บทที่ 3
ผลการวิจัย

ในบทนี้เป็นการนำเสนอผลการวิจัยทั้งหมดซึ่งประกอบด้วยสมบัติต่าง ๆ ของเซตผลคูณภายในเป็นลบ การสร้างเซตผลคูณภายในเป็นลบและเงื่อนไขต่าง ๆ ที่ใช้ในการพิจารณาคำตอบที่เป็นบวกของระบบสมการเชิงเส้น

สมบัติของเซตผลคูณภายในเป็นลบ

บทตั้ง 3.1.1 เป็นบทตั้งที่สำคัญที่สร้างขึ้นเพื่อช่วยในการพิสูจน์บทตั้งอื่น ๆ และนำไปสู่การพิสูจน์สมบัติของเซตผลคูณภายในเป็นลบและคำตอบที่เป็นบวกของระบบสมการเชิงเส้น

บทตั้ง 3.1.1 ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก และ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ในปริภูมิเวกเตอร์ ให้ $\mathbf{x}_{m+1} = k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \ldots + k_m\mathbf{x}_m \neq 0$ เมื่อ $k_i \geq 0$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, m$ $k_j \neq 0$ บาง j แล้วจะมี x_j บาง j ซึ่ง $\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{m+1} \rangle > 0$

พิสูจน์ สมมุติให้ $\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{m+1} \rangle \leq 0$ ทุก $j = 1, 2, \ldots, m$ พิจารณา

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}_{m+1}, \mathbf{x}_{m+1} \rangle &= \langle k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \ldots + k_m\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m+1} \rangle \\ &= k_1 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{m+1} \rangle + k_2 \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_{m+1} \rangle + \ldots + k_m \langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m+1} \rangle \\ &\leq 0\end{aligned}$$

ซึ่งขัดแย้ง เนื่องจาก $\langle \mathbf{x}_{m+1}, \mathbf{x}_{m+1} \rangle > 0$

ดังนั้นจะต้องมี x_j บาง j ซึ่ง $\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{m+1} \rangle > 0$ #

บทตั้ง 3.1.2 (a) เป็นบทตั้งที่ช่วยในการสร้างเซตผลคูณภายในเป็นลบวิธีที่ 1

บทตั้ง 3.1.2 (a) ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก และ $W = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ เป็นเซตย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ ถ้า W เป็นอิสระเชิงเส้น แล้วมีจำนวนจริงลบ k_j สำหรับ $j = 1, 2, \ldots, m$ ซึ่งทำให้ $\langle \mathbf{x}_i, k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \ldots + k_m \mathbf{x}_m \rangle < 0$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, m$

พิสูจน์ พิจารณาอสมการเชิงเส้น

$$\begin{gathered}\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle k_1 + \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle k_2 + \ldots + \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_m \rangle k_m < 0 \\ \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle k_1 + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle k_2 + \ldots + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_m \rangle k_m < 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_1 \rangle k_1 + \langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_2 \rangle k_2 + \ldots + \langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m \rangle k_m < 0\end{gathered}$$

จะแสดงว่าระบบอสมการเชิงเส้นมีคำตอบเป็นลบ

ให้ $B = [\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle]_{i,j=1}^{m}$ เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบ

และ $\mathbf{k} = [k_j]_{i=1}^{m}$ เห็นได้ว่า $B^T = B$

จาก $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ เป็นอิสระเชิงเส้น จะได้ว่า B เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

ดังนั้นระบบอสมการ $B\mathbf{k} < 0$ มีคำตอบ

ให้ $A^T = [B^T \mid I_m]$ เมื่อ I_m เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ m

และ $\mathbf{y}^T = [\mathbf{u}^T \mid \mathbf{v}^T]$ เมื่อ $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ เป็น m สดมภ์เวกเตอร์

$$A^T\mathbf{y} = B^T\mathbf{u} + \mathbf{v} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

พิจารณาสมการ $B^T\mathbf{u} + \mathbf{v} = 0$, $\mathbf{u} \geq 0$, $\mathbf{v} \geq 0$ สมมุติว่าระบบอสมการนี้ มีคำตอบ $\mathbf{u} \geq 0$ และ $\mathbf{v} \geq 0$

