การปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียนเพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

ปิยะดา โททัสสะ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
มีนาคม 2559

คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์และคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ได้พิจารณาวิทยานิพนธ์ของ ปิยะดา โททัสสะ ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยบูรพาได้

คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์

.... อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ดวงกมล ผลเต็ม)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธาน
(ดร.ณิชาภัทร บุญก่อเกื้อ)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ดวงกมล ผลเต็ม)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สินีนาฏ ศรีมงคล)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สหัทยา รัตนะมงคลกุล)

.... กรรมการ
(ดร. อาพันธ์ชนิต เจนจิต)

คณะวิทยาศาสตร์อนุมัติให้รับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยบูรพา

....คณบดีคณะวิทยาศาสตร์
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เอกรัฐ ศรีสุข)
วันที่...12...เดือน...เมษายน...พ.ศ. 2559

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความกรุณาจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ดวงกมล ผลเต็ม อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก ที่ให้คำปรึกษาแนะนำแนวทางที่ถูกต้องตลอดจนแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ด้วยความละเอียดถี่ถ้วนและเอาใจใส่ด้วยดีเสมอมา ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งเป็นอย่างยิ่ง จึงขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอขอบพระคุณ อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ ที่ให้ความรู้ ให้คำปรึกษา ตรวจแก้ไขและวิจารณ์ผลงาน ทำให้งานวิจัยมีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น และผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่ให้ความอนุเคราะห์ในการตรวจสอบ รวมทั้งให้คำแนะนำแก้ไขการวิจัยให้มีคุณภาพ ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อพัฒนา คุณแม่ธัญลักษณ์ โททัสสะ และครอบครัว รวมถึงเพื่อนทุกคนที่ให้กำลังใจและสนับสนุนผู้วิจัยเสมอมา

เนื่องจากงานวิจัยนี้ส่วนหนึ่งได้รับการสนับสนุนจากงบประมาณเงินรายได้ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา จึงขอขอบพระคุณ ณ ที่นี้ด้วย

คุณค่าและประโยชน์ของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอมอบเป็นกตัญญูกตเวทิตาแด่บุพการี บูรพาจารย์ และผู้มีพระคุณทุกท่านทั้งในอดีตและปัจจุบัน ที่ทำให้ข้าพเจ้าเป็นผู้มีการศึกษาและประสบความสำเร็จมาจนตราบเท่าทุกวันนี้

ปิยะดา โททัสสะ

55910090: สาขาวิชา: คณิตศาสตร์; วท.ม. (คณิตศาสตร์)
คำสำคัญ: สมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น/ สมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น/ ปัญหาค่าเริ่มต้น/ วิธีการแยกอโดเมียน/ การแปลงธรรมชาติ

ปิยะดา โททัสสะ: การปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียนเพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (A MODIFIED ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD FOR SOLVING DIFFERENTIAL EQUATIONS) คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์: ดวงกมล ผลเต็ม, Ph.D. 87 หน้า. ปี พ.ศ. 2559.

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์พร้อมกับเงื่อนไขค่าเริ่มต้น โดยการปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียน ซึ่งมีสมการในรูปของ

$$y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} = g(x)$$
$$y(0) = \alpha_0, y'(0) = \alpha_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = \alpha_{n-1}$$

และ

$$y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} + F\left(x, y, \ldots, y^{(n-2)}\right) = g(x)$$
$$y(0) = \alpha_0, y'(0) = \alpha_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = \alpha_{n-1}$$

ซึ่งผลเฉลยที่ได้เป็นการประมาณค่าผลเฉลยวิเคราะห์ ในรูปของ $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i$ นอกจากนี้ ยังได้นำวิธีการแยกอโดเมียน ไปหาสูตรการแปลงธรรมชาติ ได้โดยง่าย

55910090: MAJOR: MATHEMATICS; M.Sc. (MATHEMATICS)

KEYWORDS: LINEAR EQUATIONS/ NONLINEAR EQUATIONS/ INITIAL VALUE PROBLEM/ ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD/ NATURAL TRANSFORM

PIYADA TOTASSA: A MODIFIED ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD FOR SOLVING DIFFERENTIAL EQUATIONS. ADVISORY COMMITTEE: DUANGKAMOL POLTEM, Ph.D. 87 P. 2016.

This research aims to study a modification of Adomain decomposition method to solve the initial value problems :

$$y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} = g(x),$$
$$y(0) = \alpha_0, y'(0) = \alpha_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = \alpha_{n-1},$$

and

$$y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} + F\left(x, y, \ldots, y^{(n-2)}\right) = g(x),$$
$$y(0) = \alpha_0, y'(0) = \alpha_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = \alpha_{n-1}.$$

The approximation analytical solution is in the form of $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i$. Moreover, adomian decomposition method simply is applied to find the formula of natural transform.

สารบัญ

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ปัญหาต่าง ๆ ในทางวิทยาศาสตร์ เช่น การสลายตัวของธาตุกัมมันตรังสี ปัญหาเกี่ยวกับการ เพิ่มของประชากร ปัญหาเกี่ยวกับดอกเบี้ย ปัญหาเกี่ยวกับการไหล เป็นต้น และปัญหาในธรรมชาติล้วนเปลี่ยนแปลงเคลื่อนไหวอยู่ตลอดเวลา เช่น กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน ปัญหาของการนำความร้อนในแท่งเหล็ก การหาประจุหรือกระแสวงจรไฟฟ้า เป็นต้น ซึ่งส่วนใหญ่จะเกี่ยวกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของสิ่งที่จะพิจารณา โดยอธิบายด้วยรูปแบบสมการคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations) ซึ่งมีบทบาทและเป็นพื้นฐานที่สำคัญในคณิตศาสตร์ประยุกต์ ทั้งในวิศวกรรมศาสตร์ และวิทยาศาสตร์

สมการเชิงอนุพันธ์เริ่มมีขึ้นในคริสต์ศตวรรษที่ 17 โดยกลุ่มบุคคลแรกที่ศึกษาค้นคว้าอย่างจริงจัง ได้แก่ นิวตัน (Newton) ไลบ์นิตซ์ (Leibnitz) และตระกูลแบร์นูลลี (Bernoulli) ปัญหาในรูปสมการเชิงอนุพันธ์สมัยนั้นเกิดจากการศึกษาเรขาคณิตและกลศาสตร์ เป็นสมการอันดับ 1 และ 2 มีลักษณะง่าย มีคำตอบเป็นฟังก์ชันเบื้องต้น (Elementary Functions) หาคำตอบได้โดยใช้วิธีการทางพีชคณิต และการอินทิเกรต ซึ่งกระบวนการแก้ปัญหามีขั้นตอนจำกัด ก่อนสิ้นศตวรรษที่ 17 มีวิธีการใหม่ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ คือ วิธีแยกตัวแปร และการใช้ตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต ในศตวรรษที่ 18 สมการเชิงอนุพันธ์เริ่มเป็นวิชาหนึ่ง และมีวิธีแก้ปัญหาเป็นระบบมากขึ้น นักคณิตศาสตร์ที่เริ่มใช้วิธีการเหล่านี้ ได้แก่ ออยเลอร์ (Euler) ลากรองจ์ (Lagrange) และลาปลาซ (Laplace) ภายในศตวรรษนี้ นักคณิตศาสตร์ได้พบสมการเชิงอนุพันธ์มากมาย สมการเชิงอนุพันธ์ที่หาคำตอบโดยวิธีง่าย ๆ มีน้อยมาก เมื่อเปรียบเทียบกับทั้งหมด นักคณิตศาสตร์เริ่มรู้สึกว่าความหวังที่จะได้วิธีการอย่างหนึ่งสำหรับใช้แก้สมการเชิงอนุพันธ์ใด ๆ ได้นั้น สูญสลายไป แต่เราพบความจริงยิ่งใหญ่ประการหนึ่งมาทดแทน คือ มีเกณฑ์ ตัดสินว่าสมการเชิงอนุพันธ์ใดมีคำตอบหรือไม่ เมื่อมาถึงการแก้สมการโดยใช้อนุกรม นักคณิตศาสตร์พยายามหาคุณสมบัติของสมการเชิงอนุพันธ์จากสมการเชิงอนุพันธ์โดยตรง และพบว่าสมการเชิงอนุพันธ์เป็นต้นกำเนิดของฟังก์ชันใหม่ ๆ ในปี ค.ศ. 1820 ซึ่งระยะนั้นเป็นระยะสำคัญในการวางทฤษฎีบทต่าง ๆ ของสมการเชิงอนุพันธ์พร้อม ๆ กับการวางรากฐานแคลคูลัส ได้แก่ โคชี (Cauchy) พบทฤษฎีบทการมีคำตอบ (Existence Theorem) ของสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งต่อมา บีการ์ (Picard) เสริมทฤษฎีบทนี้ให้สมบูรณ์การมีคำตอบหนึ่งเดียว (Existence and Uniqueness Theorem) โดยใช้วิธีการประมาณโดยลำดับขั้น

ปัจจุบันเราใช้สมการเชิงอนุพันธ์ แสดงกฎเกณฑ์ประการต่าง ๆ ในหลายวิชา เช่น ฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา และกลศาสตร์ เป็นต้น (พิชากร แปลงประสพโชค, 2542) นอกจากนั้นก็ยังมีนักคณิตศาสตร์มากมายพยายามพัฒนาวิธีการเพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์มาอย่างต่อเนื่องจนถึงปัจจุบัน เช่น จอร์จ อโดเมียน (George Adomian) เป็นต้น

เริ่มต้นปี 1970 George Adomian นักคณิตศาสตร์ชาวอาร์มาเนีย-อเมริกา คิดค้นวิธีการเรียกว่า วิธีการแยกอโดเมียน (Adomian Decomposition Method) สำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equations) และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equations) ที่เป็นเชิงเส้น (Linear) และไม่เป็นเชิงเส้น (Non-linear) ต่อมาวิธีการแยกอโดเมียนถูกนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ อย่างกว้างขวาง เช่น ปัญหาทางฟิสิกส์ ชีววิทยา และเคมี ซึ่งผลเฉลยจากวิธีการแยกอโดเมียนจะอยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ และผลเฉลยที่ได้จะเป็นการประมาณค่าผลเฉลยวิเคราะห์ (Approximation Analytical Solution)

สำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ โดยวิธีการแยกอโดเมียนอาจจะทำให้การคำนวณมีความยุ่งยากและมีความซับซ้อน ดังนั้นจึงได้มีนักวิจัยมากมายพยายามที่จะปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียน ทำให้การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นี้มีความซับซ้อนน้อยลง ลดขั้นตอนในการคำนวณ และนำวิธีการแยกอโดเมียนไปประยุกต์กับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 เพื่อหาสูตรการแปลงธรรมชาติ (Natural Transform)

ก่อนที่เราจะหาผลเฉลยโดยการปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียนและหาสูตรการแปลงธรรมชาติ มีความจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องทำความรู้จักกับชนิด นิยามของสมการเชิงอนุพันธ์ และขั้นตอนการหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกอโดเมียน ดังต่อไปนี้

สมการเชิงอนุพันธ์แบ่งได้ 2 ชนิด คือ สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (Linear Differential Equations) และสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น (Non-linear Differential Equation)

นิยาม 1.1 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น คือ สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. เลขชี้กำลังของตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตามมีค่าเป็น 1 เท่านั้น
2. ไม่มีพจน์ที่อยู่ในรูปผลคูณของตัวแปรตามและ/หรืออนุพันธ์ของตัวแปรตามในสมการ
3. ไม่มีพจน์ที่อยู่ในรูปฟังก์ชันอดิสัยของตัวแปรตามหรืออนุพันธ์ของตัวแปรตามในสมการ

ตัวอย่างที่ 1.1.1

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น	สมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น
$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}=x^3y+\sin x$	$x\dfrac{d^2y}{dx^2}+y\dfrac{dy}{dx}=x^2y+\cos x$
$\dfrac{dy}{dx}=4xy$	$\sqrt{\dfrac{dy}{dx}}=2xy$
$\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=2u$	$\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=\dfrac{1}{2}e^u$
$\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}$	$\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=2\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}$

$\square$

เราสามารถเขียนสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n ในรูปทั่วไป ได้ดังนี้

$$F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)=0$$

และสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ n เขียนอยู่ในรูปทั่วไป ได้ดังนี้

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=g(x)$$

สมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น คือ สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งไม่ใช่สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

นิยาม 1.2 ปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial-value Problem) คือ ปัญหาที่ประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์พร้อมกับเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial Conditions) รูปทั่วไป คือ

$$F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)=0$$
$$y(x_0)=\alpha_0,\, y'(x_0)=\alpha_1,\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=\alpha_{n-1}$$

เมื่อ $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$ เป็นค่าคงที่

จากนั้นผู้วิจัยจะนำเสนอขั้นตอนการหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกอโดเมียน ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

วิธีการแยกอโดเมียน (Adomian Decomposition Method)

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ และเงื่อนไขเริ่มต้น (Adomian, 1988)

$$\begin{aligned}&y^{(n)}+P(x)y^{(n-1)}+F\left(x,y,\ldots,y^{(n-2)}\right)=g(x)\\&y(0)=\alpha_0,\, y'(0)=\alpha_1,\ldots,y^{(n-1)}(0)=\alpha_{n-1}\end{aligned}\tag{1.1}$$

<u>วิธีทำ</u> จัดรูปสมการ (1.1) จะได้

$$y^{(n)}=g(x)-P(x)y^{(n-1)}-F\left(x,y,\ldots,y^{(n-2)}\right)\tag{1.2}$$

นิยามตัวดำเนินการ $L(\cdot)$ กำหนดโดย

$$L(\cdot)=\frac{d^n}{dx^n}(\cdot)$$

สมการ (1.2) เขียนแทนด้วย

$$L(y(x)) = g(x) - P(x)y^{(n-1)} - F\left(x, y, ..., y^{(n-2)}\right) \tag{1.3}$$

นิยามตัวดำเนินการผกผัน $L^{-1}(\cdot)$ ดังนี้

$$L^{-1}(\cdot) = \underbrace{\int_0^x \int_0^x ... \int_0^x (\cdot) dxdx...dx}_{n}$$

เมื่อ $L^{-1}L(y(x)) = y(x) - y(0) - xy'(0) - \frac{x^2}{2!}y''(0) - \cdots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}y^{(n-1)}(0);\ n = 1, 2, \ldots$

ดังนั้น จากสมการ (1.3) ได้ว่า

$$L^{-1}(L(y(x))) = L^{-1}(g(x)) - L^{-1}\left(P(x)y^{(n-1)}\right) - L^{-1}\left(F\left(x, y, ..., y^{(n-2)}\right)\right)$$

$$y(x) = \phi(x) + L^{-1}(g(x)) - L^{-1}\left(P(x)y^{(n-1)}\right) - L^{-1}\left(F\left(x, y, ..., y^{(n-2)}\right)\right) \tag{1.4}$$

เมื่อ $L(\phi(x)) = 0$

โดยวิธีการแยกอโดเมียนให้ผลเฉลย $y(x)$ และฟังก์ชันไม่เชิงเส้น $F\left(x, y, ..., y^{(n-2)}\right)$ อยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \qquad \text{และ} \qquad F\left(x, y, ..., y^{(n-2)}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$$

เมื่อ A_i แทน พหุนามอโดเมียน (Adomian Polynomials)

โดยที่ $A_i = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{d\lambda^i} F\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k\right)\right]_{\lambda=0}\ ;\ i = 0, 1, 2, \ldots$

ดังนั้น จากสมการ (1.4) เขียนแทนด้วย

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i = \phi(x) + L^{-1}(g(x)) - L^{-1}\left(P(x)\sum_{i=0}^{\infty} y_i^{(n-1)}\right) - L^{-1}\left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right)$$

นั่นคือ

$$y_0 + y_1 + \ldots = \phi(x) + L^{-1}(g(x)) - L^{-1}\left(P(x)\left(y_0^{(n-1)} + y_1^{(n-1)} + \ldots\right)\right) - L^{-1}(A_0 + A_1 + \ldots) \tag{1.5}$$

จากสมการ (1.5) สามารถหา $y_i(x)$ จากความสัมพันธ์เวียนเกิด (Recurrence Relation) ดังนี้

$$y_0 = \phi(x) + L^{-1}(g(x))$$

$$y_0 + y_1 = \phi(x) + L^{-1}(g(x)) - L^{-1}\left(P(x)\left(y_0^{(n-1)}\right)\right) - L^{-1}(A_0)$$

$$y_1 = -L^{-1}P(x)\left(y_0^{(n-1)}\right) - L^{-1}(A_0)$$

$$y_0 + y_1 + y_2 = \phi(x) + L^{-1}(g(x)) - L^{-1}\left(P(x)\left(y_0^{(n-1)} + y_1^{(n-1)}\right)\right) - L^{-1}(A_0 + A_1)$$

$$y_2 = -L^{-1}\left(P(x)\left(y_1^{(n-1)}\right)\right) - L^{-1}(A_1)$$

$$\vdots$$

$$y_{i+1} = -L^{-1}\left(P(x)y_i^{(n-1)}\right) - L^{-1}(A_i),\ i \geq 0$$

ดังนั้น จะได้ผลเฉลย $y(x) = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots$

