บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้เป็นการรวบรวมทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่ใช้ในการทำวิจัย มีทั้งทฤษฎีบทที่เป็นความรู้พื้นฐานซึ่งจะไม่แสดงการพิสูจน์ในที่นี้ (การพิสูจน์มีอยู่ในตำราพีชคณิตเชิงเส้นทั่วไป) และเป็นทฤษฎีบทที่มาจากงานวิจัย

เซตและเวกเตอร์

นิยาม 2.1.1 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ (Vector Space) บนฟีลด์ (Field) F และ $S \subseteq V$ ซึ่ง $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ เราเรียกเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ ใน V ว่าเป็นผลรวมเชิงเส้น (Linear Combination) ของเวกเตอร์ใน S ก็ต่อเมื่อ มีสเกลาร์ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ใน F ที่ทำให้

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n$$

นิยาม 2.1.2 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ F ที่มี θ เป็นเวกเตอร์ศูนย์ (Zero Vector) , $S \subseteq V$ ซึ่ง $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ และ $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{v}_j$ เมื่อ $i \neq j$ S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น (Linear Dependent) ก็ต่อเมื่อ มีสเกลาร์ α_j บางตัว ใน F ซึ่ง $\alpha_j \neq 0$ ทำให้

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

และ S เป็นอิสระเชิงเส้น (Linear Independent) ก็ต่อเมื่อ

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \text{ จะได้ว่า } \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

ทฤษฎีบท 2.1.1 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ F , $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subseteq V$, S ไม่อิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ มี $\mathbf{v}_j$ บาง j ซึ่งมีสเกลลาร์ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j-1}$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันซึ่ง

$$\mathbf{v}_j = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_{j-1}\mathbf{v}_{j-1}$$

(Anton & Rorres, 1994)

ทฤษฎีบท 2.1.2 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ F, $S \subseteq V$ ถ้า S เป็นเซตที่มีเวกเตอร์ศูนย์แล้ว S ไม่อิสระเชิงเส้น (Anton & Rorres, 1994)

ทฤษฎีบท 2.1.3 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ F, S_1 และ S_2 ต่างเป็นสับเซตที่มีจำนวนสมาชิกจำกัด ถ้า $S_1 \subseteq S_2$ จะได้ว่า

1. ถ้า S_1 ไม่อิสระเชิงเส้นแล้ว S_2 ไม่อิสระเชิงเส้น
2. ถ้า S_2 อิสระเชิงเส้นแล้ว S_1 อิสระเชิงเส้น

(Leon, 1994)

ทฤษฎีบท 2.1.4 ให้ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n ถ้า $X = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{v}_n]$ เป็นเมทริกซ์ที่มี $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ เป็นสดมภ์ แล้ว $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ เป็นอิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ X เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (Leon, 1994)

ทฤษฎีบท 2.1.5 เซตของ n เวกเตอร์ใน R^m ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น ถ้า $n > m$ (Anton & Rorres, 1994)

ในวิทยานิพนธ์นี้ การกล่าวว่าเมทริกซ์ A เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ และเป็นอิสระเชิงเส้น หมายความว่า เซตของสดมภ์ของ A เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ และเป็นอิสระเชิงเส้นตามลำดับ

ผลคูณภายใน

นิยาม 2.2.1 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ R ฟังก์ชัน $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \rightarrow R$ เรียกว่าเป็นผลคูณภายใน (Inner Product) ถ้าทุกเวกเตอร์ $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ใน V และทุกสเกลาร์ k ใน R มีสมบัติว่า

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
3. $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
4. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ และ $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\mathbf{u} = \theta$

ปริภูมิเวกเตอร์ V พร้อมด้วยผลคูณภายใน $\langle \cdot , \cdot \rangle$ เรียกว่าเป็นปริภูมิผลคูณภายใน (Inner Product Space)

นิยาม 2.2.2 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายใน ให้ $\mathbf{u}$ เป็นเวกเตอร์ใน V

นอร์มของเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ (Norm of Vector $\mathbf{u}$) เขียนแทนด้วย $\|\mathbf{u}\|$ นิยามโดย

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$$

(นอร์มตามนิยามนี้มีชื่อว่า Euclidean Norm)