แล้ว $\mathbf{u}^TB\mathbf{u} + \mathbf{u}^T\mathbf{v} = 0$ เป็นไปไม่ได้เนื่องจาก $\mathbf{u}^TB\mathbf{u} > 0$ และ $\mathbf{u}^T\mathbf{v} \geq 0$

ดังนั้นระบบสมการ (1) ไม่มีคำตอบ

จาก ทฤษฎีบทกอร์แดน จะได้ว่า $\begin{bmatrix} B \\ I_m \end{bmatrix} \mathbf{x} < 0$ มีคำตอบ

ดังนั้น มี $\mathbf{k} < 0$ ซึ่ง $B\mathbf{k} < 0$ #

บทตั้ง 3.1.2 (b) ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก และ $W = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ เป็นเซตย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ ถ้า $\langle \mathbf{x}_i, k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \ldots + k_m\mathbf{x}_m \rangle < 0$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, m$ แล้วจะมี k_j บางตัวซึ่ง $k_j < 0$

พิสูจน์ ให้ $\mathbf{x}_{m+1} = k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \ldots + k_m\mathbf{x}_m$

จาก $\langle \mathbf{x}_i, k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \ldots + k_m\mathbf{x}_m \rangle < 0$

จะได้ว่า

$$\begin{array}{c}
\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle k_1 + \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle k_2 + \ldots + \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_m \rangle k_m = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{m+1} \rangle < 0 \\
\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle k_1 + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle k_2 + \ldots + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_m \rangle k_m = \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_{m+1} \rangle < 0 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_1 \rangle k_1 + \langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_2 \rangle k_2 + \ldots + \langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m \rangle k_m = \langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m+1} \rangle < 0
\end{array}$$

ให้ $B = [\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle]_{i,j=1}^{m}$ เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบ

และ $\mathbf{k} = [k_j]_{i=1}^{m}$,$C = [\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{m+1} \rangle]_{i=1}^{m}$

เขียนระบบอสมการให้อยู่ในรูปเมทริกซ์คือ $\mathbf{B}\mathbf{k} = \mathrm{C}$ ดังนั้น $\mathbf{k}^T \mathbf{B}\mathbf{k} = \mathbf{k}^T \mathrm{C}$

สมมุติให้ $k_i \geq 0$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, m$

จะเห็นได้ว่า $\mathbf{k}^T \mathbf{B}\mathbf{k} > 0$ และ $\mathbf{k}^T \mathrm{C} < 0$ ซึ่งขัดแย้ง

ดังนั้น มี k_j บางตัวซึ่ง $k_j < 0$ #

บทตั้ง 3.1.3 เป็นบทตั้งที่สร้างขึ้นมาเพื่อช่วยในการพิสูจน์คำตอบที่เป็นบวกของระบบสมการเชิงเส้น

บทตั้ง 3.1.3 ให้ $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ เป็นเซตย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ และเป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ ให้ k_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ เป็นจำนวนจริง และ $\mathbf{x}_{m+1} = k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \ldots + k_m\mathbf{x}_m$ ถ้า $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{m+1} \rangle < 0$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, m$ แล้ว $k_j < 0$ ทุก $j = 1, 2, \ldots, m$

พิสูจน์ สมมุติว่า $k_j \geq 0$ สำหรับ $j = 1, 2, \ldots, p$ และ $k_j < 0$ สำหรับ $j = p+1, p+2, \ldots, m$ พิจารณา

$$\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{m+1} \rangle = k_1\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_1 \rangle + k_2\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_2 \rangle + \ldots + k_p\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_p \rangle + k_{p+1}\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{p+1} \rangle + \ldots k_m\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_m \rangle$$
$$< 0$$

$$k_1\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_1 \rangle + k_2\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_2 \rangle + \ldots + k_p\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_p \rangle < 0 - k_{p+1}\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{p+1} \rangle + \ldots + k_m\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_m \rangle$$

เนื่องจาก $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle < 0$ สำหรับ ทุก $i \neq j$ และ $k_j < 0$ สำหรับ $j = p+1, p+2, \ldots, m$

ดังนั้น $k_{p+1}\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{p+1} \rangle + \ldots + k_m\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_m \rangle > 0$

จึงได้ว่า $k_1\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_1 \rangle + k_2\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_2 \rangle + \ldots + k_p\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_p \rangle < 0$