$\square$

สำหรับในงานวิจัยนี้ยังได้นำวิธีการแยกอโดเมียนไปประยุกต์กับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 เพื่อหาสูตรการแปลงธรรมชาติ ซึ่งในบทนี้จะนำเสนอนิยาม สมบัติ และตัวอย่างของการแปลงธรรมชาติ ดังนี้

การแปลงธรรมชาติ (Natural Transform)

การแปลงธรรมชาติ (Natural Transform) เป็นการแปลงเชิงอินทิกรัลที่มีลักษณะคล้ายกับการแปลงลาปลาซ มีนักวิจัยนำการแปลงธรรมชาติไปใช้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งในงานวิจัยนี้จะหาสูตรการแปลงธรรมชาติ โดยวิธีการแยกอโดเมียนโดยการนำวิธีการแยกอโดเมียนไปประยุกต์กับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 และจะพบว่าผลเฉลยมีค่าตรงกับนิยามของการแปลงธรรมชาติ ซึ่งการแปลงธรรมชาตินิยามได้ ดังนี้

การแปลงธรรมชาติฟังก์ชัน $f(t)$ สำหรับ $t \in (-\infty, \infty)$ นิยามโดย

$$N[f(t)] = R(s,u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(ut)dt\ ;\ s,u \in (-\infty, \infty)$$

เมื่อ $N[f(t)]$ คือ การแปลงธรรมชาติของฟังก์ชัน $f(t)$ และ s,u คือ ตัวแปรการแปลงธรรมชาติ โดยในงานวิจัยนี้จะพิจารณาฟังก์ชัน $f(t)$ สำหรับ $t \geq 0$ ซึ่งนิยามการแปลงธรรมชาติ ดังนี้

$$N[f(t)] = R(s,u) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(ut)dt\ ;\ s,u \in (0, \infty) \tag{1.6}$$

ซึ่งมีสมบัติ ดังนี้ (Khan & Khan, 2008)

1. $N[af(t) + bg(t)] = aN[f(t)] + bN[g(t)]$
2. $N[e^{at} f(t)] = \dfrac{s}{s-au}\left[\dfrac{us}{s-au}\right],\ t \geq 0$
3. ถ้า $N[f(t)] = R(s,u)$ แล้ว $N[f(at)] = \dfrac{1}{a}R(s,u)$
4. ถ้า $N[f(t)] = R(s,u)$ แล้ว $N[f'(t)] = \dfrac{s}{u}R(s,u) - \dfrac{f(0)}{u}$

สมบัติการแปลงธรรมชาติ (ต่อ)

5. ถ้า $N[f(t)]=R(s,u)$ แล้ว $N[f''(at)]=\frac{s^2}{u^2}R(s,u)-\frac{s}{u^2}f(0)-\frac{f'(0)}{u}$

6. ถ้า $N[f(t)]=R(s,u)$ แล้ว $N\left[\int_0^t f(p)dp\right]=\frac{u}{s}R(s,u)$

ลำดับถัดมา จะเป็นตัวอย่างของการแปลงธรรมชาติ โดยวิธีปกติ

ตารางที่ 1 ตัวอย่างของการแปลงธรรมชาติ (Khan & Khan, 2008)

$f(t)$	$N[f(t)]$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{u}{s^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-au}$
$\sin t$	$\frac{u}{s^2+u^2}$
$\cos t$	$\frac{s}{s^2+u^2}$
$\sinh t$	$\frac{au}{s^2-a^2u^2}$
$\cosh t$	$\frac{s}{s^2-a^2u^2}$

งานวิจัยในหัวข้อนี้ต้องการหาสูตรการแปลงธรรมชาติ โดยวิธีการที่เรียกว่า วิธีการแยกอโดเมียน โดยจะนำวิธีการแยกอโดเมียนนี้ไปประยุกต์กับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 ซึ่งวิธีนี้จะต่างจากวิธีปกติ คือ จะใช้อนุพันธ์สำหรับหาสูตรการแปลงธรรมชาติ แต่วิธีปกติจะใช้การหาปริพันธ์ และจะพบว่าการหาอนุพันธ์สามารถหาค่าได้กับทุกฟังก์ชัน แต่การหาปริพันธ์บางฟังก์ชันอาจจะมีค่าของปริพันธ์ที่ลู่ออกได้

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.2.1 เพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ โดยการปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียน (Modified Adomian Decomposition Method)

1.2.2 เพื่อหาสูตรการแปลงธรรมชาติ (Natural Transform) โดยวิธีการแยกอโดเมียน

1.3 สมมติฐานของการวิจัย

1.3.1 สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{aligned} &y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} = g(x) \\ &y(0) = \alpha_0, y'(0) = \alpha_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = \alpha_{n-1} \end{aligned} \tag{1.7}$$

และ

$$\begin{aligned} &y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} + F\left(x, y, \ldots, y^{(n-2)}\right) = g(x) \\ &y(0) = \alpha_0, y'(0) = \alpha_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = \alpha_{n-1} \end{aligned}$$

(1.8)

เมื่อ $F\left(x, y, \ldots, y^{(n-2)}\right)$ แทน ฟังก์ชันของอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นอันดับที่ $n-2$ และ $P(x) \neq 0$ และ $g(x)$ แทน พจน์แหล่งต้นทาง (Source Term)

ให้ตัวดำเนินการ L อยู่ในรูป

$$L(\cdot) = e^{-\int p(x)dx} \frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\cdot)\right)$$

เพื่อใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น โดยการปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียน และผลเฉลยที่ได้เป็นการประมาณค่าผลเฉลยวิเคราะห์ ในรูปของ

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i$$

1.3.2 วิธีการแยกอโดเมียนสามารถนำไปใช้ในการหาสูตรการแปลงธรรมชาติได้

1.4 กรอบแนวคิดในการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ได้นำมาจากงานวิจัยของ Hosseini and Jafari (2009) ซึ่งจะนำตัวดำเนินการ

$$L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx} \frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\cdot)\right)$$

มาใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น (1.7) และ (1.8) ตามลำดับ โดยที่งานวิจัยนี้สนใจสมการเชิงอนุพันธ์ที่ $F\left(x, y, \ldots, y^{(n-2)}\right)$ เป็นฟังก์ชันของ $y^{(n-2)}$

ซึ่งในงานวิจัยของ Hosseini and Jafari (2009) ไม่ได้นำเสนอไว้ และในงานวิจัยนี้ยังได้นำวิธีการแยกอโดเมียนไปประยุกต์กับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 เพื่อหาสูตรการแปลงธรรมชาติ

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

1.5.1 ได้วิธีการปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียน สำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น

1.5.2 ได้วิธีที่สามารถนำไปหาสูตรการแปลงธรรมชาติ

1.6 ขอบเขตของการวิจัย

1.6.1 ปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียน เพื่อนำไปหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น

1.6.2 นำวิธีการแยกอโดเมียนไปหาสูตรการแปลงธรรมชาติ

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์โดยวิธีการแยกอโดเมียนนั้นมีการวิจัยอย่างแพร่หลาย ซึ่งถือว่าเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพและเป็นวิธีที่เหมาะสมอีกวิธีหนึ่ง สำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย นอกจากนี้วิธีการแยกอโดเมียนยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ ทั้งทางด้านวิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์ และนอกจากนี้มีนักวิจัยพยายามทำการปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียน เพื่อที่จะทำให้การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์มีความซับซ้อนน้อยลง ซึ่งมีนักวิจัยที่ทำการศึกษา ดังนี้

2.1 งานวิจัยที่ศึกษาวิธีการแยกอโดเมียนกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 และอันดับ 2 พร้อมเงื่อนไขเริ่มต้น โดยใช้วิธีการแยกอโดเมียน ได้รับความสนใจจากนักวิจัยมากมาย และมีการศึกษาอย่างต่อเนื่อง ตัวอย่างเช่น Adomian (1988), Casasus and Al-Hayani (2002), Al-Khaled and Anwar (2007), Ebaid (2011) โดยในที่นี้เราจะอ้างงานวิจัยของ Casasus and Al-Hayani (2002) ที่พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น ในรูป

$$y'' + g(y, y') + k^2 y = \lambda f(t, y, y')$$

พร้อมกับเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = \alpha, y'(0) = \beta$ เมื่อ $f(t, y, y')$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่อง และจะใช้วิธีการแยกอโดเมียนเพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญนี้ ค่าคลาดเคลื่อนที่ได้ในผลการวิจัยนี้ แสดงให้เห็นว่าผลเฉลยแบบแม่นตรงกับผลเฉลยแบบวิธีการแยกอโดเมียนมีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่งค่า λ ไม่มีผลต่อการลู่เข้าของวิธีการแยกอโดเมียนนี้

อย่างไรก็ตาม ยังมีนักวิจัยอีกมากมายที่ได้นำวิธีการแยกอโดเมียนมาใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง และสมการเชิงปริพันธ์ เช่น Wazwaz (2001a), Wazwaz (2001b), Momani and Noor (2006), Momani and Noor (2007), Hashim (2006), Shang and Han (2010) เป็นต้น โดยจะอ้างจากงานวิจัยของ Wazwaz (2001a) พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 5 ที่อยู่ ในรูป

$$y^{(v)}(x) = g(x) + f(y),\ 0 < x < b$$

นิยามเงื่อนไขขอบ

$$y(0) = \alpha_0, y'(0) = \alpha_1, y''(0) = \alpha_2, y(b) = \beta_0 \text{ และ } y'(b) = \beta_1$$

จะได้ผลเฉลยที่อยู่ในรูปทั่วไป

$$y(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\frac{1}{2!}\alpha_2 x^2+\frac{1}{3!}Ax^3+\frac{1}{4!}Bx^4+L^{-1}g(x)+L^{-1}f(y)$$

เมื่อ $A=y'''(0)$ และ $B=y^{(iv)}(0)$

จากนั้นใช้วิธีการแยกอโดเมียนสำหรับการหาผลเฉลย

Hashim (2006) นำวิธีการแยกอโดเมียนเพื่อหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบของสมการเชิงปริพันธ์อันดับ 4 ที่มีสมการอยู่ในรูป

$$y^{(iv)}(x)=f(x)+\gamma y(x)+\int_0^x\left[g(x)y(x)+h(x)F(y(x))\right]dx$$

พร้อมกับเงื่อนไขขอบ $y(a)=\alpha_0, y''(a)=\alpha_2$ และ $y(b)=\beta_0, y''(b)=\beta_2$ และขั้นตอนวิธีการแยกอโดเมียนดังกล่าวแสดงผลลัพธ์ที่แม่นยำ ซึ่งความแม่นยำนี้สามารถควบคุมได้จากจำนวนพจน์ของเลขชี้กำลังในการกระจายเทเลอร์ของฟังก์ชัน f,g และ h

นอกจากนี้ วิธีการแยกอโดเมียนยังได้นำไปใช้ในการหาผลเฉลยสำหรับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ เช่นในงานวิจัยของ Biazar, Babolian, and Islam (2004), Mahmood, Casasus, and Al-Hayani (2005), Bougoffa and Bougoffa (2006), Jafari and Daftardar-Gejji (2006a), Momani, Moadi, and Noor (2006) จากงานวิจัยของ Biazar et al. (2004) ใช้วิธีการแยกอโดเมียนเพื่อหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 และสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสูง โดยการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสูงให้เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 ซึ่งวิธีนี้สามารถหาผลเฉลยได้ทั้งระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น

จากงานวิจัยที่ศึกษาวิธีการแยกอโดเมียนกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ แสดงให้เห็นว่าวิธีการแยกอโดเมียนนี้สามารถนำไปหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 1 ไปจนถึงสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสูง รวมไปถึงระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น และยังสามารถนำไปหาผลเฉลยของสมการเชิงปริพันธ์ได้เช่นกัน ซึ่งผลเฉลยที่ได้จากวิธีการแยกอโดเมียนนี้มีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแบบแม่นตรง แต่วิธีการแยกอโดเมียนสะดวกกว่ามาก

2.2 งานวิจัยที่ศึกษาวิธีการแยกอโดเมียนกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

นอกจากวิธีการแยกอโดเมียนจะสามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญได้แล้ว วิธีการแยกอโดเมียนนี้ยังสามารถนำมาหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยและระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยทั้งในแบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งมีนักวิจัยที่ได้ทำการศึกษา ดังนี้

Adomian and Rach (1989) พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น ที่อยู่ในรูป $L_x u + L_y u + Nu = 0$ เมื่อ N คือ ตัวดำเนินการไม่เชิงเส้น โดยที่ตัวดำเนินการเชิงเส้น (L) มีอันดับที่เท่ากัน ผลเฉลยที่ได้จะมาจากการแยกสมการของตัวดำเนินการ ดังนี้ $L_x u = -L_y u - Nu$ และ $L_y u = -L_x u - Nu$ ซึ่งมีตัวดำเนินการ $L_x(\cdot) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ และ $L_y(\cdot) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ตามลำดับ และใช้วิธีการแยกอโดเมียนเพื่อหาผลเฉลย

Wazwaz (2000) พิจารณาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น ที่อยู่ในรูป

$$L_t u + L_x v + N_1(u,v) = g_1$$
$$L_t v + L_x u + N_2(u,v) = g_2$$

เมื่อ $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$ และ $L_x = \frac{\partial}{\partial x}$

และพิจารณาแบบจำลองปฏิกิริยาการแพร่ Brusselator ที่อยู่ในรูป

$$u_t = u^2 v - (A+1)u + \frac{1}{500}\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + B$$
$$v_t = -u^2 v + Au + \frac{1}{500}\left(u_{xx} + u_{yy}\right)$$

กับเงื่อนไขเริ่มต้น

$$u(x,y,0) = 2 + \frac{1}{4}y$$
$$v(x,y,0) = 1 + \frac{4}{5}x$$

ซึ่งจะใช้วิธีการแยกอโดเมียนหาผลเฉลยของระบบสมการนี้ พบว่าวิธีการแยกอโดเมียนนี้จะลดวิธีการคำนวณสำหรับการหาผลเฉลย

Kaya and Yokus (2002) พิจารณาสมการ Burgers ที่อยู่ในรูป

$$u_t + \varepsilon u u_x - v u_{xx} = 0$$

และพิจารณาผลเฉลยของสมการควบคุมที่อยู่ในรูป t และ x ตามลำดับ

$$u(x,t) = f(x) - L_t^{-1}\left[\varepsilon(\phi(u(x,t))) - vL_x(u(x,t))\right]$$
$$u(x,t) = g(x) + \frac{1}{v}L_x^{-1}\left[\varepsilon(\phi(u(x,t))) + L_t(u(x,t))\right]$$

เมื่อ $f(x) = u(x,0)$, $g(x,t) = u(0,t) + xu_x(0,t)$ และ $\phi(u(x,t)) = uu_x$

และตัวดำเนินการ $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

พบว่าผลเฉลยของสมการ Burgers โดยใช้วิธีการแยกอโดเมียน สมการควบคุม x จะทำได้ง่ายและมีความถูกต้องมากกว่าสมการควบคุม t เมื่อเปรียบเทียบจากค่าคลาดเคลื่อนของการควบคุม x และ t กับ ผลเฉลยแม่นตรง

Pamuk (2005) นำวิธีการแยกอโดเมียนมาใช้เพื่อหาผลเฉลยของสมการความร้อนในรูปแบบสมการเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น ซึ่งสมการจะอยู่ในรูป

$$u_t = u_{xx} + \varepsilon u^m \; ; \; m = 1, 2, 3, \ldots$$

ซึ่งวิธีการแยกอโดเมียนให้ผลเฉลยเชิงตัวเลขถูกต้องมากกว่าสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้นเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีอื่น ๆ

Zhang and Lu (2011) หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยโดยวิธีการแยกอโดเมียนในกรณีที่สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการแบบเอกพันธ์ (Homogeneous Equations) ซึ่งวิธีนี้ไม่สามารถหาค่า u_0 ได้ ฉะนั้นคณะวิจัยจึงได้เสนอวิธีการหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกอโดเมียนขึ้นมาใหม่ ซึ่งมี 3 ขั้นตอน ดังนี้