นิยาม 2.2.3 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายใน ให้ $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน V θ เรียกว่าเป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ ถ้า $0 \le \theta \le \pi$ และ

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

นิยาม 2.2.4 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายใน เรากล่าวว่า $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ ใน V ตั้งฉากกัน (Orthogonal) ถ้า $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$

นิยาม 2.2.5 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายใน $S \subseteq V$ เราเรียก S ว่าเป็นเซตเชิงตั้งฉาก (Orthogonal Set) ถ้าทุกเวกเตอร์ใน S ตั้งฉากกัน

นิยาม 2.2.6 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายใน เราเรียกเซตเชิงตั้งฉาก S ว่าเป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ (Orthonormal Set) ถ้าทุกเวกเตอร์ใน S มีนอร์มเท่ากับ 1

ให้ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉาก สามารถทำให้เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติได้ โดย ให้ $\mathbf{u}_i = \dfrac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|}$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$ จะได้ $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ

นิยาม 2.2.7 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายใน $S \subseteq V$, S เป็นเซตผลคูณภายในเป็นลบ (Negative Inner Product Set) ถ้า $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle < 0$ ทุก ๆ $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ เมื่อ $\mathbf{x} \ne \mathbf{y}$

ในปริภูมิเวกเตอร์ R^n ปรกติเราเขียนเวกเตอร์ในรูปลำดับ n ตัว คือ

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ แต่บางครั้งเราเขียนในรูปเมทริกซ์สดมภ์ $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ และถือว่าเป็นเวกเตอร์เดียวกัน และเราจะใช้สัญลักษณ์ดังกล่าวตามความสะดวกและเหมาะสม

นิยาม 2.2.8 ในปริภูมิเวกเตอร์ R^n, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ และ $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ กำหนดผลคูณภายใน

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

และเมื่อเขียนในแบบเมทริกซ์จะได้ $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$

ทฤษฎีบท 2.2.1 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์จำนวนจริง R และ $\langle \cdot,\cdot \rangle$ เป็นผลคูณภายในปริภูมิเวกเตอร์ V แล้วทุกเวกเตอร์ **u**, **v**, **w** ใน V และทุกสเกลาร์ k ใน R

1. $\langle \theta, \mathbf{v} \rangle = 0$
2. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}+\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$
3. $\langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$

(Leon, 1994)

ทฤษฎีบท 2.2.2 (Cauchy-Schwarz Inequality) ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายใน ถ้า **u**, **v** เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน V แล้ว $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \le \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$

(Landesman & Hestenes, 1992)

ทฤษฎีบท 2.2.3 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายใน จะได้ว่า

1. $\|\mathbf{u}\| \ge 0$
2. $\|\mathbf{u}\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\mathbf{u} = \theta$
3. $\|k\mathbf{u}\| = |k|\,\|\mathbf{u}\|$
4. $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

(Landesman & Hestenes, 1992)

ทฤษฎีบท 2.2.4 (Gram-Schmidt Process) ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายใน และให้เซตย่อย $S = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ เป็นอิสระเชิงเส้น นิยาม $S' = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ เมื่อ $\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1$ และ

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{y}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle \mathbf{y}_k, \mathbf{x}_j \rangle}{\|\mathbf{x}_j\|^2}\,\mathbf{x}_j \qquad 2 \le k \le n$$

แล้ว S' เป็นเซตเชิงตั้งฉากของเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ และมีเซตแผ่คลุมเท่ากับเซตแผ่คลุมของ S (Bennoble & Daniel, 1988)

ทฤษฎีบท 2.2.5 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายใน $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subseteq V$, $\mathbf{v}_i \neq 0$ ถ้า S เป็นเซตเชิงตั้งฉาก แล้ว S เป็นอิสระเชิงเส้น (Anton & Rorres, 1994)

ระบบสมการเชิงเส้น

ให้

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

เป็นระบบสมการเชิงเส้นที่มี m สมการ และ n ตัวแปร และนิยามเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}
$$

ซึ่งทำให้เราสามารถเขียนระบบสมการเชิงเส้นข้างต้นได้ ในรูปของสมการเมทริกซ์คือ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