จาก $k_j \geq 0$ สำหรับ $j = 1, 2, \ldots, p$ โดยบทตั้ง 3.1.1 จะได้ว่า $\langle \mathbf{x}_j, k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \ldots + k_p\mathbf{x}_p \rangle > 0$ บาง $j = 1, 2, \ldots, p$ ซึ่งขัดแย้ง ดังนั้น $k_j < 0$ ทุก $j = 1, 2, \ldots, m$ #

บทแทรก 3.1.1 ให้ $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ เป็นเซตย่อยในปริภูมิเวกเตอร์ และเป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ ให้ k_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ เป็นจำนวนจริง ถ้า $\langle \mathbf{x}_i, k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \ldots + k_m\mathbf{x}_m \rangle > 0$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, m$ แล้ว $k_j > 0$ ทุก $j = 1, 2, \ldots, m$

บทตั้ง 3.1.4 ให้ $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ เป็นเซตย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ และเป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ ให้ k_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ เป็นจำนวนจริง ถ้า $\langle \mathbf{x}_i, k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \ldots + k_m\mathbf{x}_m \rangle \leq 0$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, m$ แล้ว $k_j \leq 0$ ทุก $j = 1, 2, \ldots, m$

พิสูจน์ สมมุติว่า $k_j > 0$ สำหรับ $j = 1, 2, \ldots, p$ และ $k_j \leq 0$ สำหรับ $j = p+1, p+2, \ldots, m$ พิจารณา

$\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{m+1} \rangle = k_1\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_1 \rangle + k_2\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_2 \rangle + \ldots + k_p\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_p \rangle + k_{p+1}\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{p+1} \rangle + \ldots k_m\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_m \rangle$

≤ 0

$k_1\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_1 \rangle + k_2 \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_2 \rangle + \ldots + k_p\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_p \rangle \leq 0 - k_{p+1}\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{p+1} \rangle + \ldots + k_m\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_m \rangle$

เนื่องจาก $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle < 0$ สำหรับ ทุก $i \neq j$ และ $k_j \leq 0$ สำหรับ $j = p+1, p+2, \ldots, m$

ดังนั้น $k_{p+1}\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{p+1} \rangle + \ldots + k_m\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_m \rangle \geq 0$

จึงได้ว่า $k_1\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_1 \rangle + k_2 \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_2 \rangle + \ldots + k_p\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_p \rangle \leq 0$

จาก $k_j \geq 0$ สำหรับ $j = 1, 2, \ldots, p$ โดยบทตั้ง 3.1.1 จะได้ว่า $\langle \mathbf{x}_j, k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \ldots + k_p\mathbf{x}_p \rangle > 0$ บาง $j = 1, 2, \ldots, p$ ซึ่งขัดแย้ง

ดังนั้น $k_j \leq 0$ ทุก $j = 1,2, \ldots, m$ #

เซตผลคูณภายในเป็นลบอาจจะเป็นอิสระเชิงเส้นหรือ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นก็ได้ แต่ถ้าไม่เป็นอิสระเชิงเส้นก็ไม่สามารถเพิ่มเวกเตอร์อีกหนึ่งเวกเตอร์ ซึ่งทำให้คงความเป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบไว้ได้ดังทฤษฎีบท 3.1.1

ทฤษฎีบท 3.1.1 ให้ $A = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ เป็นเซตย่อยในปริภูมิเวกเตอร์และเป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ ถ้า A ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น แล้วจะไม่มีเวกเตอร์ $\mathbf{x}_{m+1}$ ซึ่ง $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{m+1} \rangle < 0$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, m$

พิสูจน์ เนื่องจาก A ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น จะมีจำนวนจริง α_i, $i = 1, 2, \ldots, m-1$ ไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด ซึ่ง $\mathbf{x}_m = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_{m-1}\mathbf{x}_{m-1}$

เนื่องจาก $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_m \rangle = \langle \mathbf{x}_i, \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_{m-1}\mathbf{x}_{m-1} \rangle < 0$

ทุก $i = 1, 2, \ldots, m-1$ ดังนั้น จากบทตั้ง 3.1.3 $\alpha_i < 0$ ทุก $i = 1,2, \ldots, m-1$

สมมุติว่า $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{m+1} \rangle < 0$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, m-1$

พิจารณา

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m+1} \rangle &= \langle \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_{m-1}\mathbf{x}_{m-1}, \mathbf{x}_{m+1} \rangle \\ &= \alpha_1 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{m+1} \rangle + \alpha_2 \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_{m+1} \rangle + \ldots + \alpha_{m-1} \langle \mathbf{x}_{m-1}, \mathbf{x}_{m+1} \rangle \\ &> 0\end{aligned}$$

ดังนั้นไม่มีเวกเตอร์ $\mathbf{x}_{m+1}$ ซึ่ง $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{m+1} \rangle < 0$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, m$ #

จากทฤษฎีบท 3.1.1 ทำให้เรามีสมบัติของเซตผลคูณภายในเป็นลบเพิ่มขึ้นอีก ดังบทแทรก 3.1.2 , บทแทรก 3.1.3, บทแทรก 3.1.4 และบทแทรก 3.1.5

บทแทรก 3.1.2 ถ้า S เป็นเซตที่มีเซตย่อยแท้ที่ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นแล้ว S ไม่เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ

พิสูจน์

กรณีที่ 1) เซตย่อยแท้ไม่เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ เห็นได้ชัดว่า S ไม่เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ

กรณีที่ 2) เซตย่อยแท้เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ ให้ S เป็นเซตที่มีเซตย่อยแท้เป็น S_1 ซึ่ง S_1 เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบและ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

ดังนั้น จากทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้ว่า จะไม่มีเวกเตอร์อื่นซึ่งไม่เป็นสมาชิกของ S_1 ซึ่งมีค่าผลคูณภายในเป็นลบกับสมาชิกของ S_1 จึงได้ว่าไม่มีสมาชิกของ S ซึ่งมีค่าผลคูณภายในเป็นลบกับสมาชิกของ S_1 (ซึ่งเป็นสมาชิกของ S ด้วย) ดังนั้น S ไม่เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ #

บทแทรก 3.1.3 เซตย่อยแท้ของเซตผลคูณภายในเป็นลบเป็นอิสระเชิงเส้น

พิสูจน์ จากบทแทรก 3.1.2 จะได้ข้อความที่สมมูลกันคือ ถ้า S เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบแล้ว S ไม่มีเซตย่อยแท้ที่ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น นั่นคือเซตย่อยแท้ของ S เป็นเซตอิสระเชิงเส้นทั้งหมด ดังนั้นเซตย่อยแท้ของเซตผลคูณภายในเป็นลบเป็นอิสระเชิงเส้น #

บทแทรก 3.1.4 ในปริภูมิเวกเตอร์มิติ n เซตผลคูณภายในเป็นลบจะมีอย่างมาก n+1 เวกเตอร์

พิสูจน์ ให้ S เป็นเซตย่อยในปริภูมิเวกเตอร์ มิติ n และ S มีสมาชิก n+2 เวกเตอร์ ดังนั้น S มีเซตย่อยแท้ที่มีสมาชิก n+1 เวกเตอร์ ซึ่งเซตที่มี n+1 เวกเตอร์ในปริภูมิมิติ n จะไม่เป็นอิสระเชิงเส้น จึงได้ว่า S มีเซตย่อยแท้ที่ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น ดังนั้นจากบทแทรก 3.1.2 จะได้ว่า S ไม่เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ ดังนั้น ในปริภูมิเวกเตอร์มิติ n เซตผลคูณภายในเป็นลบจะมีอย่างมาก n+1 เวกเตอร์ #

บทแทรก 3.1.5 ให้ $A = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ เป็นเซตย่อยในปริภูมิเวกเตอร์และเป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ แล้ว A เป็นอิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อมีจำนวนลบ k_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ ซึ่ง

$$\langle \mathbf{x}_i, k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \ldots + k_m\mathbf{x}_m \rangle < 0$$

ทุก $i = 1, 2, \ldots, m$

พิสูจน์ ให้ $A = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ

<u>ตอน 1</u> จาก บทตั้ง 3.1.2 (a)

<u>ตอน 2</u> กำหนดให้ มีจำนวนลบ k_j, $j = 1, 2, \ldots, m$

ซึ่ง $\langle \mathbf{x}_i, k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \ldots + k_m\mathbf{x}_m \rangle < 0$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, m$

จึงได้ว่ามี $\mathbf{x}_{m+1} = k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \ldots + k_m\mathbf{x}_m$ ซึ่ง $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{m+1} \rangle < 0$

