

บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในปริภูมิเวกเตอร์ V บนฟิลด์ของจำนวนจริง เราทราบว่าเซตเชิงตั้งฉาก (Orthogonal Set) เป็นเซตที่ใช้ค่าของผลคูณภายในเป็นตัวกำหนดสมาชิกของเซต นั่นคือ ค่าของผลคูณภายในระหว่างสองสมาชิกใด ๆ เป็นศูนย์ ความเป็นเซตเชิงตั้งฉากนี้สามารถบอกสมบัติต่าง ๆ มากมาย ตัวอย่างเช่น

1. ถ้า S เป็นเซตจำกัดเชิงตั้งฉากที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ จะได้ว่า S เป็นอิสระเชิงเส้น

2. ถ้า Q เป็นเมทริกซ์ ที่มีเซตของสดมภ์เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติ (Orthogonal Matrix) จะได้เมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ Q คือตัวผกผันของ Q

3. ถ้า Q เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากแล้ว การคูณด้วย Q คงสภาพความยาว นั่นคือ $\|Qx\| = \|x\|$ ทุกเวกเตอร์ x และ คงสภาพผลคูณภายใน นั่นคือ $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าถ้าเราทราบว่าเซตนี้เป็นเซตเชิงตั้งฉากเราก็จะใช้ประโยชน์จากสมบัติได้มากมาย ถ้าเราต้องการใช้เซตที่มีสมบัติดังกล่าวเราก็สามารถสร้างเซตเชิงตั้งฉากขึ้นมาได้โดยกระบวนการกราม-ชมิทต์ (Gram-Schmidt Process)

โดยความคิดทำนองเดียวกับที่กล่าวมาผู้วิจัยจึงประสงค์ที่จะศึกษาสมบัติของเซตที่ใช้ค่าของผลคูณภายในเป็นตัวกำหนดสมาชิกของเซต คือค่าของผลคูณภายในระหว่างสองสมาชิกใด ๆ เป็นลบ ซึ่งผู้วิจัยให้ชื่อว่าเซตผลคูณภายในเป็นลบ (Negative Inner Product Set) โดยให้นิยามดังนี้

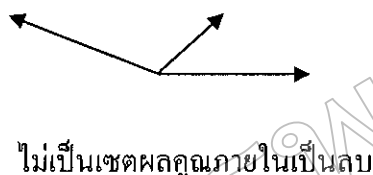
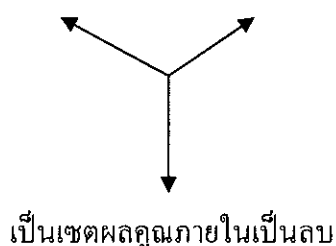
ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟิลด์ของจำนวนจริง และ S เป็นเซตของเวกเตอร์ใน V S เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ ถ้า $\langle x, y \rangle < 0$ ทุก ๆ $x, y \in S$ เมื่อ $x \neq y$

ตัวอย่างของเซตผลคูณภายในเป็นลบ

1. $\{a, -a\}$ เมื่อ a ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์

2. $\{u, v, w\}$ เมื่อ $u = a, v = -a + \frac{-\langle a, b \rangle}{\|a\|^2} b$ และ $w = -\frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|}$

เมื่อ a และ b เป็นเวกเตอร์อิสระเชิงเส้น



จากการทดลองทราบว่าเซตผลคูณภายในเป็นลบมีสมบัติที่น่าสนใจ เช่น ถ้า $\{x_1, x_2, x_3\}$ เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบใน R^2 จะมีจำนวนจริงบวก $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ซึ่งทำให้

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

จากสมบัตินี้ ทำให้คาดว่า ระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ $Ax = 0$ จะมีคำตอบเป็นจำนวนบวก ถ้าเซตของสครัมภ์ของ A เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ

เมื่อเราทราบสมบัติของเซตผลคูณภายในเป็นลบแล้ว เมื่อเราต้องการเซตที่มีสมบัติดังกล่าวเราก็สามารถสร้างเซตผลคูณภายในเป็นลบนี้ขึ้นมาใช้ได้ ซึ่งในงานวิจัยนี้จะครอบคลุมไปถึงการคิดหากระบวนการสร้างเซตผลคูณภายในเป็นลบด้วย และจะสามารถบอกได้ว่าระบบสมการเชิงเส้นมีคำตอบเป็นบวก โดยพิจารณาจากสมบัติของเซตของสครัมภ์ของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาสมบัติและหากระบวนการสร้างเซตผลคูณภายในเป็นลบ
2. เพื่อหาข้อสรุปเกี่ยวกับคำตอบที่เป็นบวกของระบบสมการเชิงเส้น $Ax = b$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ ที่มีเซตของสครัมภ์เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับการวิจัย

1. สามารถสร้างเซตผลคูณภายในเป็นลบมาใช้ได้ เมื่อต้องการเซตที่มีสมบัติดังเช่นเซตผลคูณภายในเป็นลบ
2. สามารถหาข้อสรุปเกี่ยวกับคำตอบที่เป็นบวกของระบบสมการเชิงเส้น $Ax = b$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ ที่มีเซตของสครัมภ์เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ

ขอบเขตของการวิจัย

ในงานวิจัยจะกล่าวถึงสมบัติของเซตผลคูณภายในเป็นลบ วิธีการสร้างเซตผลคูณภายในเป็นลบ และหาข้อสรุปเกี่ยวกับคำตอบที่เป็นบวกของระบบสมการเชิงเส้น $Ax = b$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ ที่มีเซตของสคอล์เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ

มหาวิทยาลัยบูรพา
Burapha University