นิยาม 2.3.1 เมทริกซ์ A เรียกว่า เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ (Coefficient Matrix) และเมทริกซ์

$$
\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] = [A : \mathbf{b}]
$$

เรียกว่าเมทริกซ์แต่งเติม (Augmented Matrix)

ถ้า $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ เขียนเป็นระบบสมการ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ เรียกว่าระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ (Homogenous System of Linear Equations)

นิยาม 2.3.2 เวกเตอร์ $\mathbf{x}$ ซึ่งทำให้ระบบสมการเชิงเส้น $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ เป็นจริงเรียกว่า คำตอบ (Solution) ของระบบสมการ

ทฤษฎีบท 2.3.1 ให้ A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ ระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ มีคำตอบที่ไม่เป็นศูนย์ ถ้า $n > m$ (Strang, 1986)

ทฤษฎีบท 2.3.2 ให้ A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์แล้ว ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. เซตของสดมภ์ของ A เป็นอิสระเชิงเส้น
2. ถ้า $A\mathbf{x} = 0$ แล้ว $\mathbf{x} = 0$
3. ค่าลำดับชั้นของ A เท่ากับ n

(Landesman & Hestenes, 1992)

ทฤษฎีบท 2.3.3 (Gordan)ให้ A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ ซึ่งมีสมาชิกเป็นจำนวนจริง แล้วระบบสมการใดสมการหนึ่งต่อไปนี้เพียงระบบเดียวมีคำตอบ

1. $A\mathbf{x} < 0$ สำหรับ $\mathbf{x} \in R^n$
2. $A^T\mathbf{y} = 0$ สำหรับ $\mathbf{y} \in R^m$, $\mathbf{y} \neq 0$

(Bazaraa & Shetty, 1979)

เมทริกซ์

นิยาม 2.4.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส แล้ว A เป็นเมทริกซ์สมมาตร (Symmetric Matrix) ถ้า $A^T = A$

นิยาม 2.4.2 ให้ Q เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ จะเรียก Q ว่า เมทริกซ์เชิงตั้งฉาก (Orthogonal Matrix) ถ้า เซตของสดมภ์ของ Q เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ

นิยาม 2.4.3 ให้ A เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงแล้ว A เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน (Positive Definite Matrix) ถ้า $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$, ทุก ๆ $\mathbf{x} \neq 0$

นิยาม 2.4.4 ให้ P เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ จะเรียก P ว่า เมทริกซ์สับเปลี่ยน (Permutation Matrix) ถ้าได้มาจากการเปลี่ยนแถวหรือสดมภ์ของเมทริกซ์เอกลักษณ์ I_n

นิยาม 2.4.5 ให้ A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ , $n \geq 2$ จะเรียก A ว่า ลดทอนได้ (Reducible) ถ้า มี $n \times n$ เมทริกซ์สับเปลี่ยน P ซึ่ง

$$P^T AP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

เมื่อ A_{11}และ A_{22} เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติน้อยกว่า n ถ้าไม่มีเมทริกซ์ P แล้ว A เรียกว่า ลดทอนไม่ได้ (Irreducible)

นิยาม 2.4.6 ให้ $A = [a_{ij}]^n_{i,j=1} \in R^{n\times n}$ A เป็นเมทริกซ์ถูกข่มโดยแนวทแยงมุม

(Diagonally Dominant) ถ้า $a_{ii} \geq \sum_{j=1, j \neq i}^{n} | a_{ij} |, i = 1, 2, \ldots, n$

ทฤษฎีบท 2.4.1 ถ้าเมทริกซ์จัตุรัส Q เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากแล้ว

1. $Q^T Q = I$

2. $\langle Q\mathbf{x}, Q\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

(Anton & Rorres, 1994)

ทฤษฎีบท 2.4.2 เมทริกซ์จัตุรัส A เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน ก็ต่อเมื่อ ทุกไมเนอร์มุขสำคัญนำของ A เป็นบวก (Strang, 1986)

ทฤษฎีบท 2.4.3 เมทริกซ์จัตุรัส A เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน ก็ต่อเมื่อค่าลักษณะเฉพาะของ A ทุกตัวเป็นบวก (Strang, 1986)

