บทที่ 4
ผลการวิจัย

จากการหาผลเฉลยสมการเคดีวีปรับปรุงและสมการเคดีวีประกอบ โดยวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ของผู้วิจัยได้ผลเฉลย ดังนี้

สมการเคดีวีประกอบ

สมการเคดีวีประกอบมีรูปแบบทั่วไป

$$u_t + puu_x + qu^2u_x + ru_{xxx} = 0 \tag{4.1}$$

เมื่อ p , q และ r เป็นค่าคงที่

โดยการใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์หาผลเฉลย ที่กำหนดตัวแปรคลื่น $\xi = \alpha(x - \beta t)$ เปลี่ยนสมการที่อยู่ในรูปฟังก์ชัน $u(x,t)$ เป็น $U(\xi)$ โดยที่คำตอบคลื่น $U(\xi)$ นั้นเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว β เปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (4.1) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$-\beta\frac{dU}{d\xi} + pU\frac{dU}{d\xi} + qU^2\frac{dU}{d\xi} + \alpha^2 r\frac{d^3U}{d\xi^3} = 0 \tag{4.2}$$

อินทิเกรตสมการ (4.2) และกำหนดค่าคงที่การอินทิเกรตเป็นศูนย์จะได้

$$-\beta U + \frac{p}{2}U^2 + \frac{q}{3}U^3 + \alpha^2 r\frac{d^2U}{d\xi^2} = 0 \tag{4.3}$$

กำหนดให้

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k \tag{4.4}$$

โดยที่ $Y = \sec h(\xi)$

จากสมการ (4.3) และ (4.4) คำนวณค่าพารามิเตอร์ได้ $M = 1$ แล้วแทนค่าลงในสมการ (4.4) ทำให้เราได้คำตอบวิเคราะห์ในรูปแบบปิด

$$\begin{aligned}&(-6\beta a_0 + 3pa_0^{\,2} + 2qa_0^{\,3}) + (-6\beta a_1 + 6pa_0a_1 + 6qa_0^{\,2}a_1 + 6r\alpha^2 a_1)Y \\ &+ (3pa_1^{\,2} + 6qa_0a_1^{\,2})Y^2 + (2qa_1^{\,3} - 2r\alpha^2 a_1)Y^3 = 0\end{aligned} \tag{4.5}$$

คำนวณค่าตัวแปรแต่ละตัว โดยการเทียบสัมประสิทธิ์แต่ละเลขชี้กำลังของ Y ในสมการผลลัพธ์ (4.5) จะได้

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\frac{p}{2q}, \quad a_1 = \frac{\sqrt{5}p}{q}, \quad \beta = \frac{p^2}{3q}, \quad \alpha = p\sqrt{\frac{5}{qr}} \\
a_0 &= -\frac{p}{2q}, \quad a_1 = -\frac{\sqrt{5}p}{q}, \quad \beta = \frac{p^2}{3q}, \quad \alpha = p\sqrt{\frac{5}{qr}} \\
a_0 &= -\frac{p}{2q}, \quad a_1 = \frac{\sqrt{5}p}{q}, \quad \beta = \frac{p^2}{3q}, \quad \alpha = -p\sqrt{\frac{5}{qr}} \\
a_0 &= -\frac{p}{2q}, \quad a_1 = -\frac{\sqrt{5}p}{q}, \quad \beta = \frac{p^2}{3q}, \quad \alpha = -p\sqrt{\frac{5}{qr}}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

แทนค่าตัวแปร a_0 , a_1 , α และ β ในสมการ (4.4) ทำให้ได้ผลเฉลยโดยสามารถจำแนกผลเฉลยได้เป็น 2 ประเภท ดังนี้

1. ผลเฉลยจริง เมื่อ $q > 0$ และ $r > 0$ หรือ เมื่อ $q < 0$ และ $r < 0$

$$u_1(x,t) = -\frac{p}{2q} + \frac{\sqrt{5}p}{q}\sec h\left(p\sqrt{\frac{5}{qr}}(x - \frac{p^2}{3q}t)\right)$$

$$u_2(x,t) = -\frac{p}{2q} - \frac{\sqrt{5}p}{q}\sec h\left(p\sqrt{\frac{5}{qr}}(x - \frac{p^2}{3q}t)\right)$$

$$u_3(x,t) = -\frac{p}{2q} + \frac{\sqrt{5}p}{q}\sec h\left(-p\sqrt{\frac{5}{qr}}(x - \frac{p^2}{3q}t)\right)$$

$$u_4(x,t) = -\frac{p}{2q} - \frac{\sqrt{5}p}{q}\sec h\left(-p\sqrt{\frac{5}{qr}}(x - \frac{p^2}{3q}t)\right)$$

2. ผลเฉลยทำนาย เมื่อ $q > 0$ และ $r < 0$ หรือ เมื่อ $q < 0$ และ $r > 0$

$$u_5(x,t) = -\frac{p}{2q} + \frac{\sqrt{5}p}{q}\sec\left(p\sqrt{-\frac{5}{qr}}(x - \frac{p^2}{3q}t)\right)$$

$$u_6(x,t) = -\frac{p}{2q} - \frac{\sqrt{5}p}{q}\sec\left(p\sqrt{-\frac{5}{qr}}(x - \frac{p^2}{3q}t)\right)$$

$$u_7(x,t) = -\frac{p}{2q} + \frac{\sqrt{5}p}{q}\sec\left(-p\sqrt{-\frac{5}{qr}}(x - \frac{p^2}{3q}t)\right)$$

$$u_8(x,t) = -\frac{p}{2q} - \frac{\sqrt{5}p}{q}\sec\left(-p\sqrt{-\frac{5}{qr}}(x - \frac{p^2}{3q}t)\right)$$

นอกจากนี้ เมื่อกำหนดค่าคงที่ p , q และ r ของสมการเคดีวีประกอบที่มีรูปแบบทั่วไป (4.1) โดยกำหนดให้

$$p = -6 \quad , \quad q = 6\delta \quad , \quad r = 1$$

จะเรียกสมการ (4.1) ว่า สมการการ์ดเนอร์ (Gardner equation) เป็นสมการที่มีรูปแบบ ดังนี้

$$u_t - 6uu_x + 6\delta\, u^2 u_x + u_{xxx} = 0$$

เมื่อสัมประสิทธิ์ δ เป็นบวก หรือเป็นลบก็ได้ (ปิยธิดา, 2549)
ซึ่งหาผลเฉลยได้ในทำนองเดียวกัน

สมการเคดีวีปรับปรุง

ผลเฉลยของสมการเคดีวีปรับปรุง

สมการเคดีวีปรับปรุงมีรูปแบบทั่วไป

$$u_t + qu^2 u_x + ru_{xxx} = 0 \tag{4.7}$$

เมื่อ q และ r เป็นค่าคงที่

เปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (4.7) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$-\beta \frac{dU}{d\xi} + qU^2 \frac{dU}{d\xi} + \alpha^2 r \frac{d^3U}{d\xi^3} = 0 \tag{4.8}$$

อินทิเกรตสมการ (4.8) และกำหนดค่าคงที่การอินทิเกรตเป็นศูนย์ จะได้

$$-\beta U + \frac{q}{3}U^3 + \alpha^2 r \frac{d^2U}{d\xi^2} = 0 \tag{4.9}$$

คำนวณค่าพารามิเตอร์ ได้ $M = 1$ แล้วแทนค่าลงในสมการ (4.4) ทำให้เราได้คำตอบวิเคราะห์ในรูปแบบปิด