ดังนั้นจากทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้ว่า A เป็นอิสระเชิงเส้น #

ถ้าเซตหรือเมทริกซ์ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบก็จะมีสมบัติดังที่กล่าวมาแล้ว แต่ถ้าเพิ่มความเป็นอิสระเชิงเส้นเข้าไปอีกก็จะทำให้เซตหรือเมทริกซ์มีสมบัติต่าง ๆ เพิ่มขึ้น ดังทฤษฎีบท 3.1.2 และ 3.1.3

ทฤษฎีบท 3.1.2 ให้ $A = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad . \ . \ . \quad \mathbf{a}_n]$ $\mathbf{a}_i \in R^n$ และ $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบและเป็นอิสระเชิงเส้นแล้ว Cone A เป็นกรวยป้าน

พิสูจน์ ให้ $\mathbf{y} \in (\text{Cone A})^* \cap \text{Lin A}$

เมื่อ $(\text{Cone A})^* = \{\mathbf{s} \in R^n : \langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle \le 0 \ \ \forall \mathbf{x} \in \text{Cone A}\}$

จาก $\mathbf{y} \in$ Lin A จะได้ว่า $\mathbf{y} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{a}_n \quad \alpha_i \in R$

จาก $\mathbf{y} \in (\text{Cone A})^*$ ดังนั้น $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \le 0 \ \ \forall \mathbf{x} \in \text{Cone A}$

ดังนั้น $\langle \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{a}_n, \mathbf{x} \rangle \le 0 \ \ \forall \mathbf{x} \in \text{Cone A}$

เมื่อ $\mathbf{a}_i \in A$ แล้วจะได้ว่า $\mathbf{a}_i \in$ Cone A

ดังนั้น $\langle \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_i \rangle \le 0 \ \ \forall \mathbf{a}_i \in A$

เนื่องจาก $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ และ $\langle \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_i \rangle \le 0$ $\forall \mathbf{a}_i \in A$ จึงได้ว่า $\alpha_i \le 0 \ \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$

ดังนั้น $\mathbf{y} \in -(\text{Cone A})$ ดังนั้น $(\text{Cone A})^* \cap \text{Lin A} \subset -\text{Cone A}$

จาก ทฤษฎีบท 2.5.3 จะได้ว่า Cone A เป็นกรวยป้าน #

ทฤษฎีบท 3.1.3 ให้ $A = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad . \ . \ . \quad \mathbf{a}_n]$ $\mathbf{a}_i \in R^n$ A เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบและเป็นอิสระเชิงเส้น แล้ว

1. Cone $(A^+)^T$ เป็นกรวยแหลม
2. $(\text{Cone A})^* \cap \text{Lin A} \subset -\text{Cone A}$
3. $(A^TA)^{-1} \ge 0$
4. A^TA เป็นเมทริกซ์ทางเดียว

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 3.1.2 จะได้ว่า Cone A เป็นกรวยป้าน และจากทฤษฎีบท 2.5.3 ก็จะได้ ข้อ 1 – 4 ตามลำดับ

เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ซึ่งเขียนอยู่ในรูปของเมทริกซ์ย่อย ถ้า A เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบแล้วก็จะสามารถสรุปสมบัติของเมทริกซ์ย่อยของ A ได้ดังทฤษฎีบท 3.1.4, 3.1.5 และ 3.1.6

ทฤษฎีบท 3.1.4 ให้ $A = [A_1, \mathbf{a}]$ เมื่อ A เป็น nxm เมทริกซ์ , A_1 เป็น $n \times m_1$ เมทริกซ์ , $\mathbf{a} \in R^n$ และ $m = m_1 + 1$ ถ้า A เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบแล้ว $A_1^T\mathbf{a} < 0$

พิสูจน์ ให้ $A = [A_1, \mathbf{a}]$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & . & . & . & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \; \mathbf{a}_i \in R^n, \mathbf{a} \in R^n$$

$$A_1^T = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m_1}^T \end{bmatrix}$$

$$A_1^T\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T\mathbf{a} \\ \mathbf{a}_2^T\mathbf{a} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m_1}^T\mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a} \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{a}_{m_1}, \mathbf{a} \rangle \end{bmatrix} < 0$$ #

ทฤษฎีบท 3.1.5 ให้ $A = [A_1, \mathbf{a}]$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ และเป็นอิสระเชิงเส้น แล้วจะได้ว่า $(A_1^TA_1)^{-1} \geq 0$

พิสูจน์ จากที่กำหนดให้จะเห็นได้ว่า A_1 เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ และเป็นอิสระเชิงเส้น จากทฤษฎีบท 3.1.2 จะเห็นได้ว่า Cone A_1 เป็นกรวยป้าน และจากทฤษฎีบท 3.1.3 จะได้ว่า $(A_1^TA_1)^{-1} \geq 0$ #

ทฤษฎีบท 3.1.6 ให้ $A = [A_1, A_2]$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ และเป็นอิสระเชิงเส้น แล้ว $A_1^+A_2 \leq 0$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 3.1.5 จะได้ว่า $(A_1^TA_1)^{-1} \geq 0$, $A_1^+A_2 = (A_1^TA_1)^{-1}A_1^TA_2$ จะแสดงว่า $A_1^TA_2 < 0$ ให้

$$A_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & . & . & . & \mathbf{a}_{m_1} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & . & . & . & \mathbf{b}_{m_1} \end{bmatrix} \quad m_1 + m_2 = m, \; \mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in R^n$$

$$A_1^TA_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m_1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{m_2} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1^T\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^T\mathbf{b}_{m_2} \\ \mathbf{a}_2^T\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2^T\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^T\mathbf{b}_{m_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_{m_1}^T\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_{m_1}^T\mathbf{b}_2 & & \mathbf{a}_{m_1}^T\mathbf{b}_{m_2} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \langle \mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1\rangle & \langle \mathbf{a}_1,\mathbf{b}_2\rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_1,\mathbf{b}_{m_2}\rangle \\ \langle \mathbf{a}_2,\mathbf{b}_1\rangle & \langle \mathbf{a}_2,\mathbf{b}_2\rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_2,\mathbf{b}_{m_2}\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{a}_{m_1},\mathbf{b}_1\rangle & \langle \mathbf{a}_{m_1},\mathbf{b}_2\rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_{m_1},\mathbf{b}_{m_2}\rangle \end{bmatrix} < 0$$

ดังนั้น $A_1^+A_2 \le 0$ #

ความเป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบเป็นเงื่อนไขที่สำคัญมากซึ่งจะทำให้ระบบสมการเชิงเส้น $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ และ $A\mathbf{x}=0$ มีคำตอบที่เป็นบวก ซึ่งแสดงไว้ในทฤษฎีบท 3.2.1 และ 3.2.2 ตามลำดับ

เงื่อนไขในการพิจารณาคำตอบที่เป็นบวกของระบบสมการเชิงเส้น

ความเป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบเป็นเงื่อนไขที่สำคัญมากซึ่งจะทำให้ระบบสมการเชิงเส้น $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ และ $A\mathbf{x}=0$ มีคำตอบที่เป็นบวก ซึ่งแสดงไว้ในทฤษฎีบท 3.2.1 และ 3.2.2 ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 3.2.1 ให้ A เป็น mxn เมทริกซ์ , $\mathbf{b} \in R^m$ ถ้าเมทริกซ์ $[A, -\mathbf{b}]$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ แล้วระบบสมการเชิงเส้น $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ มีคำตอบเป็นบวก

พิสูจน์ ให้ $A = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad . \; . \; . \quad \mathbf{a}_n]$ $\mathbf{a}_{n+1} = -\mathbf{b}$
$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}\}$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ ดังนั้น $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ จาก $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ จะได้ $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = -\mathbf{a}_{n+1}$
และจะได้ว่า $\langle \mathbf{a}_i, -\mathbf{a}_{n+1}\rangle = -\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{n+1}\rangle > 0$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, n$
จาก บทแทรก 3.1.1 จะได้ว่า $x_i > 0$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, n$
ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ มีคำตอบเป็นบวก #

ทฤษฎีบท 3.2.2 ให้ A เป็น mxn เมทริกซ์ $m < n$ ถ้า A เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ แล้วระบบสมการเชิงเส้น $A\mathbf{x} = 0$ มีคำตอบเป็นบวก

พิสูจน์ ให้ $A = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad . \; . \; . \quad \mathbf{a}_n]$ และ $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ ดังนั้น $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}\}$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบจาก $A\mathbf{x} = 0$ จะได้
$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = 0$ ให้ $x_n = 1$ ดังนั้น $-\mathbf{a}_n = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_{n-1}\mathbf{a}_{n-1}$

และ $\langle \mathbf{a}_i, -\mathbf{a}_n \rangle = -\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_n \rangle > 0$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, n-1$
ดังนั้นจาก บทแทรก 3.1.1 จะได้ $x_i > 0$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, n-1$
นั่นคือ ระบบสมการเชิงเส้น $A\mathbf{x} = 0$ มีคำตอบเป็นบวก #

จากระบบสมการเชิงเส้น $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ถ้า $A^{-1} \geq 0$ และ $\mathbf{b} \geq 0$ ก็จะทำให้ระบบสมการมีคำตอบที่ไม่เป็นลบ ซึ่งมีเงื่อนไขหลายเงื่อนไขที่ทำให้ $A^{-1} \geq 0$ ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นการแสดงเงื่อนไขต่าง ๆ ซึ่งรวบรวมมาจากงานวิจัย ที่ทำให้ $A^{-1} \geq 0$ และ ทำให้ระบบสมการ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ มีคำตอบไม่เป็นลบในที่สุด

ทฤษฎีบท 3.2.3 ให้ เมทริกซ์ $A \in \hat{A}$ และ $\mathbf{b} \geq 0$ เป็นเวกเตอร์สดมภ์ ถ้า

1. A^{-1} มี และ $A^{-1} \geq 0$ หรือ
2. $A = \lambda_0 I - B$ สำหรับบางเมทริกซ์ B ที่ไม่เป็นลบ และ $\lambda_0 > \rho$ เมื่อ ρ เป็นค่าลักษณะเฉพาะที่มากที่สุดของ B หรือ
3. ค่าลักษณะเฉพาะที่เป็นจำนวนจริง ของ A เป็นบวก หรือ
4. ทุกไมเนอร์มุขสำคัญของ A เป็นบวก หรือ
5. ทุกไมเนอร์มุขสำคัญนำของ A เป็นบวก หรือ
6. มีเวกเตอร์ $\mathbf{x} > 0$ ซึ่ง $A\mathbf{x} > 0$ หรือ
7. ถ้า $B \in \hat{A}$ และ $B \geq A$ แล้ว B^{-1} มี หรือ
8. มีเมทริกซ์ทแยงมุม $D \in \hat{A}$ ซึ่ง $ADe > 0$ เมื่อ e เป็นเวกเตอร์ ซึ่งทุกส่วนประกอบเป็น 1 หรือ
9. มีเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง T_o และเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน T_1 ซึ่ง $T_0, T_1 \in \hat{A}$ ทุก ไมเนอร์มุขสำคัญนำ ของ T_o และ T_1 เป็นบวก และ $A = T_0 \times T_1$ หรือ
10. A เป็นเมทริกซ์เชิงสามเหลี่ยมด้านบน หรือ
11. A เป็นเมทริกซ์เชิงสามเหลี่ยมด้านล่าง หรือ
12. $A = \begin{bmatrix} B & E \\ 0 & D \end{bmatrix}$ เมื่อ B, D เป็น เอ็ม-เมทริกซ์ หรือ
13. $A = \begin{bmatrix} 1 & v^T \\ u & B \end{bmatrix}$ เมื่อ B เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน $\mathbf{u}, \mathbf{v} \leq 0$ เป็นเวกเตอร์สดมภ์ ซึ่ง $\mathbf{v}^T B^{-1} \mathbf{u} < 1$ และ $(B - \mathbf{u}\mathbf{v}^T)$ เป็น เอ็ม-เมทริกซ์ หรือ
14. A เป็นเมทริกซ์ถูกข่มโดยแนวทแยงมุม หรือ
15. A ลดทอนไม่ได้ และ $a_{ii} \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$, $i = 1, 2, \ldots, n$ โดยที่ $a_{ii} = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$ สำหรับ บาง i แล้วระบบสมการ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ มีคำตอบที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ เนื่องจากว่าจากทฤษฎีบท 2.4.4 , ทฤษฎีบท 2.5.1, บทแทรกของทฤษฎีบท 2.5.1 และทฤษฎีบท 2.5.2 จะได้ว่าเงื่อนไขข้อ 1 – 15 (เงื่อนไขใดเงื่อนไขหนึ่ง) ทำให้ A เป็นเอ็ม-เมทริกซ์ ซึ่งมี $A^{-1} \geq 0$ และจาก $\mathbf{b} \geq 0$

ดังนั้น $x = A^{-1}\mathbf{b} \geq 0$ จึงทำให้ระบบสมการ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ มีคำตอบที่ไม่เป็นลบ #

ที่กล่าวมาแล้วเป็นการแสดงถึงสมบัติต่าง ๆ ของเซตผลคูณภายในเป็นลบต่อไปจะเป็นการแสดงวิธีการสร้างเซตผลคูณภายในเป็นลบซึ่งมีอยู่ทั้งหมด 2 วิธี

การสร้างเซตผลคูณภายในเป็นลบ

วิธีที่ 1 สร้างจากเซตผลคูณภายในเป็นลบที่มีอยู่แล้ว โดยใช้บทตั้ง 3.1.2(b) เริ่มจาก

1. มี $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบและเป็นอิสระเชิงเส้น
2. หาค่า k_j จากระบบอสมการ $\langle \mathbf{a}_i, k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \ldots + k_m\mathbf{a}_m \rangle < 0$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, m$
3. ให้ $\mathbf{a}_{m+1} = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \ldots + k_m\mathbf{a}_m$ จะได้เซตใหม่คือ $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{m+1}\}$

ทฤษฎีบทต่อไปเป็นการยืนยันว่าเซตที่เราสร้างได้จากวิธีที่ 1 เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ

ทฤษฎีบท 3.3.1 เซตที่ได้จากวิธีที่ 1 เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ

พิสูจน์ จาก $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบและ เป็นอิสระเชิงเส้น ดังนั้นจากบทตั้ง 3.1.2(b) จะได้ว่ามี $k_i < 0$ ซึ่งทำให้ $\langle \mathbf{a}_i, k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \ldots + k_m\mathbf{a}_m \rangle < 0$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, m$ ให้ $\mathbf{a}_{m+1} = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \ldots + k_m\mathbf{a}_m$
จึงได้ว่า $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{m+1} \rangle < 0$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, m$
จาก $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ จะได้ว่า $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle < 0$
ทุก $i \neq j$ $i, j = 1, 2, \ldots, m$ ดังนั้น $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle < 0$ ทุก $i \neq j$ $i, j = 1, 2, \ldots, m+1$
จึงได้ว่า $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{m+1}\}$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ #

วิธีที่ 2 สร้างจากเซตเชิงตั้งฉากปรกติ

1. มี $S = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ $\mathbf{a}_i \in R^m$ โดยที่ $m \geq n$
2. หา $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n+1}$ จาก

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} (1/2)^{(n-1)} \\ (1/2)^{(n-2)} \\ \vdots \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ และ } \mathbf{u}_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่า $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_{n+1}\}$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ

3. หาเมทริกซ์ P จาก $P = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad . \; . \; . \quad \mathbf{a}_n]$ เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก

4. ให้ $\mathbf{v}_i = P\mathbf{u}_i \quad i=1, 2, \ldots, n+1$ จึงได้เซต $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_{n+1}\}$

ในทำนองเดียวกับวิธีที่ 1 คือทฤษฎีบทต่อไปเป็นการยืนยันว่าเซตที่เราสร้างได้จากวิธีที่ 2 เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ

ทฤษฎีบท 3.3.2 เซตที่ได้จากวิธีที่ 2 เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ

พิสูจน์ จากวิธีที่ 2 จะเห็นได้ว่า $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_{n+1}\}$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ ดังนั้น $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle < 0$, $i \neq j$ จาก $\mathbf{v}_i = P\mathbf{u}_i$, $i=1, 2, \ldots, n+1$ เมื่อ P เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle &= \langle P\mathbf{u}_i, P\mathbf{u}_j \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle \\ &< 0 \;, i \neq j \end{aligned}$$

ดังนั้น $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_{n+1}\}$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ #

การสร้างเซตผลคูณภายในเป็นลบมีอยู่ด้วยกัน 2 วิธี ดังที่ได้นำเสนอไปแล้ว ซึ่งแต่ละวิธีก็มีความแตกต่างกันขึ้นอยู่กับความสะดวกและเหมาะสมของผู้ใช้