ทฤษฎีบท 2.4.4 $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n} \in R^{n \times n}$,$a_{ii} > 0$ ทุก i และ $a_{ij} \leq 0$ เมื่อ $i \neq j$ ถ้า A เป็น เมทริกซ์ถูกข่มโดยแนวทแยงมุม หรือ A ลดทอนไม่ได้ และ $a_{ii} \geq \sum_{j=1, j \neq i}^{n} | a_{ij} |$, $i = 1, 2, \ldots, n$ โดยที่ $a_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^{n} | a_{ij} |$ สำหรับ บาง i แล้ว A เป็น เอ็ม-เมทริกซ์

(Tismenetsky & Lancaster, 1985)

ทฤษฎีบทที่มาจากงานวิจัย

จากนี้ไปจะเป็นการนำเสนอทฤษฎีบทที่มาจากงานวิจัย ซึ่งยกมาแสดงโดยไม่นำการพิสูจน์มาด้วย (การพิสูจน์มีอยู่ในงานวิจัยนั้น ๆ)

ให้ $\hat{A}$ แทนคลาส (Class) ของเมทริกซ์จัตุรัส $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ ซึ่ง $a_{ii} > 0$ ทุก i และ $a_{ij} \leq 0$ เมื่อ $i \neq j$

พูลและบูลเลียน (Poole & Boullion, 1974) ได้เสนอทฤษฎีบท 2.5.1 และทฤษฎีบท 2.5.2 ไว้ซึ่ง ทฤษฎีบท 2.5.1 และทฤษฎีบท 2.5.2 เป็นทฤษฎีบทที่รวบรวมเงื่อนไข ที่ทำให้เมทริกซ์ $A \in \hat{A}$ มีตัวผกผันที่ไม่เป็นลบ ซึ่งมีอยู่หลายเงื่อนไข และมีศัพท์มากมายที่ปรากฏอยู่ในทฤษฎีบท ดังนั้นจึงได้นำนิยามของศัพท์มาแสดงไว้ก่อนที่จะกล่าวถึงตัวทฤษฎีบท

นิยาม 2.5.1 ให้ A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ เรียก A ว่า

1. เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน (Upper Triangular Matrix) ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = 0$ สำหรับทุก ๆ i, j ที่ $i > j$

2. เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง (Lower Triangular Matrix) ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = 0$ สำหรับทุก ๆ i, j ที่ $i < j$

3. เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยม (Triangular Matrix) ก็ต่อเมื่อ A เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน หรือ A เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง

นิยาม 2.5.2 ให้ A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ เรียก A ว่าเป็นเมทริกซ์ทแยงมุม (Diagonal Matrix) ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = 0$ สำหรับทุก ๆ i, j ที่ $i \neq j$

นิยาม 2.5.3 ให้ A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ เมทริกซ์ย่อย (Submatrix) ของ A คือ เมทริกซ์ ที่ได้จากการตัดแถวและสดมภ์ของ A

นิยาม 2.5.4 ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ค่าลำดับชั้น (Rank) ของ A คือ มิติของเมทริกซ์ย่อยที่ใหญ่ที่สุดของ A ซึ่งมีค่ากำหนด (Determinant) ไม่เท่ากับศูนย์ ถ้าค่าลำดับชั้นของ A เท่ากับ ค่าต่ำสุด (m, n) แล้วจะเรียก A ว่า มีค่าลำดับชั้นเต็ม (Full Rank)

นิยาม 2.5.5 ให้ A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ ถ้ามีเมทริกซ์ B ที่ทำให้ $AB = BA = I_n$ แล้วเรากล่าวว่า B เป็นเมทริกซ์ผกผัน (Inverse of Matrix) ของ A และเขียนแทนด้วย $B = A^{-1}$

นิยาม 2.5.6 ให้ A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ เรียก A ว่าเป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (Non-Singular Matrix) ก็ต่อเมื่อ A มีค่ากำหนดไม่เท่ากับศูนย์ และจะเรียก A ว่าเป็นเมทริกซ์เอกฐาน (Singular Matrix) ก็ต่อเมื่อ A มีค่ากำหนดเท่ากับศูนย์

เป็นที่ทราบกันดีว่า A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานก็ต่อเมื่อ A มีตัวผกผัน

นิยาม 2.5.7 ให้ A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ , สเกลาร์ λ และ เวกเตอร์ $\mathbf{x} \neq 0$ ที่สอดคล้องกับสมการ $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ เรียกว่าค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue)และ เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ (Eigenvector) ของ A ตามลำดับ

นิยาม 2.5.8 ให้ A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ แล้วค่ากำหนด ของ $p \times p$ เมทริกซ์ย่อยของ A ($1 \leq p \leq \min(m, n)$) เรียกว่า ไมเนอร์อันดับ p ของ A (Minor Order p of A) เมทริกซ์ย่อยมิติ $p \times p$ ของ A เป็นเมทริกซ์ที่ประกอบด้วยแถวที่ 1- p ($i_1, i_2, \ldots, i_p$) และหลักที่ 1- p ($j_1, j_2, \ldots j_p$) โดยที่ $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq m$, $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_p \leq n$

นิยาม 2.5.9 ไมเนอร์ ของ A ซึ่ง $i_k = j_k$ ($k=1, ,\ldots,p$) เรียกว่า ไมเนอร์มุขสำคัญอันดับ p ของ A (Principle Minors Order p of A) และไมเนอร์ของ A ซึ่ง $i_k = j_k = k$ ($k=1, ,\ldots,p$) เรียกว่าไมเนอร์มุขสำคัญนำของA (Leading Principle Minors p of A)

นิยาม 2.5.10 ให้ A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ จะเรียก A ว่า เมทริกซ์ทางเดียว (Monotone Matrix) ถ้า $A\mathbf{x} \geq 0$ แล้ว $\mathbf{x} \geq 0$

นิยาม 2.5.11 ให้ $A \in \hat{A}$ จะเรียก A ว่า เอ็ม-เมทริกซ์ (M-Matrix) ถ้า $A^{-1} \geq 0$

ที่กล่าวมาแล้วทั้งหมดเป็นนิยามของศัพท์ที่ปรากฏในตัวทฤษฎีบท ต่อไปจะเป็นการแสดงทฤษฎีบท

ทฤษฎีบท 2.5.1 ให้ $A \in \hat{A}$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. A^{-1} มีเกิดขึ้น และ $A^{-1} \geq 0$

2. $A = \lambda_0 I - B$ สำหรับบางเมทริกซ์ B ที่ไม่เป็นลบ และ $\lambda_0 > \rho$ เมื่อ ρ เป็นค่าลักษณะเฉพาะที่มากที่สุดของ B

3. ค่าลักษณะเฉพาะที่เป็นจำนวนจริง ของ A เป็นบวก

4. ทุกไมเนอร์มุขสำคัญของ A เป็นบวก

5. ทุกไมเนอร์มุขสำคัญนำของ A เป็นบวก

6. มีเวกเตอร์ $\mathbf{x} > 0$ ซึ่ง $A\mathbf{x} > 0$

7. ถ้า $B \in \hat{A}$ และ $B \geq A$ แล้ว B^{-1} มี

8. มีเมทริกซ์ทแยงมุม $D \in \hat{A}$ ซึ่ง $A\,De > 0$ เมื่อ e เป็นเวกเตอร์ ซึ่งทุกส่วนประกอบเป็น 1

9. มีเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง T_0 และเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน T_1 ซึ่ง $T_0, T_1 \in \hat{A}$ ทุก ไมเนอร์มุขสำคัญนำ ของ T_0 และ T_1 เป็นบวก และ $A = T_0 \times T_1$

บทแทรก ให้ $A \in \hat{A}$

1. ทุกเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบนและเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่างเป็นเอ็ม-เมทริกซ์

2. ให้ A มีอันดับ $n \leq 3$ แล้ว A เป็นเอ็ม-เมทริกซ์ ก็ต่อเมื่อค่ากำหนดของ A มากกว่า 0

3. ถ้า A เป็นเอ็ม-เมทริกซ์ แล้ว A^k เป็นเอ็ม-เมทริกซ์ ก็ต่อเมื่อ $A^k \in \hat{A}$