1 การเลือก u_0 จะขึ้นอยู่กับ 2 กรณี ดังนี้

1.1 ใส่ตัวดำเนินการผกผันทั้งสองข้างของสมการและเลือก $u_0 = c_i$ ซึ่ง c_i มาจากเงื่อนไขเริ่มต้น/ขอบ และฟังก์ชัน c_i ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น/ขอบอื่น ๆ ด้วย

1.2 สำหรับกรณี $L^{-1} = L_{xx}^{-1}$ ฉะนั้น $\varphi = h + x\phi = \varphi_0 + \cdots + \varphi_m$ ดังนั้นจะเลือก $u_0 = h$ หรือ $u_0 = x\phi$ หรือ $u_0 = \varphi_k + \varphi_{k+s}$ ซึ่งจะขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้น/ขอบ และ u_0 ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น/ขอบอื่น ๆ ด้วย

2 เมื่อเลือก u_0 สมการจะเขียนในรูป

$$\begin{aligned}
&Lu + Ru + Nu = 0 \\
&u = \varphi - L^{-1}(Ru + Nu) \\
&u_0 = c_i \text{ (or } h) \\
&u_1 = -L^{-1}(Ru_0) - L^{-1}(A_0) \\
&u_{k+1} = -L^{-1}(Ru_k) - L^{-1}(A_k), k \geq 0
\end{aligned}$$

และให้ผลเฉลย $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$

3 ถ้า u ไม่เป็นผลเฉลยแม่นตรง ให้กลับไปที่ข้อ 1. แล้วเลือก u_0 ใหม่

สำหรับงานวิจัยที่ศึกษาการแยกอโดเมียนกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย แสดงให้เห็นว่าวิธีการแยกอโดเมียนยังสามารถใช้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่เป็นเอกพันธ์ สมการ Brusselator และสมการ Bergers ได้

2.3 งานวิจัยที่ศึกษาการปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียนกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

ในการศึกษาปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 2 ที่เป็นเอกฐาน (Singular) และไม่เป็นเอกฐาน (Non-singular) จะพบว่าหากใช้วิธีการแยกอโดเมียนแบบดั้งเดิมในการหาผลเฉลยจะทำให้การคำนวณยุ่งยากและมีความซับซ้อน ดังนั้นจึงได้มีนักวิจัยพยายามที่จะปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียนเพื่อที่จะทำให้การหาผลเฉลยมีความซับซ้อนน้อยลง โดยการปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียนนี้ ได้ทำการเปลี่ยนตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ใหม่สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่เป็นเอกฐานและไม่เป็นเอกฐาน พร้อมทั้งขยายการปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียนไปยังปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง โดยมีนักวิจัยที่ได้ทำการศึกษา ดังนี้

Wazwaz (2002) พิจารณาปัญหาค่าเริ่มต้นที่เป็นเอกฐานในสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 2 เขียนในรูปของ

$$y'' + \frac{2}{x} y' + f(x, y) = g(x)$$
$$y(0) = A, y'(0) = B$$

จากสมการพบว่าเกิดความยุ่งยากหากใช้วิธีการแยกอโดเมียนโดยตรงในการหาผลเฉลยที่จุดเอกฐาน $x = 0$ ดังนั้นจึงได้กำหนดตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ขึ้นมาใหม่ โดยที่

$$L(\cdot) = x^{-2} \frac{d}{dx}\left(x^2 \frac{d}{dx}(\cdot)\right)$$

เพื่อใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นแบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น

Hosseini and Nasabzadeh (2007) แนะนำการปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียนที่มีตัวดำเนินการ $L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx} \frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx} \frac{d}{dx}(\cdot)\right)$ เพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 2 ที่อยู่ในรูป

$$y'' + P(x)y' + F(x, y) = g(x)$$
$$y(0) = A, y'(0) = B$$

และตัวดำเนินการใหม่นี้สามารถนำไปใช้กับสมการเชิงอนุพันธ์ที่เป็นเอกฐานและไม่เป็นเอกฐานได้

Hosseini and Jafari (2009) จะขยายงานของ Hosseini and Nasabzadeh (2007) ซึ่งจะพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสูงและระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น ที่อยู่ในรูป

$$y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} + Ny = g(x)$$
$$y(0) = \alpha_0, y'(0) = \alpha_1, ..., y^{(n-1)}(0) = \alpha_{n-1}$$

เมื่อ N คือ ฟังก์ชันไม่เชิงเส้น และให้ตัวดำเนินการ $L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx} \frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\cdot)\right)$ จากการปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียนนี้ทำให้การคำนวณมีความซับซ้อนน้อยลง

Hasan and Zhu (2009) จะใช้การปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียนหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสูงแบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น ที่ปัญหาค่าขอบเป็นเอกฐาน สมการจะอยู่ในรูป

$$y^{(n+1)} + \frac{m}{x} y^{(n)} + Ny = g(x)$$
$$y(0) = a_0, y'(0) = a_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = a_{n-1}, y(b) = c$$

จะมีตัวดำเนินการ $L(\cdot) = x^{-1} \frac{d^n}{dx^n} x^{1+n-m} \frac{d}{dx} x^{m-n}(\cdot)$ ซึ่งทำให้การคำนวณหาผลเฉลยง่ายขึ้น

Hasan and Zhu (2009) จะขยายงานของ Hasan and Zhu (2009) โดยจะพิจารณาปัญหาค่าขอบที่เป็นเอกฐานของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง ที่อยู่ในรูป

$$y^{(n+1)} + \frac{m}{x} y^{(n)} + Ny = g(x)$$
$$y(0) = a_0, y'(0) = a_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = a_{n-1}, y'(b) = c$$

จากสมการข้างต้นจะพบว่าเงื่อนไขขอบมีอันดับสูงขึ้น ซึ่งการหาผลเฉลยนี้จะใช้การปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียน โดยให้ตัวดำเนิน $L(\cdot) = x^{-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} x^{n-m} \frac{d}{dx} x^{m-n+1} \frac{d}{dx}(\cdot)$ และวิธีนี้สามารถนำไปใช้กับปัญหาที่เป็นเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้นได้

ในงานวิจัยที่ศึกษาการปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียนกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ จะได้ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์สำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่เป็นเอกฐานและไม่เป็นเอกฐาน พร้อมกับเงื่อนไขเริ่มต้น ซึ่งจะมีตัวดำเนินการอยู่ในรูปทั่วไป ดังนี้

$$L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx} \frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\cdot) \right)$$

จากปัญหาค่าขอบจะได้ตัวดำเนินการสำหรับการหาผลเฉลย ดังนี้

$$L(\cdot) = x^{-1} \frac{d^n}{dx^n} x^{1+n-m} \frac{d}{dx} x^{m-n}(\cdot)$$

และปัญหาค่าขอบที่เงื่อนไขขอบมีอันดับสูงจะได้ตัวดำเนินการสำหรับการหาผลเฉลย ดังนี้

$$L(\cdot) = x^{-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} x^{n-m} \frac{d}{dx} x^{m-n+1} \frac{d}{dx}(\cdot)$$

2.4 งานวิจัยที่ศึกษาการประยุกต์วิธีการแยกอโดเมียน

วิธีการแยกอโดเมียนนอกจากจะสามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้แล้ว วิธีนี้ยังสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ ได้อย่างกว้างขวางดังนี้

Wazwaz and El-Sayed (2001) ได้พัฒนาวิธีการแยกอโดเมียนเพื่อหาผลเฉลยของสมการ

$$u = f(x) - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu)$$

โดยคณะวิจัยได้เสนอให้ฟังก์ชัน $f(x)$ เขียนอยู่ในรูปของอนุกรมเทเลอร์ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ ซึ่งการพัฒนาวิธีการแยกนี้สามารถนำไปหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์และสมการเชิงปริพันธ์ที่เป็นเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้นได้

Babolian and Biazar (2002) นำวิธีการแยกอโดเมียนไปประยุกต์กับสมการไม่เชิงเส้นเอกพันธ์ $x = c + F(x)$ เมื่อ $F(x)$ คือ ฟังก์ชันไม่เชิงเส้น และ c คือ ค่าคงที่ เพื่อหาผลเฉลยของสมการนี้ และผลเฉลยที่ได้เป็นการประมาณค่าผลเฉลยวิเคราะห์ (Approximation Analytical Solution)

Babolian, Biazar, and Vahidi (2004) นำวิธีการแยกอโดเมียนไปประยุกต์เพื่อพัฒนาวิธีการคำนวณใหม่สำหรับการแปลงลาปลาซ (Laplace Transforms) และสมการที่พิจารณาเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 1

Babolian, Biazar, and Vahidi (2004) ประยุกต์วิธีการแยกอโดเมียนเพื่อหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้น ที่อยู่ในรูป

$$\begin{cases} f_1(x_{1,} x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ f_2(x_{1,} x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_{1,} x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases}$$

สำหรับ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ เขียนสมการในรูปทั่วไป ดังนี้ $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$
จากนั้นจัดสมการให้อยู่ในรูป x_i จะได้ $x_i = c_i + g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
เมื่อ $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ คือ ฟังก์ชันไม่เชิงเส้น และ c_i คือ ค่าคงที่ จากนั้นใช้วิธีการแยกอโดเมียนหาผลเฉลยของระบบสมการนี้ ซึ่งวิธีนี้เป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพที่ทำให้การคำนวณน้อยลง

Soufyane and Boulmalf (2005) ประยุกต์วิธีการแยกอโดเมียนเพื่อหาผลเฉลยของสมการพาราโบลิกแบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น โดยสมการพาราโบลิกจะอยู่ในรูป

$$u_t = f(x,y,t)u_{xx} + g(x,y,t)u_{yy} + h(x,y,t)N(u)$$

พร้อมด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $u(x,y,0)=u_0$ ซึ่งผลเฉลยที่ได้มีค่าตรงกับผลเฉลยแม่นตรง

Babolian, Vahidi, and Asadi Cordshooli (2005) ใช้วิธีการแยกอโดเมียนหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์จากปัญหาทางด้านวิทยาศาสตร์ ได้แก่ ปัญหาโปรเจกไทล์ ปัญหาการแพร่ของโรคติดต่อ และปัญหาการไหลของน้ำ

Jafari and Daftardar-Gejji (2006b) พิจารณาระบบสมการไม่เชิงเส้น ที่อยู่ในรูปทั่วไป

$$f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$$

จัดรูปสมการจะได้ $$x_i = c_i + N_i(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ i=1,2,\ldots,n$$

เมื่อ $N_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ คือ ฟังก์ชันไม่เชิงเส้น และ c_i คือ ค่าคงที่

จากนั้นจะหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกอโดเมียน จะเรียกวิธีนี้ว่า “ revised ADM” และมีวิธีการหาผลเฉลย ดังนี้

ให้
$$x_{10}(x)=c_i$$
$$x_{1,m+1}(x)=A_{1,m}$$
$$x_{l0}(x)=c_l+N_l^*(x_{10},x_{20},\ldots,x_{l-1,0}),\ l=2,3,\ldots,n$$
$$x_{1,m+1}(x)=A^*_{1,m}$$

เมื่อ N_l^* คือ ส่วนของ N_l ที่เป็นอิสระกับ $x_l,x_{l+1},\ldots,x_n$

เพราะฉะนั้น $N_l(x_1,x_2,\ldots,x_n)=N_l^*(x_{10},x_{20},\ldots,x_{l-1,0})+g_l(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ l=2,3,\ldots,n$

และ $A^*_{l,m}$ สำหรับ $l=2,3,\ldots,n$

จะได้ $$A^*_{l,m}=\begin{cases} A_{l,m+1} & \text{ถ้า } N_l \text{ เป็นอิสระกับ } x_l,x_{l+1},\ldots,x_n \\ {}^1A_{l,m+1}+{}^2A_{l,m} & \text{ถ้า } N_l(x_1,x_2,\ldots,x_n)=N_l^*(x_1,x_2,\ldots,x_{l-1})+g_l(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ A_{l,m} & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

เมื่อ ${}^1A_{l,m+1},{}^2A_{l,m}$ คือ พหุนามอโดเมียน เหมือนกับ N_l^* และ g_l

จากวิธี revised ADM กับ วิธีการแยกอโดเมียน เมื่อเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้ จะพบว่าผลเฉลยที่ได้โดยวิธี revised ADM มีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงมากกว่าวิธีการแยกอโดเมียน

El-Wakil and Abdou (2007) ประยุกต์วิธีการแยกอะโดเมียนบนสมการเชิงฟิสิกส์ไม่เชิงเส้น ซึ่งแบบจำลองทางฟิสิกส์มีความน่าสนใจในการพิจารณาและจะหาผลเฉลยของสมการนี้โดยวิธีการแยกอะโดเมียน และในการคำนวณหาผลเฉลยทำให้ผลเฉลยที่ได้มีความถูกต้อง แม่นยำ

Al-Hayani (2011) ประยุกต์วิธีการแยกอะโดเมียนกับฟังก์ชันของกรีนสำหรับปัญหาค่าขอบอันดับ 6 ที่แบบเชิงเส้นและแบบไม่เป็นเชิงเส้น สำหรับการหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบอันดับสูง โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเป็นอนุพันธ์อันดับคู่ จากการคำนวณผลเฉลยที่ได้แสดงให้เห็นว่าวิธีการแยกอะโดเมียนมีความแม่นยำสูง มีความเหมาะสมและมีประสิทธิภาพ

งานวิจัยที่ศึกษาการประยุกต์วิธีการแยกอะโดเมียน แสดงให้เห็นว่า นอกจากวิธีการแยกอะโดเมียนจะสามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้แล้ว วิธีการแยกอะโดเมียนนี้ยังสามารถนำไปประยุกต์กับสมการ ระบบสมการ การแปลงลาปลาซ และปัญหาทางด้านวิทยาศาสตร์ได้อีกด้วย ซึ่งทำให้การคำนวณน้อยลง และผลเฉลยที่ได้มีความถูกต้อง

2.5 งานวิจัยที่ศึกษาการแปลงธรรมชาติ

การแปลงธรรมชาติ เป็นการแปลงเชิงอินทิกรัลที่มีลักษณะคล้ายกับการแปลงลาปลาซ มีนักวิจัยนำการแปลงธรรมชาติไปใช้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งเป็นอีกวิธีหนึ่งที่มีประสิทธิภาพ และมีนักวิจัยที่ได้ทำการศึกษา ดังนี้

Khan and Khan (2008) พิจารณาทฤษฎีบทพื้นฐานของการแปลงธรรมชาติ พร้อมกับยกตัวอย่างและแสดงตารางการแปลงธรรมชาติ (Natural Transforms) ซึ่งความพิเศษของการแปลงธรรมชาตินี้ คือจะลู่เข้าสู่การแปลงลาปลาซและการแปลงซูมูดู ซึ่งการแปลงธรรมชาติสามารถนำไปประยุกต์กับปัญหาการไหลของของไหลได้

Rawashdeh and Maitama (2014) หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย โดยวิธีการแยกธรรมชาติ (Natural Decomposition Method) ซึ่งจะพิจารณาสมการ 2 สมการ พร้อมกับเงื่อนไขเริ่มต้นที่อยู่ในรูป

$$
\begin{aligned}
v_t - v_{xx} - 2vv_x + (vw)_x &= 0 \\
w_t - w_{xx} - 2ww_x + (vw)_x &= 0
\end{aligned}
$$

เงื่อนไขเริ่มต้น

$$
\begin{aligned}
v(x,0) &= \sin(x) \\
w(x,0) &= \sin(x)
\end{aligned}
$$

และ

$$p_t + v_x w_y - v_y w_x = -p$$
$$v_t + w_x p_y + w_y p_x = v$$
$$w_t + p_x v_y + p_y v_x = w$$

เงื่อนไขเริ่มต้น

$$p(x, y, 0) = e^{x+y}$$
$$v(x, y, 0) = e^{x-y}$$
$$w(x, y, 0) = e^{y-x}$$

จากการหาผลเฉลยของทั้งสองสมการจะพบว่า วิธีการแยกธรรมชาติเป็นวิธีที่สามารถนำไปใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น

Rawashdeh and Maitama (2015) หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบไม่เชิงเส้น โดยวิธีการแยกธรรมชาติ ซึ่งมีพื้นฐานมาจากวิธีการแปลงธรรมชาติและวิธีการแยกอโดเมียน คือ เริ่มต้นจากการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์โดยวิธีการแปลงธรรมชาติ และให้ผลเฉลยอยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ และใช้วิธีการแยกอโดเมียนเพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ดังกล่าว ซึ่งผลเฉลยที่ได้จากวิธีการแยกธรรมชาติมีค่าตรงกับผลเฉลยแบบแม่นตรง

สำหรับงานวิจัยนี้จะนำเสนอการปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียน เพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้นอันดับที่ n โดยมีตัวดำเนินการและตัวดำเนินการผกผัน ตามลำดับ ดังนี้

$$L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx} \frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\cdot)\right)$$