$$\begin{aligned}(-3\beta a_0 + qa_0^3) + (-3\beta a_1 + 3qa_0^2 a_1 + 3r\alpha^2 a_1)Y \\ + (3qa_0 a_1^2)Y^2 + (qa_1^3 - r\alpha^2 a_1)Y^3 = 0\end{aligned} \tag{4.10}$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์แต่ละเลขชี้กำลังของ Y ในสมการผลลัพธ์ (4.10) และหาค่าตัวแปร a_0 , a_1 , α และ β จะได้

$$\begin{aligned}a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = \alpha\sqrt{\frac{r}{q}} \quad , \quad \beta = \alpha^2 r \\ a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = -\alpha\sqrt{\frac{r}{q}} \quad , \quad \beta = -\alpha^2 r\end{aligned} \tag{4.11}$$

แทนค่าตัวแปร a_0 , a_1 และ β ทำให้ได้ผลเฉลยดังนี้

1. ผลเฉลยจริง เมื่อ $q>0$ และ $r>0$ หรือ เมื่อ $q<0$ และ $r<0$

$$u_1(x,t)=\alpha\sqrt{\frac{r}{q}}\sec h\left(\alpha x-\alpha^3 rt\right)$$

$$u_2(x,t)=-\alpha\sqrt{\frac{r}{q}}\sec h\left(\alpha x+\alpha^3 rt\right)$$

2. ผลเฉลยเชิงซ้อน เมื่อ $q>0$ และ $r<0$ หรือ เมื่อ $q<0$ และ $r>0$

$$u_3(x,t)=i\alpha\sqrt{-\frac{r}{q}}\sec h\left(\alpha x-\alpha^3 rt\right)$$

$$u_4(x,t)=-i\alpha\sqrt{-\frac{r}{q}}\sec h\left(\alpha x+\alpha^3 rt\right) \quad ; \quad i^2=-1$$

โดยผลเฉลยจากสมการเคดีวีปรับปรุงรูปแบบทั่วไป (4.7) สามารถนำมาประยุกต์กับสมการเคดีวีปรับปรุงที่มีสัมประสิทธิ์เฉพาะได้อย่างกว้างขวาง อาทิ สมการเคดีวีปรับปรุงที่มีสัมประสิทธิ์ของพจน์ไม่เชิงเส้นซึ่งเป็นสมการที่มีรูปแบบเฉพาะ (Yan, 2008)

$$u_t+6\mu u^2 u_x+u_{xxx}=0 \quad , \quad \mu=\pm 1 \tag{4.12}$$

ถ้า $\mu=-1$ จะเรียกสมการ (4.12) ว่าเป็นสมการเคดีวีปรับปรุงแบบลบ ซึ่งเมื่อหาผลเฉลยจะได้ผลเฉลยเชิงซ้อน ดังนี้

$$u_1(x,t)=\alpha\ i\sqrt{\frac{1}{6}}\sec h\left(\alpha x-\alpha^3 t)\right)$$

$$u_2(x,t)=-\alpha\ i\sqrt{\frac{1}{6}}\sec h\left(\alpha x+\alpha^3 t)\right) \quad ; \quad i^2=-1$$

ถ้า $\mu = 1$ จะเรียกสมการ (4.12) ว่าเป็นสมการเคดีวีปรับปรุงแบบบวก ซึ่งเมื่อหาผลเฉลยจะได้ผลเฉลยจริง ดังนี้

$$u_1(x,t) = \alpha \sqrt{\frac{1}{6}} \sec h\left(\alpha x - \alpha^3 t\right)$$

$$u_2(x,t) = -\alpha \sqrt{\frac{1}{6}} \sec h\left(\alpha x + \alpha^3 t\right)$$

จากผลเฉลยที่ได้แสดงว่าเราสามารถใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ หาผลเฉลยของปัญหาที่อยู่ในรูปแบบของ สมการเคดีวีปรับปรุง และสมการเคดีวีประกอบ ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น ที่ผู้วิจัยศึกษาได้อย่างมีประสิทธิภาพ