4. ถ้า $A = \begin{bmatrix} B & E \\ O & D \end{bmatrix}$ แล้ว A เป็นเอ็ม-เมทริกซ์ ก็ต่อเมื่อ B, D เป็นเอ็ม-เมทริกซ์

ทฤษฎีบท 2.5.2 ให้ $A \in \hat{A}$ และ $A = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{u} & B \end{bmatrix}$ เมื่อ B เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน , เวกเตอร์สดมภ์ $\mathbf{u}, \mathbf{v} \leq 0$ แล้ว A เป็นเอ็ม-เมทริกซ์ ก็ต่อเมื่อ

1. $\mathbf{v}^T B^{-1} \mathbf{u} < 1$ และ

2. $(B - \mathbf{u}\mathbf{v}^T)$ เป็นเอ็ม-เมทริกซ์

แอนเดรซ (Andrezej, 2001) ได้เสนอทฤษฎีบทไว้คือทฤษฎีบท 2.5.3 เป็นทฤษฎีบทที่กล่าวถึงสมบัติของเมทริกซ์ ที่เป็นอิสระเชิงเส้น แต่ก่อนที่จะกล่าวถึงตัวทฤษฎีบทจะกล่าวถึงนิยามของศัพท์ที่ปรากฏอยู่ในตัวทฤษฎีบทเสียก่อน

นิยาม 2.5.12 ให้ $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ เป็นเซตในปริภูมิเวกเตอร์ V กำหนด $\mathrm{Lin}\, S = \{\ \mathbf{y} : \mathbf{y} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n\ $, α_i เป็นสเกลาร์ใด ๆ $\}$

เซต Lin S เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เราเรียกว่าปริภูมิเวกเตอร์ที่ก่อกำเนิด (Generate) โดย S และเรากล่าวว่า Lin S เป็นปริภูมิเวกเตอร์แผ่คลุมโดย S

นิยาม 2.5.13 ให้ $C \subseteq R^n$, $C \neq \phi$ จะเรียก C ว่า กรวย (Cone) ถ้า $\mathbf{x} \in C$ แล้ว $\lambda \mathbf{x} \in C$ ทุก $\lambda \geq 0$

นิยาม 2.5.14 ให้ C เป็นกรวยใน R^n และ $C^* = \{ \mathbf{s} \in R^n : \langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle \leq 0, \forall \mathbf{x} \in C \}$
กรวย C เรียกว่า กรวยแหลม (Acute Cone) ถ้า $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \geq 0$ ทุก $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$
กรวย C เรียกว่า กรวยป้าน (Obtuse Cone) ถ้า $C^* \cap \text{Lin } C$ เป็นกรวยแหลม

นิยาม 2.5.15 ให้ $A = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{a}_n]$ $\mathbf{a}_j \in R^n$ ให้ Cone A = $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{a}_i$ เมื่อ $\lambda_i \geq 0$ ทุกๆ i

เราได้ว่า Cone A เป็นกรวยและกล่าวว่า เป็นกรวยที่ถูกก่อกำเนิดโดยสดมภ์ของ A

นิยาม 2.5.16 ให้ A เป็น เมทริกซ์ ซึ่งเซตของสดมภ์ของ A เป็นอิสระเชิงเส้น เมทริกซ์ $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ เรียกว่า ตัวผกผันเทียม (Pseudo Inverse) ของ A

นิยาม 2.5.17 ให้ A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์แล้ว $A^T A$ เรียกว่ากรามเมทริกซ์(Gram Matrix) ของ A

ในทำนองเดียวกัน คือที่กล่าวมาแล้วทั้งหมดเป็นนิยามของศัพท์ที่ปรากฏในตัวทฤษฎีบท ต่อไปจะเป็นการแสดงทฤษฎีบท

ทฤษฎีบท 2.5.3 ให้ A เป็น $n \times m$ เมทริกซ์ และ A เป็นอิสระเชิงเส้นแล้ว ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. ConeA เป็นกรวยป้าน
2. Cone $(A^+)^T$ เป็นกรวยแหลม
3. $(\text{Cone } A)^* \cap \text{Lin } A \subset$ - กรวย A
4. $(A^T A)^{-1} \geq 0$
5. $A^T A$ เป็นเมทริกซ์ทางเดียว