และ

$$L^{-1}(\cdot) = \underbrace{\int_0^x \int_0^x \cdots \int_0^x e^{-\int P(x)dx} \int_0^x e^{\int P(x)dx} (\cdot) dxdx...dxdx}_{n}$$

โดยในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้แนวคิดมาจากงานวิจัยของ Hosseini and Jafari (2009) ซึ่งจะนำตัวดำเนินการดังกล่าวมาใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น (1.7) และ (1.8) ตามลำดับ โดยที่งานวิจัยนี้สนใจสมการเชิงอนุพันธ์ที่ $F\left(x, y, \ldots, y^{(n-2)}\right)$ เป็นฟังก์ชันของ $y^{(n-2)}$ ซึ่งในงานวิจัยของ Hosseini and Jafari (2009) ไม่ได้นำเสนอไว้ และนอกจากนี้จะนำวิธีการแยกอโดเมียนไปทำการพิสูจน์สูตรการแปลงธรรมชาติ

บทที่ 3
วิธีดำเนินการ

สำหรับงานวิจัยในบทนี้จะกล่าวถึงขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์โดยวิธีการแยกอโดเมียนและขั้นตอนการหาตัวดำเนินการเชิงเส้น $(L(\cdot))$ สำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์โดยการปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียน และนำวิธีการแยกอโดเมียนไปทำการพิสูจน์หาสูตรการแปลงธรรมชาติ

3.1 วิธีการแยกอโดเมียน (Adomian Decomposition Method)

วิธีการแยกอโดเมียน ซึ่ง Adomian (1988) เป็นผู้เริ่มต้นวิธีการแยกอโดเมียนเพื่อใช้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น โดยวิธีการแยกอโดเมียนให้ผลเฉลยอยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ และการหาผลเฉลยของวิธีการแยกอโดเมียนมีวิธีดำเนินการ ดังนี้

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับ n ที่เขียนในรูปทั่วไป จะได้

$$\begin{aligned} &y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} + F\left(x, y, ..., y^{(n-2)}\right) = g(x) \\ &y(0) = \alpha_0, y'(0) = \alpha_1, ..., y^{(n-1)}(0) = \alpha_{n-1} \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

เมื่อ $F\left(x, y, \ldots, y^{(n-2)}\right)$ แทน ฟังก์ชันของอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นอันดับที่ $n-2$ และ $P(x) \neq 0$ และ $g(x)$ แทน พจน์แหล่งต้นทาง (Source Term)

จัดรูปสมการ (3.1.1) จะได้

$$y^{(n)} = g(x) - P(x)y^{(n-1)} - F\left(x, y, ..., y^{(n-2)}\right) \tag{3.1.2}$$

นิยามตัวดำเนินการ $L(\cdot)$

เมื่อ $$L(\cdot) = \frac{d^n}{dx^n}(\cdot)$$

จากสมการ (3.1.2) เขียนแทนด้วย

$$L(y(x)) = g(x) - P(x)y^{(n-1)} - F\left(x, y, ..., y^{(n-2)}\right) \tag{3.1.3}$$

จากนั้นจะนำตัวดำเนินการ $L(\cdot)$ ไปหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่อยู่ในรูป $y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} = g(x)$ และ $y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} + F(x, y, ..., y^{(n-2)}) = g(x)$ พร้อมกับเงื่อนไขเริ่มต้น ซึ่งจะนิยามตัวดำเนินการและตัวดำเนินการผกผัน ดังนี้

นิยามตัวดำเนินการ $L(\cdot)=\frac{d^n}{dx^n}(\cdot);\ n=1,2,\ldots$

จะได้ตัวดำเนินการผกผัน $L^{-1}(\cdot)=\underbrace{\int_0^x\int_0^x\cdots\int_0^x(\cdot)dx\ldots dx}_{n}$

โดยที่ $L^{-1}L(y)=y(x)-y(0)-xy'(0)-\frac{x^2}{2!}y''(0)-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}y^{(n-1)}(0);\ n=1,2,\ldots$

__พิสูจน์__ โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

นิยามตัวดำเนินการ $L(\cdot)=\frac{d^n}{dx^n}(\cdot);\ n=1,2,\ldots$

จะได้ตัวดำเนินการผกผัน $L^{-1}(\cdot)=\underbrace{\int_0^x\int_0^x\cdots\int_0^x(\cdot)dx\ldots dx}_{n}$

โดยที่ $L^{-1}L(y)=y(x)-y(0)-xy'(0)-\frac{x^2}{2!}y''(0)-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}y^{(n-1)}(0);\ n=1,2,\ldots$

1) จะพิสูจน์ $P(1)$ เป็นจริง

นิยามตัวดำเนินการ
$$L(\cdot)=\frac{d^1}{dx^1}(\cdot)$$
$$=\frac{d}{dx}(\cdot)$$

จะได้ตัวดำเนินการผกผัน $L^{-1}(\cdot)=\int_0^x(\cdot)dx$

จะได้
$$L^{-1}L(y)=\int_0^x\frac{d}{dx}(y)dx$$
$$L^{-1}L(y)=y(x)-y(0)$$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

2) ให้ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

นิยามตัวดำเนินการ $L(\cdot)=\frac{d^k}{dx^k};\ k=1,2,\ldots$

จะได้ตัวดำเนินการผกผัน $L^{-1}(\cdot)=\underbrace{\int_0^x\int_0^x\cdots\int_0^x(\cdot)dx\ldots dx}_{k}$

โดยที่ $L^{-1}L(y)=y(x)-y(0)-xy'(0)-\frac{x^2}{2!}y''(0)-\cdots-\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}y^{(k-1)}(0);\ k=1,2,\ldots$

จะพิสูจน์ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือ

นิยามตัวดำเนินการ $L(\cdot)=\dfrac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(\cdot)$

จะได้ตัวดำเนินการผกผัน $L^{-1}(\cdot)=\underbrace{\int_0^x\int_0^x\cdots\int_0^x(\cdot)dx\ldots dx}_{k+1}$

โดยที่ $L^{-1}L(y)=y(x)-y(0)-xy'(0)-\dfrac{x^2}{2!}y''(0)-\cdots-\dfrac{x^k}{(k)!}y^{(k)}(0)$

จาก $P(k)$ เป็นจริง จะได้

$$L^{-1}L(y)=y(x)-y(0)-xy'(0)-\frac{x^2}{2!}y''(0)-\cdots-\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}y^{(k-1)}(0)$$

$$\underbrace{\int_0^x\int_0^x\cdots\int_0^x\frac{d^k}{dx^k}(y)dx\ldots dx}_{k}=y(x)-y(0)-xy'(0)-\frac{x^2}{2!}y''(0)-\cdots-\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}y^{(k-1)}(0)$$

เขียนใหม่ จะได้

$$\int_0^x\underbrace{\int_0^x\int_0^x\cdots\int_0^x\frac{d^k}{dx^k}(y')dx\ldots dx}_{k}dx=\int_0^x y'(x)dx-\int_0^x y'(0)dx-\int_0^x x(y')'(0)dx-\int_0^x\frac{x^2}{2!}(y')''(0)dx-\cdots$$

$$-\int_0^x\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}(y')^{(k-1)}(0)dx$$

จัดรูปใหม่ จะได้

$$\underbrace{\int_0^x\int_0^x\int_0^x\cdots\int_0^x\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(y)dx\ldots dxdx}_{k+1}=y(x)-y(0)-xy'(0)-\frac{x^2}{2!}y''(0)-\frac{x^3}{3!}y'''(0)-\cdots-\frac{x^k}{k!}y^{(k)}(0)$$

เพราะฉะนั้น จะได้

ตัวดำเนินการ $L(\cdot)=\dfrac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(\cdot)$

ตัวดำเนินการผกผัน $L^{-1}(\cdot)=\underbrace{\int_0^x\int_0^x\cdots\int_0^x(\cdot)dx\ldots dx}_{k+1}$

โดยที่ $L^{-1}L(y)=y(x)-y(0)-xy'(0)-\dfrac{x^2}{2!}y''(0)-\cdots-\dfrac{x^k}{(k)!}y^{(k)}(0)$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า

นิยามตัวดำเนินการ $L(\cdot)=\dfrac{d^n}{dx^n}$; $n=1,2,\ldots$

จะได้ตัวดำเนินการผกผัน $L^{-1}(\cdot)=\underbrace{\int_0^x\int_0^x\cdots\int_0^x(\cdot)dx\ldots dx}_{n}$

โดยที่ $L^{-1}L(y)=y(x)-y(0)-xy'(0)-\dfrac{x^2}{2!}y''(0)-\cdots-\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}y^{(n-1)}(0)$; $n=1,2,\ldots$ เป็นจริง

$\square$

ต่อไปจะแสดง การหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกอโดเมียน ซึ่งจะแสดงได้ดังนี้
นิยามตัวดำเนินการผกผัน $L^{-1}(\cdot)$ ดังนี้

$$L^{-1}(\cdot)=\underbrace{\int_0^x\int_0^x\ldots\int_0^x(\cdot)dx\ldots dx}_{n}$$

ดังนั้นสมการ (3.1.3) เขียนแทนด้วย

$$L^{-1}(L(y(x)))=L^{-1}(g(x))-L^{-1}\left(P(x)y^{(n-1)}\right)-L^{-1}\left(F\left(x,y,\ldots,y^{(n-2)}\right)\right)$$

$$y(x)=\phi(x)+L^{-1}(g(x))-L^{-1}\left(P(x)y^{(n-1)}\right)-L^{-1}\left(F\left(x,y,\ldots,y^{(n-2)}\right)\right) \qquad (3.1.4)$$

เมื่อ $L(\phi(x))=0$

โดยวิธีการแยกอโดเมียนให้ผลเฉลย $y(x)$ และฟังก์ชันไม่เชิงเส้น $F\left(x,y,\ldots,y^{(n-2)}\right)$ อยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์

$$y(x)=\sum_{i=0}^{\infty}y_i \quad \text{และ} \quad F\left(x,y,\ldots,y^{(n-2)}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}A_i$$

เมื่อ A_i แทน พหุนามอโดเมียน (Adomian Polymials)

โดยที่ $A_i=\dfrac{1}{i!}\left[\dfrac{d^i}{d\lambda^i}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k y_k\right)\right]_{\lambda=0}$; $i=0,1,2,\ldots$

เมื่อ $\lambda=0$

กรณี $i=0$ จะได้

$$\begin{aligned}A_0&=\frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{d\lambda^0}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k y_k\right)\right]_{\lambda=0}\\&=F\left(y_0+\lambda^1y_1+\lambda^2y_2+\cdots\right)_{\lambda=0}\\&=F(y_0)\end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้ $A_0=F(y_0)$

กรณี $i=1$ จะได้ $$A_1 = \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{d\lambda}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k y_k\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{d}{d\lambda}F\left(\lambda^0 y_0 + \lambda^1 y_1 + \lambda^2 y_2 + \cdots\right)_{\lambda=0}$$

$$= \frac{d}{d\lambda}F\left(y_0 + \lambda^1 y_1 + \lambda^2 y_2 + \cdots\right)_{\lambda=0}$$

$$= \left[F'\left(y_0 + \lambda^1 y_1 + \lambda^2 y_2 + \cdots\right)\left(y_1 + 2\lambda y_2 + \cdots\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= F'(y_0)y_1$$

ดังนั้น จะได้ $$A_1 = F'(y_0)y_1$$

กรณี $i=2$ จะได้ $$A_2 = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k y_k\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}F\left(\lambda^0 y_0 + \lambda^1 y_1 + \lambda^2 y_2 + \cdots\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}F\left(u_0 + \lambda^1 y_1 + \lambda^2 y_2 + \cdots\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{2!}\left[\frac{d}{d\lambda}F'\left(y_0 + \lambda^1 y_1 + \lambda^2 y_2 + \cdots\right)\left(y_1 + 2\lambda y_2 + \cdots\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{2!}\left[\begin{array}{l} F'\left(y_0 + \lambda^1 y_1 + \lambda^2 y_2 + \cdots\right)\dfrac{d}{d\lambda}\left(y_1 + 2\lambda y_2 + \cdots\right) \\ +\left(y_1 + 2\lambda y_2 + \cdots\right)\dfrac{d}{d\lambda}F'\left(y_0 + \lambda^1 y_1 + \lambda^2 y_2 + \cdots\right) \end{array}\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{2!}\left[\begin{array}{l} F'\left(y_0 + \lambda^1 y_1 + \lambda^2 y_2 + \cdots\right)\left(2y_2 + \cdots\right) \\ +\left(y_1 + 2\lambda y_2 + \cdots\right)F''\left(y_0 + \lambda^1 y_1 + \lambda^2 y_2 + \cdots\right)\left(y_1 + 2\lambda y_2 + \cdots\right) \end{array}\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{2!}\left[F'(y_0)(2y_2) + y_1 F''(y_0)y_1\right]$$

$$= F'(y_0)y_2 + \frac{1}{2!}F''(y_0)y_1^2$$

ดังนั้น จะได้ $$A_2 = F'(y_0)y_2 + \frac{1}{2!}F''(y_0)y_1^2$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$A_3 = F'(y_0)y_3 + F''(y_0)y_1 y_2 + \frac{1}{3!}F'''(y_0)y_1^3$$

$$\vdots$$

ดังนั้น จากสมการ (3.1.4) จะได้

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i = \phi(x) + L^{-1}(g(x)) - L^{-1}\left(P(x)\sum_{i=0}^{\infty} y_i^{(n-1)}\right) - L^{-1}\left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right)$$

นั่นคือ

$$y_0 + y_1 + \cdots = \phi(x) + L^{-1}(g(x)) - L^{-1}\left(P(x)\left(y_0^{(n-1)} + y_1^{(n-1)} + \cdots\right)\right) - L^{-1}(A_0 + A_1 + \cdots) \quad (3.1.5)$$

จากสมการ (3.1.5) สามารถหา $y_i(x)$ จากความสัมพันธ์เวียนเกิด (Recurrence Relation) ดังนี้

$$\begin{aligned}
y_0 &= \phi(x) + L^{-1}(g(x)) \\
y_0 + y_1 &= \phi(x) + L^{-1}(g(x)) - L^{-1}\left(P(x)\left(y_0^{(n-1)}\right)\right) - L^{-1}(A_0) \\
y_1 &= -L^{-1}\left(P(x)\left(y_0^{(n-1)}\right)\right) - L^{-1}(A_0) \\
y_0 + y_1 + y_2 &= \phi(x) + L^{-1}(g(x)) - L^{-1}\left(P(x)\left(y_0^{(n-1)} + y_1^{(n-1)}\right)\right) - L^{-1}(A_0 + A_1) \\
y_2 &= -L^{-1}\left(P(x)\left(y_1^{(n-1)}\right)\right) - L^{-1}(A_1) \\
&\vdots \\
y_{i+1} &= -L^{-1}\left(P(x)y_i^{(n-1)}\right) - L^{-1}(A_i),\ i \geq 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้ผลเฉลย $y(x) = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots$

□

ลำดับถัดไป จะแสดงตัวอย่างของการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ โดยวิธีการแยกอโดเมียน

ตัวอย่างที่ 3.1.1 แสดงการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 พร้อมเงื่อนไขเริ่มต้น

$$\begin{aligned}
&y'' + P(x)y' + F(x,y) = g(x) \\
&y(0) = 0, y'(0) = 0
\end{aligned} \quad (3.1.6)$$

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ (3.1.6) จัดรูป จะได้

$$\begin{aligned}
&y'' = g(x) - P(x)y' - F(x,y) \\
&y(0) = 0, y'(0) = 0
\end{aligned} \quad (3.1.7)$$

ให้ $L(\cdot) = \dfrac{d^2}{dx^2}(\cdot)$

จากสมการ (3.1.7) จะได้

$$L(y) = g(x) - P(x)y' - F(x,y) \quad (3.1.8)$$

และ $L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x (\cdot)\,dx\,dx$

นำ L^{-1} มาดำเนินการกับสมการ (3.1.8) จะได้

$$L^{-1}(Ly) = L^{-1}(g(x)) - L^{-1}(P(x)y') - L^{-1}(F(x,y))$$

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + L^{-1}(g(x)) - L^{-1}(P(x)y') - L^{-1}(F(x,y)) \quad (3.1.9)$$

โดยวิธีการแยกอโดเมียน ให้ $y(x)=\sum_{i=0}^{\infty} y_i$ และ $F(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty} A_i$

จากสมการ (3.1.9) จะได้

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i = y(0)+xy'(0)+L^{-1}(g(x))-L^{-1}\left(P(x)\sum_{i=0}^{\infty} y_i'\right)-L^{-1}\left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right)$$

