เพื่อเป็นข้อเสนอแนะสำหรับ
งานวิจัยต่อไป

1. เซตผลคูณภายในเป็นลบ

1. การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวไม่สามารถคงสภาพ ความเป็นเซตผลคูณภายในไว้
ได้ (ถ้า A เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบและ B เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการดำเนินการเบื้องต้นแบบ
แถวกับ A แล้วจะได้ว่า B อาจไม่เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ)

2. ถ้า A และ B เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ แล้ว AB อาจไม่เป็นเซตผลคูณภายใน
เป็นลบ

3. ถ้า A และ B เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ แล้ว $A + B$ อาจไม่เป็นเซตผลคูณ
ภายในเป็นลบ

4. ถ้า A และ B เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ แล้ว $A - B$ อาจไม่เป็นเซตผลคูณภายใน
เป็นลบ

5. ถ้า A เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ แล้ว $A^k, k > 0$ อาจไม่เป็นเซตผลคูณภายใน
เป็นลบ

6. ถ้า A เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ แล้ว A^T อาจไม่เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ

2. คำตอบที่เป็นบวกของระบบสมการ

จากการวิจัยพบว่าเงื่อนไขต่อไปนี้ไม่สามารถยืนยันได้ว่าระบบสมการเชิงเส้น $Ax = b$
มีคำตอบที่เป็นบวก

1. เมื่อ $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ และ $\langle a_i, b \rangle > 0$ ทุก $i = 1, 2, \dots, n$

2. A และ b มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงบวกทุกตัว