บทที่ 4
ตัวอย่างการใช้ทฤษฎีและวิธีการที่นำเสนอ

ตัวอย่างของการสร้างเซตผลคูณภายในเป็นลบ

วิธีที่ 1 สร้างจากเซตผลคูณภายในเป็นลบ และเป็นอิสระเชิงเส้น

ตัวอย่างที่ 1

$S = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ และอิสระเชิงเส้น

ให้ $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

หา k_1 และ k_2 จากระบบอสมการ

$$\langle \mathbf{a}_1, k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 \rangle < 0$$

$$\langle \mathbf{a}_2, k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 \rangle < 0$$

$$k_1 \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \rangle + k_2 \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle < 0$$

$$k_1 \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 \rangle + k_2 \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 \rangle < 0$$

ซึ่งก็คือ

$$k_1(1) + k_2(-1) < 0$$

$$k_1(-1) + k_2(2) < 0$$

จากแก้ระบบอสมการได้คำตอบมาหนึ่งชุดคือ $k_1 = -1.5$ และ $k_2 = -1$

ดังนั้น

$$\mathbf{a}_3 = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2$$

$$= (-1.5)\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

หาค่าผลคูณภายในระหว่างสมาชิก ได้ดังนี้

$$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3 \rangle = -0.5$$

$$\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle = -0.5$$

ได้เซตผลคูณภายในเป็นลบ คือ

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ #

ตัวอย่างที่ 2

$S = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ และเป็นอิสระเชิงเส้น

ให้ $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

หาค่า k_1 , k_2 และ k_3 จากระบบอสมการ

$$\langle \mathbf{a}_1, k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + k_3\mathbf{a}_3 \rangle < 0$$
$$\langle \mathbf{a}_2, k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + k_3\mathbf{a}_3 \rangle < 0$$
$$\langle \mathbf{a}_3, k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + k_3\mathbf{a}_3 \rangle < 0$$

ซึ่งก็คือ

$$k_1 \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \rangle + k_2 \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle + k_3 \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle < 0$$
$$k_1 \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 \rangle + k_2 \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 \rangle + k_3 \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle < 0$$
$$k_1 \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 \rangle + k_2 \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2 \rangle + k_3 \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 \rangle < 0$$

$$k_1 (1) + k_2 (-1/2) + k_3 (-1) < 0$$
$$k_1 (-1/2) + k_2 (5/4) + k_3 (-1/2) < 0$$
$$k_1 (-1) + k_2 (-1/2) + k_3 (3) < 0$$

จากการแก้ระบบอสมการได้คำตอบมาหนึ่งชุดคือ $k_1 = -0.9$, $k_2 = -0.8$ และ $k_3 = -0.45$

$$\mathbf{a}_4 = (-0.9)\,\mathbf{a}_1 + (-0.8)\,\mathbf{a}_2 + (-0.45)\,\mathbf{a}_3$$
$$= \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.3 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

หาค่าผลคูณภายในระหว่างสมาชิก ได้ดังนี้

$$\langle \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_1 \rangle = -0.05$$
$$\langle \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_2 \rangle = -0.275$$
$$\langle \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_3 \rangle = -0.15$$

ได้เซตผลคูณภายในเป็นลบ คือ

$$\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1/2\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0.05\\0.3\\-0.5\end{bmatrix}\right\}$$ #

วิธีที่ 2 สร้างจากเซตเชิงตั้งฉากปรกติ

ตัวอย่างที่ 1 $m = 3\ \ n = 3$

$$S = \left\{\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{bmatrix}\right\}$$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ

ให้ $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}1/2\\-1\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}1/4\\1/2\\-1\end{bmatrix}$ และ $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$$P = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6}\\0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{P}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}-0.707\\-0.707\\0\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \mathbf{P}\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}-0.224\\0.931\\-0.577\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{P}\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}0.874\\-0.520\\-0.528\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_4 = \mathbf{P}\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix}0.876\\0.538\\1.394\end{bmatrix}$$

หาค่าผลคูณภายในระหว่างสมาชิก ได้ดังนี้

$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = -0.50$ $\qquad \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = -0.37$

$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = -0.25$ $\qquad \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4 \rangle = -0.50$

$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4 \rangle = -1$ $\qquad \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle = -0.25$

ได้เซตผลคูณภายในเป็นลบ คือ

$$\left\{\begin{bmatrix}-0.707\\-0.707\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-0.224\\0.931\\-0.577\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0.874\\-0.520\\-0.528\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0.876\\0.538\\1.394\end{bmatrix}\right\}$$ #

ตัวอย่างที่ 2 $m = 4,\ n = 3$

$$S = \left\{\begin{bmatrix}1/\sqrt{6}\\0\\1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\0\end{bmatrix}\right\}$$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ

ให้ $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}1/2\\-1\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}1/4\\1/2\\-1\end{bmatrix}$ และ $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$$P = \begin{bmatrix}1/\sqrt{6} & 1\sqrt{3} & 1/\sqrt{6}\\0 & 1\sqrt{3} & -2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6} & -1\sqrt{3} & -1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6} & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1 = P\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}-0.408\\0\\-0.408\\-0.816\end{bmatrix},\qquad \mathbf{v}_2 = P\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}-0.373\\-0.577\\0.781\\0.408\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = P\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}-0.018\\1.105\\0.222\\0.204\end{bmatrix},\qquad \mathbf{v}_4 = P\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix}1.394\\-0.239\\-0.577\\0.816\end{bmatrix}$$

หาค่าผลคูณภายในระหว่างสมาชิก ได้ดังนี้

$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = -0.5$ $\qquad$ $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = -0.375$

$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = -0.25$ $\qquad$ $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4 \rangle = -0.5$

$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4 \rangle = -1$ $\qquad$ $\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle = -0.25$

ได้เซตผลคูณภายในเป็นลบ คือ

$$\left\{\begin{bmatrix}-0.408\\0\\-0.408\\-0.816\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-0.373\\-0.577\\0.781\\0.408\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-0.018\\1.105\\0.222\\0.204\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1.394\\-0.239\\-0.577\\0.816\end{bmatrix}\right\}$$ #

จากนี้ไปจะเป็นตัวอย่างการใช้ทฤษฎีบทที่ทำให้ระบบสมการเชิงเส้น $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ และ $A\mathbf{x} = 0$ มีคำตอบที่เป็นบวกตามลำดับ

ตัวอย่างของการใช้ทฤษฎีบท

ตัวอย่างที่ 1 และ 2 เป็นตัวอย่างของทฤษฎีบท 3.2.1 ซึ่ง [A, **-b**] ต้องเป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ

ตัวอย่างที่ 1 ระบบสมการ

$$4x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 4$$
$$4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 4$$
$$4x_2 + 6x_3 = 12$$

เขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix}4 & 2 & -7\\4 & -6 & 5\\0 & 4 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1\\\mathbf{x}_2\\\mathbf{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\4\\12\end{bmatrix}$$

และ $\left\{\begin{bmatrix}4\\4\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-6\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-7\\5\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\-4\\-12\end{bmatrix}\right\}$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ

จากการแก้ระบบสมการได้คำตอบ $x_1 = 2$, $x_2 = 3/2$ และ $x_3 = 1$

นั่นคือคำตอบของระบบสมการเป็นบวก #

ตัวอย่างที่ 2 ระบบสมการ

$$-x_1 + x_2 = -0.5$$
$$-x_2 = -1$$

เขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

และ $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ

จากการแก้ระบบสมการได้คำตอบ $x_1 = 1.5$ และ $x_2 = 1$ #

ตัวอย่างที่ 3, 4 และ 5 เป็นตัวอย่างของทฤษฎีบท 3.2.2 ซึ่ง A ต้องเป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ

ตัวอย่างที่ 3 ระบบสมการ

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - 9x_3 - 9x_4 &= 0 \\ 6x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 &= 0 \\ 5x_2 + 5x_3 - 14x_4 &= 0 \end{aligned}$$

เขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & -9 & -9 \\ 6 & -10 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & -14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

และ $\left\{\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 \\ -5 \\ -14 \end{bmatrix}\right\}$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ

จากการแก้ระบบสมการได้คำตอบเขียนอยู่ในรูป

$x_1 = (2013/810)t$, $x_2 = (184/225)t$, $x_3 = (74/75)t$ และ $x_4 = t$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริง เมื่อให้ $t = 1$ จะได้คำตอบคือ

$x_1 = (2013/810)$, $x_2 = (184/225)$, $x_3 = (74/75)$ และ $x_4 = 1$ #

ตัวอย่างที่ 4 ระบบสมการ

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 0.5x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

เขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -0.5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

และ $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.5 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ

จากการแก้ระบบสมการได้คำตอบเขียนอยู่ในรูป

$x_1 = 1.5\,t,\ x_2 = t$ และ $x_3 = t$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริง

เมื่อให้ $t = 1$ จะได้คำตอบคือ

$x_1 = 1.5,\ x_2 = 1$ และ $x_3 = 1$ #

ตัวอย่างที่ 5 ระบบสมการ

$$\begin{aligned} -4x_1 + x_2 + 2x_3 - 20x_4 + 16x_5 &= 0 \\ 28x_1 + (11/2)x_2 + 11x_3 - 10x_4 - 12x_5 &= 0 \\ -4x_1 - 20x_2 + 16x_3 &= 0 \\ 28x_1 - 10x_2 - 12x_3 &= 0 \end{aligned}$$

เขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 & -20 & 16 \\ 28 & 11/2 & 11 & -10 & -12 \\ -4 & -20 & 16 & 0 & 0 \\ 28 & -10 & -12 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

และ $\left\{\begin{bmatrix} -4 \\ 28 \\ -4 \\ 28 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 11/2 \\ -20 \\ -10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \\ 16 \\ -12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -20 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 16 \\ -12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ

จากการแก้ระบบสมการได้คำตอบเขียนอยู่ในรูป

$x_1 = (18/5)t,\ x_2 = (2/5)t,\ x_3 = (3/5)t,\ x_4 = 0.8t$ และ $x_5 = t$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริง

เมื่อให้ $t = 1$ จะได้คำตอบคือ

$x_1 = (18/5),\ x_2 = (2/5),\ x_3 = (3/5),\ x_4 = 0.8$ และ $x_5 = 1$ #