เพราะฉะนั้น จะได้

$$y_0 = y(0)+xy'(0)+L^{-1}(g(x))$$
$$y_{i+1} = -L^{-1}(P(x)y_i')-L^{-1}(A_i),\ i\geq 0$$

ดังนั้น จะได้ผลเฉลย $y(x)=y_0+y_1+y_2+\ldots$

$\square$

ตัวอย่างที่ 3.1.2 แสดงการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นเชิงเส้น

$$\begin{aligned} &y''+y'=2x+2 \\ &y(0)=0,\ y'(0)=0 \end{aligned} \qquad (3.1.10)$$

<u>วิธีทำ</u> จัดรูปสมการ (3.1.10) จะได้

$$\begin{aligned} &y''=2x+2-y' \\ &y(0)=0,\ y'(0)=0 \end{aligned} \qquad (3.1.11)$$

ให้ $\quad L(\cdot)=\dfrac{d^2}{dx^2}(\cdot)$

จากสมการที่ (3.1.11) จะได้

$$L(y)=2x+2-y' \qquad (3.1.12)$$

และ $\quad L^{-1}(\cdot)=\int_0^x\int_0^x(\cdot)dxdx$

นำ L^{-1} มาดำเนินการกับสมการ (3.1.12) จะได้

$$L^{-1}Ly=L^{-1}(2x+2)-L^{-1}(y')$$
$$y(x)=y(0)+xy'(0)+L^{-1}(2x+2)-L^{-1}(y') \qquad (3.1.13)$$

โดยวิธีการแยกอโดเมียน ให้ $\quad y(x)=\sum_{i=0}^{\infty} y_i$

จากสมการ (3.1.13) จะได้

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i = y(0)+xy'(0)+L^{-1}(2x+2)-L^{-1}\left(\sum_{i=0}^{\infty} y_i'\right)$$

เพราะฉะนั้น จะได้

$$y_0 = y(0)+xy'(0)+L^{-1}(2x+2)$$
$$y_{i+1} = -L^{-1}(y_i'),\ i\geq 0$$

จากนั้น จะได้

$$y_0 = \frac{1}{3}x^3 + x^2$$

$$y_1 = -\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3$$

$$y_2 = \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{12}x^4$$

$$y_3 = -\frac{1}{360}x^6 - \frac{1}{60}x^5$$

$$y_4 = \frac{1}{2520}x^7 + \frac{1}{360}x^6$$

$$\vdots$$

ดังนั้น จะได้ผลเฉลย

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 + y_1 + y_2 + \cdots \\ &= \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{360}x^6 - \frac{1}{60}x^5 \\ &\quad + \frac{1}{2520}x^7 + \frac{1}{360}x^6 + \cdots \\ y(x) &= x^2 \end{aligned}$$

$\square$

ตัวอย่างที่ 3.1.3 Babolian et al., 2005 แสดงการหาผลเฉลยของปัญหาโปรเจกไทล์

$$mv'(t) = -(F_g + F_r) \tag{3.1.14}$$

กำหนดให้ $m = 0.11kg$, $v(0) = 8m/s$, $F_g = mg$, $F_r = kv^2$, $g = 9.8m/s^2$ และ $k = 0.002kg/m$

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ (3.1.14) แทนค่า F_g และ F_r จะได้

$$mv'(t) = -mg - kv^2(t) \tag{3.1.15}$$

จากสมการ (3.1.15) จะได้ปัญหาค่าเริ่มต้น ดังนี้

$$\begin{aligned} v'(t) &= -g - \frac{kv^2(t)}{m} \\ v(0) &= 8 \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

ให้ $L(\cdot) = \frac{d}{dt}(\cdot)$

จากสมการที่ (3.1.16) จะได้

$$L(v(t)) = -g - \frac{kv^2(t)}{m} \tag{3.1.17}$$

และ $L^{-1}(\cdot)=\int_0^t (\cdot)dx$

นำ L^{-1} มาดำเนินการกับสมการ (3.1.17) จะได้

$$L^{-1}L(v(t))=-L^{-1}(g)-\frac{k}{m}L^{-1}v^2(t)$$

$$v(t)=v(0)-L^{-1}(g)-\frac{k}{m}L^{-1}v^2(t) \tag{3.1.18}$$

โดยวิธีการแยกอโดเมียน ให้ $v(t)=\sum_{i=0}^{\infty}v_i$ และ $v^2(t)=\sum_{i=0}^{\infty}A_i$

จากสมการ (3.1.18) จะได้

$$\sum_{i=0}^{\infty}v_i=v(0)-L^{-1}(g)-\frac{k}{m}L^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}A_i$$

เพราะฉะนั้น จะได้

$$v_0(t)=v(0)-L^{-1}(g)$$

$$v_{i+1}(t)=-\frac{k}{m}L^{-1}(A_i),\ i\geq 0$$

จากนั้น จะได้

$$v_0(t)=8-gt$$

$$v_1(t)=-\frac{k}{m}(8-gt)^2t$$

$$v_2(t)=\frac{2k^2}{m^2}(8-gt)^3t^2$$

$$v_3(t)=\frac{-5k^3}{m^3}(8-gt)^4t^3$$

$$\vdots$$

ดังนั้น จะได้ผลเฉลย

$$\begin{aligned}v(t)&=v_0+v_1+v_2+v_3+\cdots\\&=8-9.8t-0.018181818(8-9.8t)^2t+0.00066115702479(8-9.8t)^3t^2\\&\quad-0.000030052591134485355(8-9.8t)^4t^3+\cdots\end{aligned}$$

$\square$

การหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกอโดเมียนกับการปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียน มีขั้นตอนและวิธีการหาผลเฉลยที่เหมือนกัน จะแตกต่างกันที่ตัวดำเนินการและตัวดำเนินการผกผัน ซึ่งตัวดำเนินการและตัวดำเนินการผกผัน โดยการปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียน สามารถหาได้ดังนี้

3.2 การปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียน (Modification Adomian decomposition – Method)

สำหรับการหาผลเฉลยของวิธีการแยกอโดเมียนแบบดั้งเดิมในสมการเชิงอนุพันธ์อาจจะทำให้การหาผลเฉลยเป็นไปด้วยความยาก ลำบาก ดังนั้นจึงได้มีนักวิจัยได้ทำการปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียนเพื่อที่จะทำให้หาผลเฉลยได้ง่าย โดย Hosseini and Jafari (2009) ได้เสนอตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งมีขั้นตอนในการหาตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ จะแบ่งเป็น 2 กรณี คือ

1 ตัวดำเนินการ L สำหรับสมการ $y^{(n)}+P(x)y^{(n-1)}=g(x)$

2 ตัวดำเนินการ L สำหรับสมการ $y^{(n)}+P(x)y^{(n-1)}+F\left(x,y,\ldots,y^{(n-2)}\right)=g(x)$

สำหรับงานวิจัยนี้ผู้วิจัยต้องการที่จะนำตัวดำเนินการ $L(\cdot)$ ไปหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้นที่อยู่ในรูป $y^{(n)}+P(x)y^{(n-1)}=g(x)$ และ $y^{(n)}+P(x)y^{(n-1)}+F(x,y,...,y^{(n-2)})=g(x)$ ตามลำดับ

นิยามตัวดำเนินการ $$L(\cdot)=e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\cdot)\right);\ n=1,2,\ldots$$

จะได้ตัวดำเนินการผกผัน $$L^{-1}(\cdot)=\underbrace{\int_0^x\int_0^x\cdots\int_0^x e^{-\int P(x)dx}\int_0^x e^{\int P(x)dx}(\cdot)dx\ldots dx}_{n}$$

โดยที่ $$L^{-1}L(y)=y(x)-y(0)-xy'(0)-\frac{x^2}{2!}y''(0)-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}y^{(n-1)}(0);\ n=1,2,\ldots$$

<u>**พิสูจน์**</u> โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

นิยามตัวดำเนินการ $$L(\cdot)=e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\cdot)\right);\ n=1,2,\ldots$$

จะได้ตัวดำเนินการผกผัน $$L^{-1}(\cdot)=\underbrace{\int_0^x\int_0^x\cdots\int_0^x e^{-\int P(x)dx}\int_0^x e^{\int P(x)dx}(\cdot)dx\ldots dx}_{n}$$

โดยที่ $$L^{-1}L(y)=y(x)-y(0)-xy'(0)-\frac{x^2}{2!}y''(0)-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}y^{(n-1)}(0);\ n=1,2,\ldots$$

1) จะพิสูจน์ $P(1)$ เป็นจริง

นิยามตัวดำเนินการ $$L(\cdot)=e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^{1-1}}{dx^{1-1}}(\cdot)\right)$$
$$=e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}(\cdot)\right)$$

จะได้ตัวดำเนินการผกผัน $L^{-1}(\cdot)=e^{-\int P(x)dx}\int_0^x e^{\int P(x)dx}(\cdot)dx$

จะได้ $$L^{-1}L(y)=e^{-\int P(x)dx}\int_0^x e^{\int P(x)dx}\left(e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}y\right)\right)dx$$
$$=e^{-\int P(x)dx}\int_0^\infty \frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}y\right)dx$$
$$=e^{-\int P(x)dx}\left[e^{\int P(x)dx}(y(x)-y(0))\right]$$

$$L^{-1}L(y)=y(x)-y(0)$$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

2) ให้ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

นิยามตัวดำเนินการ $$L(\cdot)=e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(\cdot)\right);\ k=1,2,\ldots$$

จะได้ตัวดำเนินการผกผัน $$L^{-1}(\cdot)=\underbrace{\int_0^x\int_0^x\cdots\int_0^x e^{-\int P(x)dx}\int_0^x e^{\int P(x)dx}(\cdot)dx\ldots dx}_{k}$$

โดยที่ $$L^{-1}L(y)=y(x)-y(0)-xy'(0)-\frac{x^2}{2!}y''(0)-\cdots-\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}y^{(k-1)}(0);\ k=1,2,\ldots$$

จะพิสูจน์ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือ

นิยามตัวดำเนินการ $$L(\cdot)=e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^{k}}{dx^{k}}(\cdot)\right)$$

จะได้ตัวดำเนินการผกผัน $$L^{-1}(\cdot)=\underbrace{\int_0^x\int_0^x\cdots\int_0^x e^{-\int P(x)dx}\int_0^x e^{\int P(x)dx}(\cdot)dx\ldots dx}_{k+1}$$

โดยที่ $$L^{-1}L(y)=y(x)-y(0)-xy'(0)-\frac{x^2}{2!}y''(0)-\cdots-\frac{x^{k}}{(k)!}y^{(k)}(0)$$

จาก $P(k)$ เป็นจริง จะได้

$$L^{-1}L(y)=y(x)-y(0)-xy'(0)-\frac{x^2}{2!}y''(0)-\cdots-\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}y^{(k-1)}(0)$$

$$\underbrace{\int_0^x\int_0^x\cdots\int_0^x e^{-\int P(x)dx}\int_0^x e^{\int P(x)dx}\left(e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}y\right)\right)dx\ldots dx}_{k}=y(x)-\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}y^{(k-1)}(0)$$

เขียนใหม่ จะได้

$$\int_0^x\underbrace{\int_0^x\int_0^x\cdots\int_0^x e^{-\int P(x)dx}\int_0^x e^{\int P(x)dx}\left(e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}y'\right)\right)dx\ldots dx}_{k}dx=\int_0^x y'(x)dx-\int_0^x\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}(y')^{(k-1)}(0)dx$$

จัดรูปใหม่ จะได้

$$\underbrace{\int_0^x\int_0^x\int_0^x\cdots\int_0^x e^{-\int P(x)dx}\int_0^x e^{\int P(x)dx}\left(e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^{k}}{dx^{k}}y\right)\right)dx\ldots dxdx}_{k+1}=y(x)-\frac{x^{k}}{k!}y^{(k)}(0)$$

เพราะฉะนั้น จะได้

ตัวดำเนินการ $$L(\cdot)=e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^{k}}{dx^{k}}(\cdot)\right)$$

ตัวดำเนินการผกผัน $$L^{-1}(\cdot)=\underbrace{\int_0^x\int_0^x\cdots\int_0^x e^{-\int P(x)dx}\int_0^x e^{\int P(x)dx}(\cdot)dx\ldots dx}_{k+1}$$

โดยที่ $L^{-1}L(y)=y(x)-y(0)-xy'(0)-\frac{x^2}{2!}y''(0)-\cdots-\frac{x^{k}}{(k)!}y^{(k)}(0)$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า

นิยามตัวดำเนินการ $$L(\cdot)=e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\cdot)\right);\ n=1,2,\ldots$$

จะได้ตัวดำเนินการผกผัน $$L^{-1}(\cdot)=\underbrace{\int_0^x\int_0^x\cdots\int_0^x e^{-\int P(x)dx}\int_0^x e^{\int P(x)dx}(\cdot)dx\ldots dx}_{n}$$

โดยที่ $L^{-1}L(y)=y(x)-y(0)-xy'(0)-\frac{x^2}{2!}y''(0)-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}y^{(n-1)}(0);\ n=1,2,\ldots$ เป็นจริง

$\square$

ลำดับถัดมา จะเป็นขั้นตอนการหาตัวดำเนิน $L(\cdot)$ สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งจะแสดงในหัวข้อ 3.2.1 และ 3.2.2 ตามลำดับ

3.2.1 ขั้นตอนการหาตัวดำเนินการ L สำหรับสมการ $y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} = g(x)$

3.2.1.1 พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับหนึ่ง ที่เขียนอยู่ในรูป

$$y' + P(x)y = g(x) \tag{3.2.1}$$

นำ $e^{-\int P(x)dx}e^{\int P(x)dx}$ คูณตลอดสมการ (3.2.1) จะได้

$$e^{-\int P(x)dx}e^{\int P(x)dx}y' + e^{-\int P(x)dx}e^{\int P(x)dx}P(x)y = g(x)$$

จัดรูปใหม่เป็น
$$e^{-\int P(x)dx}\left[e^{\int P(x)dx}y' + e^{\int P(x)dx}P(x)y\right] = g(x) \tag{3.2.2}$$

จาก $\dfrac{d}{dx}\int P(x)dx = P(x)$ สมการ (3.2.2) เขียนแทนด้วย

$$e^{-\int P(x)dx}\left[e^{\int P(x)dx}y' + ye^{\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\int P(x)dx\right] = g(x) \tag{3.2.3}$$

จาก $e^{\int P(x)dx}\dfrac{d}{dx}\int P(x)dx = \dfrac{d}{dx}e^{\int P(x)dx}$ สมการ (3.2.3) แทนด้วย

$$e^{-\int P(x)dx}\left[e^{\int P(x)dx}y' + y\frac{d}{dx}e^{\int P(x)dx}\right] = g(x) \tag{3.2.4}$$

จัดรูปสมการ (3.2.4) จะได้

$$e^{-\int P(x)dx}\left[e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}e^{\int P(x)dx}\right] = g(x) \tag{3.2.5}$$

จาก
$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}e^{\int P(x)dx} = \frac{d}{dx}e^{\int P(x)dx}y \tag{3.2.6}$$

นำสมการ (3.2.6) แทนในสมการ (3.2.5) จะได้

$$e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}y\right) = g(x)$$

เพราะฉะนั้น $L(y) = g(x)$

เมื่อ $L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx}\dfrac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}(\cdot)\right)$

(3.2.7)

ดังนั้น ตัวดำเนินการ L สำหรับสมการ $y' + P(x)y = g(x)$ คือ

$$L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}(\cdot)\right)$$

$\blacksquare$

3.2.1.2 พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับสองที่เขียนอยู่ในรูป

$$y'' + P(x)y' = g(x) \tag{3.2.8}$$

นำ $e^{-\int P(x)dx}e^{\int P(x)dx}$ คูณตลอดสมการ (3.2.8) จะได้

$$e^{-\int P(x)dx}e^{\int P(x)dx}y'' + e^{-\int P(x)dx}e^{\int P(x)dx}P(x)y' = g(x)$$

จัดรูปใหม่เป็น

$$e^{-\int P(x)dx}\left[e^{\int P(x)dx}y'' + e^{\int P(x)dx}P(x)y'\right] = g(x) \tag{3.2.9}$$

จาก $\frac{d}{dx}\int P(x)dx = P(x)$ สมการ (3.2.9) เขียนแทนด้วย

$$e^{-\int P(x)dx}\left[e^{\int P(x)dx}y'' + y'e^{\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\int P(x)dx\right] = g(x) \tag{3.2.10}$$

ซึ่ง $e^{\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\int P(x)dx = \frac{d}{dx}e^{\int P(x)dx}$ สมการ (3.2.10) แทนด้วย

$$e^{-\int P(x)dx}\left[e^{\int P(x)dx}y'' + y'\frac{d}{dx}e^{\int P(x)dx}\right] = g(x) \tag{3.2.11}$$

จากสมการ (3.2.11) เขียนใหม่ได้

$$e^{-\int P(x)dx}\left[e^{\int P(x)dx}\frac{dy'}{dx} + y'\frac{d}{dx}e^{\int P(x)dx}\right] = g(x) \tag{3.2.12}$$

จาก

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy'}{dx} + y'\frac{d}{dx}e^{\int P(x)dx} = \frac{d}{dx}e^{\int P(x)dx}y' \tag{3.2.13}$$

นำสมการ (3.2.13) แทนในสมการ (3.2.12) จะได้

$$e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}y'\right) = g(x)$$

หรือ

$$e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx}\right) = g(x)$$

ดังนั้น

$$L(y) = g(x)$$

เมื่อ

$$L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d}{dx}(\cdot)\right) \tag{3.2.14}$$

ดังนั้น ตัวดำเนินการ L สำหรับสมการ $y'' + P(x)y' = g(x)$ คือ

$$L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d}{dx}(\cdot)\right)$$

$\square$

3.2.1.3 พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับสามที่เขียนอยู่ในรูป

$$y''' + P(x)y'' = g(x) \tag{3.2.15}$$

นำ $e^{-\int P(x)dx}e^{\int P(x)dx}$ คูณตลอดสมการ (3.2.15) จะได้

$$e^{-\int P(x)dx}e^{\int P(x)dx}y''' + e^{-\int P(x)dx}e^{\int P(x)dx}P(x)y'' = g(x)$$

จัดรูปใหม่เป็น

$$e^{-\int P(x)dx}\left[e^{\int P(x)dx}y''' + e^{\int P(x)dx}P(x)y''\right] = g(x) \tag{3.2.16}$$

จาก $\frac{d}{dx}\int P(x)dx = P(x)$ สมการ (3.2.16) เขียนแทนด้วย

$$e^{-\int P(x)dx}\left[e^{\int P(x)dx}y''' + y''e^{\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\int P(x)dx\right] = g(x) \tag{3.2.17}$$

เนื่องจาก $e^{\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\int P(x)dx = \frac{d}{dx}e^{\int P(x)dx}$ สมการ (3.2.17) แทนด้วย

$$e^{-\int P(x)dx}\left[e^{\int P(x)dx}y''' + y''\frac{d}{dx}e^{\int P(x)dx}\right] = g(x) \tag{3.2.18}$$

จัดรูปสมการ (3.2.18) จะได้

$$e^{-\int P(x)dx}\left[e^{\int P(x)dx}\frac{dy''}{dx} + y''\frac{d}{dx}e^{\int P(x)dx}\right] = g(x) \tag{3.2.19}$$

ซึ่ง

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy''}{dx} + y''\frac{d}{dx}e^{\int P(x)dx} = \frac{d}{dx}e^{\int P(x)dx}y'' \tag{3.2.20}$$

นำสมการ (3.2.20) แทนในสมการ (3.2.19) จะได้

$$e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}y''\right) = g(x)$$

หรือ

$$e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^2y}{dx^2}\right) = g(x)$$

เพราะฉะนั้น จะได้ $L(y) = g(x)$

เมื่อ

$$L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^2}{dx^2}(\cdot)\right) \tag{3.2.21}$$

ดังนั้น ตัวดำเนินการ L สำหรับสมการ $y''' + P(x)y'' = g(x)$ คือ

$$L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^2}{dx^2}(\cdot)\right)$$

□

3.2.1.4 พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับ n

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ n ; $y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} = g(x)$

จะมีตัวดำเนินการเป็น $L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx}\dfrac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\cdot)\right),\ n = 1,2,\ldots$

จะได้ $L(y) = g(x)$

<u>พิสูจน์</u> โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ n ; $y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} = g(x)$

จะมีตัวดำเนินการเป็น $L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx}\dfrac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\cdot)\right), n = 1,2,\ldots$

1) จะพิสูจน์ $P(1)$ เป็นจริง

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 ; $y' + P(x)y = g(x)$

จะมีตัวดำเนินการเป็น
$$L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^{1-1}}{dx^{1-1}}(\cdot)\right)$$
$$= e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}(\cdot)\right)$$

ซึ่งเป็นจริง จากการพิสูจน์ในหัวข้อ 3.2.1.1 หน้า 24-25

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

2) ให้ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ k ; $y^{(k)} + P(x)y^{(k-1)} = g(x)$

จะมีตัวดำเนินการเป็น $L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx}\dfrac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\dfrac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(\cdot)\right),\ k = 1,2,\ldots$

จะพิสูจน์ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

นั่นคือ
$$y^{(k+1)} + P(x)y^{(k)} = g(x)$$
$$L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^{k}}{dx^{k}}(\cdot)\right)$$

จาก $P(k)$ เป็นจริง จะได้

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ k ; $y^{(k)} + P(x)y^{(k-1)} = g(x)$ (3.2.22)
$$e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}y\right) = g(x)$$

จากสมการ (3.2.22) เขียนในรูป y' ได้ดังนี้

$$(y')^{(k)} + P(x)(y')^{(k-1)} = g(x)$$

$$e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}y'\right) = g(x)$$

เพราะฉะนั้น จะได้

$$y^{(k+1)} + P(x)y^{(k)} = g(x)$$

$$e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^{k}}{dx^{k}}y\right) = g(x)$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น จากสมการ $y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} = g(x)$

จะได้ $L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\cdot)\right)$, $n = 1, 2, \ldots$ เป็นจริง

$\square$

3.2.2 ขั้นตอนการหาตัวดำเนินการ L ของ $y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} + F\left(x,\ldots,y^{(n-2)}\right) = g(x)$

3.2.2.1 พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับสองที่เขียนอยู่ในรูป

$$y'' + P(x)y' + F(x,y) = g(x)$$

จัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$y'' + P(x)y' = g(x) - F(x,y) \tag{3.2.23}$$

นำ $e^{-\int P(x)dx}e^{\int P(x)dx}$ คูณตลอดสมการ (3.2.23) จะได้

$$e^{-\int P(x)dx}e^{\int P(x)dx}y'' + e^{-\int P(x)dx}e^{\int P(x)dx}P(x)y' = g(x) - F(x,y)$$

$$e^{-\int P(x)dx}\left[e^{\int P(x)dx}y'' + e^{\int P(x)dx}P(x)y'\right] = g(x) - F(x,y) \tag{3.2.24}$$

จาก $\frac{d}{dx}\int P(x)dx = P(x)$ สมการ (3.2.24) เขียนแทนด้วย

$$e^{-\int P(x)dx}\left[e^{\int P(x)dx}y'' + y'e^{\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\int P(x)dx\right] = g(x) - F(x,y) \tag{3.2.25}$$

จาก $e^{\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\int P(x)dx = \frac{d}{dx}e^{\int P(x)dx}$ สมการ (3.2.25) แทนด้วย

$$e^{-\int P(x)dx}\left[e^{\int P(x)dx}y'' + y'\frac{d}{dx}e^{\int P(x)dx}\right] = g(x) - F(x,y)$$

หรือ

$$e^{-\int P(x)dx}\left[e^{\int P(x)dx}\frac{dy'}{dx} + y'\frac{d}{dx}e^{\int P(x)dx}\right] = g(x) - F(x,y) \tag{3.2.26}$$

จะเห็นว่า

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy'}{dx} + y'\frac{d}{dx}e^{\int P(x)dx} = \frac{d}{dx}e^{\int P(x)dx}y' \tag{3.2.27}$$

นำสมการ (3.2.27) แทนในสมการ (3.2.26) จะได้

$$e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}y'\right) = g(x)-F(x,y)$$

หรือ $$e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx}\right) = g(x)-F(x,y)$$

ดังนั้น $$L(y)=g(x)-F(x,y)$$

เมื่อ $$L(\cdot)=e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d}{dx}(\cdot)\right) \qquad (3.2.28)$$

ดังนั้น ตัวดำเนินการ L สำหรับสมการ $y''+P(x)y'+F(x,y)=g(x)-F(x,y)$ คือ

$$L(\cdot)=e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d}{dx}(\cdot)\right)$$

$\square$

3.2.2.2 พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับสามที่เขียนอยู่ในรูป

$$y'''+P(x)y''+F(x,y,y')=g(x)$$

จัดรูปใหม่ จะได้

$$y'''+P(x)y''=g(x)-F(x,y,y') \qquad (3.2.29)$$

นำ $e^{-\int P(x)dx}e^{\int P(x)dx}$ คูณตลอดสมการ (3.2.29) จะได้

$$e^{-\int P(x)dx}e^{\int P(x)dx}y'''+e^{-\int P(x)dx}e^{\int P(x)dx}P(x)y'' = g(x)-F(x,y,y')$$

$$e^{-\int P(x)dx}\left[e^{\int P(x)dx}y'''+e^{\int P(x)dx}P(x)y''\right] = g(x)-F(x,y,y') \qquad (3.2.30)$$

จาก $\frac{d}{dx}\int P(x)dx=P(x)$ สมการ (3.2.30) เขียนแทนด้วย

$$e^{-\int P(x)dx}\left[e^{\int P(x)dx}y'''+y''e^{\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\int P(x)dx\right] = g(x)-F(x,y,y') \qquad (3.2.31)$$

ซึ่ง $e^{\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\int P(x)dx=\frac{d}{dx}e^{\int P(x)dx}$ สมการ (3.2.31) แทนด้วย

$$e^{-\int P(x)dx}\left[e^{\int P(x)dx}y'''+y''\frac{d}{dx}e^{\int P(x)dx}\right] = g(x)-F(x,y,y')$$

หรือ $$e^{-\int P(x)dx}\left[e^{\int P(x)dx}\frac{dy''}{dx}+y''\frac{d}{dx}e^{\int P(x)dx}\right] = g(x)-F(x,y,y') \qquad (3.2.32)$$

และจาก $$e^{\int P(x)dx}\frac{dy''}{dx}+y''\frac{d}{dx}e^{\int P(x)dx}=\frac{d}{dx}e^{\int P(x)dx}y'' \qquad (3.2.33)$$

นำสมการ (3.2.33) แทนใน (3.2.32) จะได้

$$e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}y''\right) = g(x)-F(x,y,y')$$

หรือ $$e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^2y}{dx^2}\right) = g(x)-F(x,y,y')$$

ดังนั้น $L(y)=g(x)-F(x,y,y')$

เมื่อ $$L(\cdot)=e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^2}{dx^2}(\cdot)\right) \tag{3.2.34}$$

ดังนั้น ตัวดำเนินการ L สำหรับสมการ $y'''+P(x)y''+F(x,y,y')=g(x)-F(x,y,y')$ คือ

$$L(\cdot)=e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^2}{dx^2}(\cdot)\right)$$

□

3.2.2.3 พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับ n

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ n ; $y^{(n)}+P(x)y^{(n-1)}=g(x)-F\left(x,y,\ldots,y^{(n-2)}\right)$

จะมีตัวดำเนินการเป็น $L(\cdot)=e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\cdot)\right),\ n=1,2,\ldots$

จะได้ $L(y)=g(x)-F\left(x,y,\ldots,y^{(n-2)}\right)$

<u>**พิสูจน์**</u> โดยอุปนัยคณิตศาสตร์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ n ; $y^{(n)}+P(x)y^{(n-1)}=g(x)-F\left(x,y,\ldots,y^{(n-2)}\right)$

จะมีตัวดำเนินการเป็น $L(\cdot)=e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\cdot)\right),n=1,2,\ldots$

1) จะพิสูจน์ $P(1)$ เป็นจริง

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 ; $y'+P(x)y=g(x)$

จะมีตัวดำเนินการเป็น
$$L(\cdot)=e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^{1-1}}{dx^{1-1}}(\cdot)\right)$$
$$=e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}(\cdot)\right)$$

ซึ่งเป็นจริง จากการพิสูจน์ในหน้า 23

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

2) ให้ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ k ; $y^{(k)}+P(x)y^{(k-1)}=g(x)-F\left(x,y,\ldots,y^{(k-2)}\right)$

จะมีตัวดำเนินการเป็น $L(\cdot)=e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(\cdot)\right),\ k=1,2,\ldots$

จะพิสูจน์ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

นั่นคือ
$$y^{(k+1)} + P(x)y^{(k)} = g(x) - F\left(x, y, \ldots, y^{(k-1)}\right)$$
$$L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx} \frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx} \frac{d^k}{dx^k}(\cdot)\right)$$

จาก $P(k)$ เป็นจริง จะได้

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ k ;
$$y^{(k)} + P(x)y^{(k-1)} = g(x) - F\left(x, y, \ldots, y^{(k-2)}\right) \tag{3.2.35}$$
$$e^{-\int P(x)dx} \frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} y\right) = g(x) - F\left(x, y, \ldots, y^{(k-2)}\right)$$

จากสมการ (3.2.35) จัดให้อยู่ในรูป y' จะได้
$$(y')^{(k)} + P(x)(y')^{(k-1)} = g(x) - F\left(x, y, \ldots, (y')^{(k-2)}\right)$$
$$e^{-\int P(x)dx} \frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} y'\right) = g(x) - F\left(x, y, \ldots, y^{(k-1)}\right)$$

เพราะฉะนั้น จะได้
$$y^{(k+1)} + P(x)y^{(k)} = g(x) - F\left(x, y, \ldots, y^{(k-1)}\right)$$
$$e^{-\int P(x)dx} \frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx} \frac{d^k}{dx^k} y\right) = g(x) - F\left(x, y, \ldots, y^{(k-1)}\right)$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น จากสมการ $y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} = g(x) - F\left(x, y, \ldots, y^{(n-2)}\right)$

จะได้ $L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx} \frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\cdot)\right),\ n = 1,2,\ldots$ เป็นจริง

$\square$

สำหรับงานวิจัยนี้ จะนำตัวดำเนินการ $L(\cdot)$ ที่ได้ไปหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งจะได้ตัวดำเนินการ $L(\cdot)$ ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 2 สรุปตัวดำเนินการ $L(\cdot)$ สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น

สมการเชิงอนุพันธ์	ตัวดำเนินการ $L(\cdot)$
$y' + P(x)y = g(x)$	$L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx} \dfrac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}(\cdot)\right)$
$y'' + P(x)y' = g(x)$	$L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx} \dfrac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx} \dfrac{d}{dx}(\cdot)\right)$
$y''' + P(x)y'' = g(x)$	$L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx} \dfrac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx} \dfrac{d^2}{dx^2}(\cdot)\right)$
$y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} = g(x)$	$L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx} \dfrac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx} \dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\cdot)\right),$ $n = 1,2,\ldots$
$y'' + P(x)y' + F(x,y) = g(x)$	$L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx} \dfrac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx} \dfrac{d}{dx}(\cdot)\right)$
$y''' + P(x)y'' + F(x,y,y') = g(x)$	$L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx} \dfrac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx} \dfrac{d^2}{dx^2}(\cdot)\right)$
$y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} + F(x,y,\ldots,y^{(n-2)}) = g(x)$	$L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx} \dfrac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx} \dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\cdot)\right),$ $n = 1,2,\ldots$

ลำดับถัดไป จะเป็นขั้นตอนวิธีการดำเนินการหาสูตรการแปลงธรรมชาติ โดยวิธีการแยกอโดเมียน ซึ่งมีวิธีดำเนินการ ดังนี้

3.3 วิธีการแปลงธรรมชาติ โดยวิธีการแยกอโดเมียน

ในงานวิจัยนี้จะนำวิธีการแยกอโดเมียนไปประยุกต์กับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 เพื่อหาสูตรการแปลงธรรมชาติ ซึ่งมีขั้นตอนวิธีดำเนินการ ดังนี้

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt}+P(t)y=Q(ut) \\ &y(0)=0 \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

จากสมการ (3.3.2) ให้ตัวดำเนินการ $L=\frac{d}{dt}$ จะได้

$$\begin{aligned} &L(y)+P(t)y=Q(ut) \\ &y(0)=0 \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

จัดรูปสมการ (3.3.11) จะได้

$$y=\frac{Q(ut)}{P(t)}-\frac{1}{P(t)}L(y) \tag{3.3.12}$$

โดยวิธีการแยกอโดเมียน ให้ $y(t)=\sum_{i=0}^{\infty} y_i$

นำ $f(t)$ คูณตลอดสมการ (3.3.2) จะได้

$$f(t)\frac{dy}{dt}+f(t)P(t)y=f(t)Q(ut) \tag{3.3.3}$$

พิจารณาพจน์ทางซ้ายมือของสมการ (3.3.3) จะพบว่า

$$f(t)\frac{dy}{dt}+f(t)P(t)y=\frac{d}{dt}\big(f(t)y\big) \tag{3.3.4}$$

เมื่อ $f(t)=e^{\int P(t)dt}$

นำ $\frac{d}{dt}\big(f(t)y\big)$ แทนในสมการ (3.3.3) จะได้

$$\frac{d}{dt}\big(f(t)y\big)=f(t)Q(ut) \tag{3.3.5}$$

อินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ (3.3.5) จะได้

$$\int\frac{d}{dt}\big(f(t)y\big)dt=\int f(t)Q(ut)dt \tag{3.3.6}$$

จากสมการ (3.3.6) จะได้

$$y(t)f(t)=\int f(t)Q(ut)dt \tag{3.3.7}$$

นำ $f(t) = e^{\int P(t)dt}$ แทนในสมการ (3.3.7) จะได้

$$y(t)e^{\int P(t)dt} = \int e^{\int P(t)dt} Q(ut)dt \tag{3.3.8}$$

ให้ $P(t) = -s$, $s > 0$ จากสมการ (3.3.8) จะได้

$$y(t)e^{-st} = \int e^{-st} Q(ut)dt \tag{3.3.9}$$

โดยวิธีการแยกอโดเมียน ให้ $y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i$

จากสมการ (3.3.1) และ (3.3.9) จะได้

$$N[Q(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} Q(ut)dt = \lim_{x\to\infty}\left(e^{-st} \sum_{i=0}^{\infty} y_i \right)\Bigg|_0^x \tag{3.3.10}$$

จากสมการ (3.3.2) ให้ตัวดำเนินการ $L = \frac{d}{dt}$ จะได้

$$\begin{aligned} &L(y) + P(t)y = Q(ut) \\ &y(0) = 0 \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

จัดรูปสมการ (3.3.11) จะได้

$$y = \frac{Q(ut)}{P(t)} - \frac{1}{P(t)} L(y) \tag{3.3.12}$$

โดยวิธีการแยกอโดเมียน ให้ $y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i$

จากสมการ (3.3.12) จะได้

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i = \frac{Q(ut)}{P(t)} - \frac{1}{P(t)} L\left(\sum_{i=0}^{\infty} y_i \right) \tag{3.3.13}$$

จาสมการ (3.3.13) จะได้

$$y_0 + y_1 + y_2 + \ldots = \frac{Q(ut)}{P(t)} - \frac{1}{P(t)} L(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots)$$

จัดรูปใหม่ จะได้

$$y_0 + y_1 + y_2 + \ldots = \frac{Q(ut)}{P(t)} - \frac{1}{P(t)} L(y_0) - \frac{1}{P(t)} L(y_1) - \frac{1}{P(t)} L(y_2) - \ldots$$

เพราะฉะนั้น

$$y_0 = \frac{Q(ut)}{P(t)}$$

$$y_1 = -\frac{1}{P(t)} L(y_0) = -\frac{1}{P} L\left(\frac{Q(ut)}{P(t)} \right)$$

$$y_2 = -\frac{1}{P(t)}L(y_1) = -\frac{1}{P(t)}L\left(-\frac{1}{P(t)}L\left(\frac{Q(ut)}{P(t)}\right)\right) = (-1)^2\frac{1}{P^2(t)}L^2\left(\frac{Q(ut)}{P(t)}\right)$$

$$\vdots$$

$$y_i = (-1)^i\frac{1}{P^i(t)}L^i\left(\frac{Q(ut)}{P(t)}\right)$$

โดยที่ $L^i = \frac{d^i}{dt^i};\ i \geq 0$

จากนั้นเราจะหาสูตรการแปลงธรรมชาติ โดยวิธีการแยกอโดเมียน ซึ่งสมการที่ได้จะอยู่ในรูป

$$N[Q(t)] = \int_0^\infty e^{-st}Q(ut)dt = \lim_{x\to\infty}\left(e^{-st}\sum_{i=0}^{\infty}y_i\right)\Bigg|_0^x$$

โดยรายละเอียดและการหาสูตรการแปลงธรรมชาติ จะแสดงในบทที่ 4

บทที่ 4
ผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้จะทำกาหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้นที่อยู่ในรูป $y^{(n)}+P(x)y^{(n-1)}=g(x)$ และ $y^{(n)}+P(x)y^{(n-1)}+F(x,y,...,y^{(n-2)})=g(x)$ พร้อมเงื่อนไขเริ่มต้น ที่มีตัวดำเนินการ $L(\cdot)$ อยู่ในรูปทั่วไป ดังนี้ $L(\cdot)=e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\right)$, $n=1,2,\ldots$ ซึ่งจะแสดงในหัวข้อ 4.1, 4.2 ตามลำดับ จะนำเสนอการหาผลเฉลยโดยวิธีดังกล่าวโดยใช้ตัวอย่าง ซึ่งตัวอย่างที่นำเสนอในงานวิจัยนี้จะนำเสนอจากสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 ไปยังอันดับสูง และนำเสนอจากสมการเชิงอนุพันธ์ที่เป็นเชิงเส้นไปยังไม่เชิงเส้น และหาสูตรการแปลงธรรมชาติ โดยวิธีการแยกอโดเมียน โดยจะแสดงไว้ในหัวข้อ 4.3

4.1 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป $y^{(n)}+P(x)y^{(n-1)}=g(x)$

ตัวอย่างที่ 4.1.1 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น พร้อมเงื่อนไขเริ่มต้น

$$\begin{aligned} &y'+2y=2x+1 \\ &y(0)=0 \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $n=1$ และ $P(x)=2$ จะได้

$$\begin{aligned} &e^{-\int P(x)dx}=e^{-\int 2dx}=e^{-2x} \\ &e^{\int P(x)dx}=e^{\int 2dx}=e^{2x} \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

เพราะฉะนั้น จะได้ตัวดำเนินการ $L(\cdot)$ และ $L^{-1}(\cdot)$ ดังนี้

$$\begin{aligned} &L(\cdot)=e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}(\cdot)\right) \\ &L(\cdot)=e^{-2x}\frac{d}{dx}\left(e^{2x}(\cdot)\right) \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

และ

$$\begin{aligned} &L^{-1}(\cdot)=e^{-\int P(x)dx}\int_0^x e^{\int P(x)dx}(\cdot)dx \\ &L^{-1}(\cdot)=e^{-2x}\int_0^x e^{2x}(\cdot)dx \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

จากสมการ (4.1.1) จะได้

$$L^{-1}L(y) = L^{-1}(2x+1)$$
$$y(x) = y(0) + L^{-1}(2x+1)$$
$$y(x) = L^{-1}(2x+1) \qquad (4.1.5)$$

โดยวิธีการแยกอโดเมียน ให้ $y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i$

จากสมการ (4.1.5) จะได้

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i = L^{-1}(2x+1)$$
$$y_0 + y_1 + y_2 + \cdots = L^{-1}(2x+1) \qquad (4.1.6)$$

จากสมการ (4.1.6) สามารถหา $y_0, y_1, y_2, \ldots$ ดังนี้

หา y_0;
$$y_0 = L^{-1}(2x+1)$$
$$= e^{-2x}\int_0^x e^{2x}(2x+1)dx$$
$$= x$$

หา y_1;
$$y_0 + y_1 = L^{-1}(2x+1)$$
$$y_1 = 0$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $y_2 = y_3 = \cdots = 0$

ดังนั้น ผลเฉลย $y(x) = y_0 + y_1 + y_2 + \cdots$

$$= x$$

$\square$

ตัวอย่างที่ 4.1.2 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น พร้อมเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y'' + 2xy' = xe^{-x^2}$$
$$y(0) = 1, y'(0) = 1 \qquad (4.1.7)$$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $n = 2$ และ $P(x) = 2x$ จะได้

$$e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int 2xdx} = e^{-x^2}$$
$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int 2xdx} = e^{x^2} \qquad (4.1.8)$$

เพราะฉะนั้น จะได้ตัวดำเนินการ $L(\cdot)$ และ $L^{-1}(\cdot)$ ดังนี้

$$L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d}{dx}(\cdot)\right)$$
$$L(\cdot) = e^{-x^2}\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\frac{d}{dx}(\cdot)\right) \qquad (4.1.9)$$

และ

$$L^{-1}(\cdot)=\int_0^x e^{-\int P(x)dx}\int_0^x e^{\int P(x)dx}(\cdot)dxdx$$
$$L^{-1}(\cdot)=\int_0^x e^{-x^2}\int_0^x e^{x^2}(\cdot)dxdx \tag{4.1.10}$$

จากสมการ (4.1.7) จะได้

$$L^{-1}L(y)=L^{-1}\left(xe^{-x^2}\right)$$
$$y(x)=y(0)+xy'(0)+L^{-1}\left(xe^{-x^2}\right)$$
$$y(x)=1+x+L^{-1}\left(xe^{-x^2}\right) \tag{4.1.11}$$

โดยวิธีการแยกอโดเมียน ให้ $y=\sum_{i=0}^{\infty}y_i$

จากสมการ (4.1.11) จะได้

$$\sum_{i=0}^{\infty}y_i=1+x+L^{-1}\left(xe^{-x^2}\right)$$
$$y_0+y_1+y_2+\cdots=1+x+L^{-1}\left(xe^{-x^2}\right) \tag{4.1.12}$$

จากสมการ (4.1.12) สามารถหา $y_0,y_1,y_2,\ldots$ ดังนี้

หา y_0;
$$\begin{aligned}y_0&=1+x+L^{-1}\left(xe^{-x^2}\right)\\&=1+x+\int_0^x e^{-x^2}\int_0^x e^{x^2}\left(xe^{-x^2}\right)dxdx\\&=1+x+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{10}x^5+\frac{1}{28}x^7-\frac{1}{108}x^9+\cdots\end{aligned}$$

หา y_1;
$$y_0+y_1=1+x+L^{-1}\left(xe^{-x^2}\right)$$
$$y_1=0$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $y_2=y_3=\cdots=0$

ดังนั้น ผลเฉลย $y(x)=y_0+y_1+y_2+\cdots$
$$=1+x+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{10}x^5+\frac{1}{28}x^7-\frac{1}{108}x^9+\cdots$$

$\square$

ตัวอย่างที่ 4.1.3 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น พร้อมเงื่อนไขเริ่มต้น

$$\begin{aligned} &y''' - y'' = (2+x)e^{2x} \\ &y(0) = y'(0) = y'' = 1 \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

วิธีทำ เนื่องจาก $n = 3$ และ $P(x) = -1$ จะได้

$$\begin{aligned} &e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int(-1)dx} = e^{x} \\ &e^{\int P(x)dx} = e^{\int(-1)dx} = e^{-x} \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

เพราะฉะนั้น จะได้ตัวดำเนินการ $L(\cdot)$ และ $L^{-1}(\cdot)$ ดังนี้

$$\begin{aligned} &L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^2}{dx^2}(\cdot)\right) \\ &L(\cdot) = e^{x}\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\frac{d^2}{dx^2}(\cdot)\right) \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

และ

$$\begin{aligned} &L^{-1}(\cdot) = \int_0^x\int_0^x e^{-\int P(x)dx}\int_0^x e^{\int P(x)dx}(\cdot)dxdxdx \\ &L^{-1}(\cdot) = \int_0^x\int_0^x e^{x}\int_0^x e^{-x}(\cdot)dxdxdx \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

จากสมการ (4.1.13) จะได้

$$L^{-1}L(y) = L^{-1}(2+x)e^{2x}$$

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2}y''(0) + L^{-1}(2+x)e^{2x}$$

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + L^{-1}(2+x)e^{2x} \tag{4.1.17}$$

โดยวิธีการแยกอโดเมียน ให้ $y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i$

จากสมการ (4.1.17) จะได้

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i = 1 + x + \frac{x^2}{2} + L^{-1}(2+x)e^{2x}$$

$$y_0 + y_1 + y_2 + \cdots = 1 + x + \frac{x^2}{2} + L^{-1}(2+x)e^{2x} \tag{4.1.18}$$

จากสมการ (4.1.18) สามารถหา $y_0, y_1, y_2, \ldots$ ดังนี้

หา y_0;

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + L^{-1}(2+x)e^{2x} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x\int_0^x e^{x}\int_0^x e^{-x}(2+x)e^{2x}dxdxdx \end{aligned}$$

$$y_0 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{24}x^4 + \frac{19}{120}x^5 + \frac{47}{720}x^6 + \frac{37}{1680}x^7 + \frac{17}{2688}x^8 + \frac{115}{72576}x^9 + \cdots$$

หา y_1; $\quad y_0 + y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + L^{-1}(2+x)e^{2x}$

$$y_1 = 0$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $y_2 = y_3 = \cdots = 0$

ดังนั้น ผลเฉลย $y(x) = y_0 + y_1 + y_2 + \cdots$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{24}x^4 + \frac{19}{120}x^5 + \frac{47}{720}x^6 + \frac{37}{1680}x^7 + \frac{17}{2688}x^8 + \frac{115}{72576}x^9 + \cdots$$

$\square$

ตัวอย่างที่ 4.1.4 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น พร้อมเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y^{(4)} + (\tan x)y''' = \sin x \cos x$$
$$y(0) = 1,\ y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0 \qquad (4.1.19)$$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $n = 4$ และ $P(x) = \tan x$ จะได้

$$e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int \tan x dx} = \cos x$$
$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int \tan x dx} = \frac{1}{\cos x} \qquad (4.1.20)$$

เพราะฉะนั้น จะได้ตัวดำเนินการ $L(\cdot)$ และ $L^{-1}(\cdot)$ ดังนี้

$$L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^3}{dx^3}(\cdot)\right)$$
$$L(\cdot) = \cos x \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\frac{d^3}{dx^3}(\cdot)\right) \qquad (4.1.21)$$

และ

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x\int_0^x\int_0^x e^{-\int P(x)dx}\int_0^x e^{\int P(x)dx}(\cdot)dxdxdxdx$$
$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x\int_0^x\int_0^x \cos x \int_0^x \frac{1}{\cos x}(\cdot)dxdxdxdx \qquad (4.1.22)$$

จากสมการ (4.1.19) จะได้

$$L^{-1}L(y)=L^{-1}(\sin x\cos x)$$

$$y(x)=y(0)+xy'(0)+\frac{x^2}{2}y''(0)+\frac{x^3}{6}y'''(0)+L^{-1}(\sin x\cos x)$$

$$y(x)=1+L^{-1}(\sin x\cos x) \tag{4.1.23}$$

โดยวิธีการแยกอโดเมียน ให้ $y=\sum_{i=0}^{\infty}y_i$

จากสมการ (4.1.23) จะได้

$$\sum_{i=0}^{\infty}y_i=1+L^{-1}(\sin x\cos x)$$

$$y_0+y_1+y_2+\cdots=1+L^{-1}(\sin x\cos x) \tag{4.1.24}$$

จากสมการ (4.1.24) สามารถหา $y_0, y_1, y_2, \ldots$ ดังนี้

หา y_0;

$$\begin{aligned} y_0 &= 1+L^{-1}(\sin x\cos x) \\ &= 1+\int_0^x\int_0^x\int_0^x \cos x\int_0^x \frac{1}{\cos x}(\sin x\cos x)dxdxdxdx \\ &= 1-\frac{x^3}{12}+\frac{1}{16}\sin 2x-\sin x+\frac{7}{8}x \end{aligned}$$

หา y_1;

$$y_0+y_1=1+L^{-1}(\sin x\cos x)$$

$$y_1=0$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $y_2=y_3=\cdots=0$

ดังนั้น ผลเฉลย $y(x)=y_0+y_1+y_2+\cdots$

$$=1-\frac{x^3}{12}+\frac{1}{16}\sin 2x-\sin x+\frac{7}{8}x$$

$\square$

จากนั้นก็จะเป็นการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น โดยการปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียน ซึ่งจะแสดงได้ดังนี้

4.2 การหาผลเฉลยของ $y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} + F(x, y,..., y^{(n-2)}) = g(x)$

ตัวอย่างที่ 4.2.1 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น พร้อมเงื่อนไขเริ่มต้น

$$\begin{aligned} &y' + y + y^2 = e^{-x} \\ &y(0) = 0 \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

<u>วิธีทำ</u> จัดรูปสมการ (4.2.1) จะได้

$$\begin{aligned} &y' + y = e^{-x} - y^2 \\ &y(0) = 0 \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

เนื่องจาก $n = 1$ และ $P(x) = 1$ จะได้

$$\begin{aligned} &e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int 1dx} = e^{-x} \\ &e^{\int P(x)dx} = e^{\int 1dx} = e^{x} \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

เพราะฉะนั้น จะได้ตัวดำเนินการ $L(\cdot)$ และ $L^{-1}(\cdot)$ ดังนี้

$$\begin{aligned} &L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx} \frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx} (\cdot) \right) \\ &L(\cdot) = e^{-x} \frac{d}{dx}\left(e^{x} (\cdot) \right) \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

และ

$$\begin{aligned} &L^{-1}(\cdot) = e^{-\int P(x)dx} \int_0^x e^{\int P(x)dx} (\cdot) dx \\ &L^{-1}(\cdot) = e^{-x} \int_0^x e^{x} (\cdot) dx \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

จากสมการ (4.2.2) จะได้

$$\begin{aligned} L^{-1}L(y) &= L^{-1}(e^{-x}) - L^{-1}(y^2) \\ y(x) &= y(0) + L^{-1}(e^{-x}) - L^{-1}(y^2) \\ y(x) &= L^{-1}(e^{-x}) - L^{-1}(y^2) \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

โดยวิธีการแยกอโดเมียน ให้ $y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i$ และ $F(x, y, \ldots, y^{(n-2)}) = y^2 = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$

จากสมการ (4.2.6) จะได้

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i = L^{-1}(e^{-x}) - L^{-1}\left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i \right)$$

$$y_0 + y_1 + y_2 + \cdots = L^{-1}(e^{-x}) - L^{-1}(A_0 + A_1 + A_2 + \cdots) \tag{4.2.7}$$

จะได้ผลเฉลยอยู่ในรูปทั่วไป ดังนี้

$$y_0 = L^{-1}\left(e^{-x}\right)$$

$$y_{i+1} = -L^{-1}\left(A_i\right),\ i \ge 0$$

เมื่อ $$A_i = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{d\lambda^i} F\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k\right)\right]_{\lambda=0},\ i = 0,1,2...$$

$$A_0 = F\left(y_0\right)$$

$$= y_0^2$$

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda}\left[F\left(y_0 + \lambda y_1\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{d}{d\lambda}\left[\left(y_0 + \lambda y_1\right)^2\right]_{\lambda=0}$$

$$= \left[2\left(y_0 + \lambda y_1\right)\left(y_1\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= 2y_0 y_1$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[F\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2\right)^2\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{2!}\frac{d}{d\lambda}\left[2\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2\right)\left(y_1 + 2\lambda y_2\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{2}{2!}\left[\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2\right)\left(2y_2\right) + \left(y_1 + 2\lambda y_2\right)\left(y_1 + 2\lambda y_2\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= 2y_0 y_2 + y_1^2$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}\left[F\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}\left[\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3\right)^2\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{3!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[2\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3\right)\left(y_1 + 2\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{2}{3!}\frac{d}{d\lambda}\begin{bmatrix}\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3\right)\left(2y_2 + 6\lambda y_3\right) \\ + \left(y_1 + 2\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3\right)\left(y_1 + 2\lambda y_2 + \lambda^3 y_3\right)\end{bmatrix}_{\lambda=0}$$

$$A_3 = \frac{2}{3!}\begin{bmatrix}\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3\right)\left(6y_3\right) + \left(2y_2 + 6\lambda y_3\right)\left(y_1 + 2\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3\right) \\ + \left(y_1 + 2\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3\right)\left(2y_2 + 6\lambda y_3\right) + \left(y_1 + 2\lambda y_2 + \lambda^3 y_3\right)\left(2y_2 + 6\lambda y_3\right)\end{bmatrix}_{\lambda=0}$$

$$= \frac{2}{3!}\left[6y_0 y_3 + 2y_1 y_2 + 2y_1 y_2 + 2y_1 y_2\right]$$

$$= 2y_0 y_3 + 2y_1 y_2$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหา $A_4, A_5, \ldots$

จากสมการ (4.2.7) สามารถหา $y_0, y_1, y_2, \ldots$ ดังนี้

หา y_0; $$y_0 = L^{-1}\left(e^{-x}\right)$$
$$= e^{-x}\int_0^x e^x\left(e^{-x}\right)dx$$
$$= xe^{-x}$$

หา y_1; $$y_0 + y_1 = L^{-1}\left(e^{-x}\right) - L^{-1}\left(A_0\right)$$
$$y_1 = -L^{-1}\left(A_0\right)$$
$$= -e^{-x}\int_0^x e^x\left(y_0^2\right)dx$$
$$= -e^{-x}\int_0^x e^x\left(xe^{-x}\right)^2 dx$$
$$= x^2e^{-2x} + 2xe^{-2x} + 2e^{-2x} - 2e^{-x}$$

หา y_2; $$y_0 + y_1 + y_2 = L^{-1}\left(e^{-x}\right) - L^{-1}\left(A_0 + A_1\right)$$
$$y_1 + y_2 = -L^{-1}\left(A_0\right) - L^{-1}\left(A_1\right)$$
$$y_2 = -L^{-1}\left(A_1\right)$$
$$= -e^{-x}\int_0^x e^x\left(2y_0y_1\right)dx$$
$$= -e^{-x}\int_0^x e^x \times 2 \times xe^{-x} \times \left(x^2e^{-2x} + xe^{-2x} + e^{-2x} - e^{-x}\right)dx$$
$$= x^3e^{-3x} + \frac{7}{2}x^2e^{-3x} + \frac{11}{2}xe^{-3x} + \frac{11}{4}e^{-3x} - 4xe^{-2x} - 4e^{-2x} + \frac{5}{4}e^{-x}$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหา $y_3, y_4, y_5, \ldots$

ดังนั้น ผลเฉลย $y(x) = y_0 + y_1 + y_2 + \cdots$

จากนั้นแทนค่าผลเฉลยของ $y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots$ ดังที่ได้แสดงไว้แล้ว

$\square$

ตัวอย่างที่ 4.2.2 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น พร้อมเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y' + \frac{1}{x}y = xy^2 \qquad (4.2.8)$$
$$y(0) = 1$$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $n = 1$ และ $P(x) = \dfrac{1}{x}$ จะได้

$$e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{x} \qquad (4.2.9)$$
$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln|x|} = x$$

เพราะฉะนั้น จะได้ตัวดำเนินการ $L(\cdot)$ และ $L^{-1}(\cdot)$ ดังนี้

$$L(\cdot)=e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}(\cdot)\right)$$

$$L(\cdot)=\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x(\cdot)) \qquad (4.2.10)$$

และ

$$L^{-1}(\cdot)=e^{-\int P(x)dx}\int_0^x e^{\int P(x)dx}(\cdot)dx$$

$$L^{-1}(\cdot)=\frac{1}{x}\int_0^x x(\cdot)dx \qquad (4.2.11)$$

จากสมการ (4.2.8) จะได้

$$L^{-1}L(y)=xL^{-1}\left(y^2\right)$$

$$y(x)=y(0)+xL^{-1}\left(y^2\right)$$

$$y(x)=1+xL^{-1}\left(y^2\right) \qquad (4.2.12)$$

โดยวิธีการแยกอโดเมียน ให้ $y=\sum_{i=0}^{\infty}y_i$ และ $F\left(x,y,\ldots,y^{(n-2)}\right)=y^2=\sum_{i=0}^{\infty}A_i$

จากสมการ (4.2.12) จะได้

$$\sum_{i=0}^{\infty}y_i=1+xL^{-1}\left(\sum_{i=0}^{\infty}A_i\right)$$

$$y_0+y_1+y_2+\cdots=1+xL^{-1}\left(A_0+A_1+A_2+\cdots\right) \qquad (4.2.13)$$

จะได้ผลเฉลยอยู่ในรูปทั่วไป ดังนี้

$$y_0=1$$

$$y_{i+1}=xL^{-1}\left(A_i\right),\ i\geq 0$$

เมื่อ $A_i=\frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{d\lambda^i}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k y_k\right)\right]_{\lambda=0}$, $i=0,1,2\ldots$

$$A_0=F\left(y_0\right)$$

$$=y_0^2$$

$$A_1=\frac{d}{d\lambda}\left[F\left(y_0+\lambda y_1\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$=\frac{d}{d\lambda}\left[\left(y_0+\lambda y_1\right)^2\right]_{\lambda=0}$$

$$=\left[2\left(y_0+\lambda y_1\right)\left(y_1\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$=2y_0y_1$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[F\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2\right)\right]_{\lambda=0}$$
$$= \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2\right)^2\right]_{\lambda=0}$$
$$= \frac{1}{2!}\frac{d}{d\lambda}\left[2\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2\right)\left(y_1+2\lambda y_2\right)\right]_{\lambda=0}$$
$$= \frac{2}{2!}\left[\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2\right)\left(2y_2\right)+\left(y_1+2\lambda y_2\right)\left(y_1+2\lambda y_2\right)\right]_{\lambda=0}$$
$$= 2y_0y_2+y_1^2$$
$$A_3 = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}\left[F\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)\right]_{\lambda=0}$$
$$= \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}\left[\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)^2\right]_{\lambda=0}$$
$$= \frac{1}{3!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[2\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)\left(y_1+2\lambda y_2+3\lambda^2 y_3\right)\right]_{\lambda=0}$$
$$= \frac{2}{3!}\frac{d}{d\lambda}\begin{bmatrix}\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)\left(2y_2+6\lambda y_3\right)\\ +\left(y_1+2\lambda y_2+3\lambda^2 y_3\right)\left(y_1+2\lambda y_2+\lambda^3 y_3\right)\end{bmatrix}_{\lambda=0}$$
$$A_3 = \frac{2}{3!}\begin{bmatrix}\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)\left(6y_3\right)+\left(2y_2+6\lambda y_3\right)\left(y_1+2\lambda y_2+3\lambda^2 y_3\right)\\ +\left(y_1+2\lambda y_2+3\lambda^2 y_3\right)\left(2y_2+6\lambda y_3\right)+\left(y_1+2\lambda y_2+\lambda^3 y_3\right)\left(2y_2+6\lambda y_3\right)\end{bmatrix}_{\lambda=0}$$
$$= \frac{2}{3!}\left[6y_0y_3+2y_1y_2+2y_1y_2+2y_1y_2\right]$$
$$= 2y_0y_3+2y_1y_2$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหา $A_4, A_5, \ldots$

จากสมการ (4.2.13) สามารถหา $y_0, y_1, y_2, \ldots$ ดังนี้

หา y_0; $\quad y_0 = 1$

หา y_1; $\quad y_0 + y_1 = 1 + xL^{-1}\left(A_0\right)$

$$y_1 = xL^{-1}\left(A_0\right)$$
$$= x\left[\frac{1}{x}\int_0^x x\left(y_0^2\right)dx\right]$$
$$= x\left[\frac{1}{x}\int_0^x x(1)dx\right]$$
$$= \frac{x^2}{2}$$

หา y_2; $y_0 + y_1 + y_2 = 1 + xL^{-1}(A_0 + A_1)$

$$y_1 + y_2 = xL^{-1}(A_0) + xL^{-1}(A_1)$$

$$\begin{aligned} y_2 &= xL^{-1}(A_1) \\ &= x\left[\frac{1}{x}\int_0^x x(2y_0 y_1)dx\right] \\ &= x\left[\frac{1}{x}\int_0^x x(x^2)dx\right] \\ &= \frac{x^4}{4} \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหา $y_3, y_4, y_5, \cdots$

ดังนั้น ผลเฉลย $y(x) = y_0 + y_1 + y_2 + \cdots$

จากนั้นแทนค่าผลเฉลยของ $y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots$ ดังที่ได้แสดงไว้ข้างต้น

$\square$

ตัวอย่างที่ 4.2.3 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น พร้อมเงื่อนไขเริ่มต้น

$$\begin{aligned} &y'' - y' - xy^2 = 2x \\ &y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

<u>วิธีทำ</u> จัดรูปสมการ (4.2.14) จะได้

$$\begin{aligned} &y'' - y' = 2x + xy^2 \\ &y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

เนื่องจาก $n = 2$ และ $P(x) = -1$ จะได้

$$\begin{aligned} &e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int (-1)dx} = e^{x} \\ &e^{\int P(x)dx} = e^{\int (-1)dx} = e^{-x} \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

จากสมการ (4.2.16) จะได้ตัวดำเนินการ $L(\cdot)$ และ $L^{-1}(\cdot)$ ดังนี้

$$\begin{aligned} &L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d}{dx}(\cdot)\right) \\ &L(\cdot) = e^{x}\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\frac{d}{dx}(\cdot)\right) \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

และ

$$\begin{aligned} &L^{-1}(\cdot) = \int_0^x e^{-\int P(x)dx}\int_0^x e^{\int P(x)dx}(\cdot)dxdx \\ &L^{-1}(\cdot) = \int_0^x e^{x}\int_0^x e^{-x}(\cdot)dxdx \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

จากสมการ (4.2.15) จะได้

$$L^{-1}L(y)=L^{-1}(2x)+L^{-1}(xy^2)$$
$$y(x)=y(0)+xy'(0)+L^{-1}(2x)+L^{-1}x(y^2)$$
$$y(x)=1+L^{-1}(2x)+L^{-1}x(y^2) \tag{4.2.19}$$

โดยวิธีการแยกอโดเมียน ให้ $y=\sum_{i=0}^{\infty}y_i$ และ $F\left(x,y,\ldots,y^{(n-2)}\right)=y^2=\sum_{i=0}^{\infty}A_i$

จากสมการ (4.2.19) จะได้

$$\sum_{i=0}^{\infty}y_i=1+L^{-1}(2x)+L^{-1}x\left(\sum_{i=0}^{\infty}A_i\right)$$
$$y_0+y_1+y_2+\cdots=1+L^{-1}(2x)+L^{-1}x(A_0+A_1+A_2+\cdots) \tag{4.2.20}$$

จะได้รูปทั่วไปของผลเฉลย ดังนี้

$$y_0=1+L^{-1}(2x)$$
$$y_{i+1}=L^{-1}x(A_i),\ i\geq 0$$

เมื่อ $$A_i=\frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{d\lambda^i}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k y_k\right)\right]_{\lambda=0},\ i=0,1,2,\ldots$$

$$\begin{aligned}
A_0&=F(y_0)\\
&=y_0^2\\
A_1&=\frac{d}{d\lambda}\left[F(y_0+\lambda y_1)\right]_{\lambda=0}\\
&=\frac{d}{d\lambda}\left[(y_0+\lambda y_1)^2\right]_{\lambda=0}\\
&=\left[2(y_0+\lambda y_1)y_1\right]_{\lambda=0}\\
&=2y_0y_1\\
A_2&=\frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}F(y_0+\lambda y_1+\lambda^2y_2)\right]_{\lambda=0}\\
&=\frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}(y_0+\lambda y_1+\lambda^2y_2)^2\right]_{\lambda=0}\\
&=\frac{1}{2!}\left[\frac{d}{d\lambda}2(y_0+\lambda y_1+\lambda^2y_2)(y_1+2\lambda y_2)\right]_{\lambda=0}\\
&=\frac{2}{2!}\left[(y_0+\lambda y_1+\lambda^2y_2)(2y_2)+(y_1+2\lambda y_2)(y_1+2\lambda y_2)\right]_{\lambda=0}\\
&=2y_0y_2+y_1^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_3 &= \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}\left[F\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)\right]_{\lambda=0}\\
&= \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}\left[\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)^2\right]_{\lambda=0}\\
&= \frac{1}{3!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[2\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)\left(y_1+2\lambda y_2+3\lambda^2 y_3\right)\right]_{\lambda=0}\\
&= \frac{2}{3!}\frac{d}{d\lambda}\begin{bmatrix}\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)\left(2y_2+6\lambda y_3\right)\\ +\left(y_1+2\lambda y_2+3\lambda^2 y_3\right)\left(y_1+2\lambda y_2+\lambda^3 y_3\right)\end{bmatrix}_{\lambda=0}\\
&= \frac{2}{3!}\begin{bmatrix}\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)\left(6y_3\right)+\left(2y_2+6\lambda y_3\right)\left(y_1+2\lambda y_2+3\lambda^2 y_3\right)\\ +\left(y_1+2\lambda y_2+3\lambda^2 y_3\right)\left(2y_2+6\lambda y_3\right)+\left(y_1+2\lambda y_2+\lambda^3 y_3\right)\left(2y_2+6\lambda y_3\right)\end{bmatrix}_{\lambda=0}\\
&= \frac{2}{3!}\left[6y_0y_3+2y_1y_2+2y_1y_2+2y_1y_2\right]\\
&= 2y_0y_3+2y_1y_2
\end{aligned}
$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหา $A_4, A_5, \ldots$

จากสมการ (4.2.20) สามารถหา $y_0, y_1, y_2, \ldots$ ดังนี้

หา y_0;

$$
\begin{aligned}
y_0 &= 1+L^{-1}\left(2x\right)\\
&= 1+\int_0^x e^x\int_0^x e^{-x}\left(2x\right)dxdx\\
&= 1+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{60}x^5+\frac{1}{360}x^6+\frac{1}{2520}x^7\\
&\quad +\frac{1}{20160}x^8+\frac{1}{181440}x^9+\cdots
\end{aligned}
$$

หา y_1;

$$
\begin{aligned}
y_0+y_1 &= 1+L^{-1}\left(2x\right)+L^{-1}x\left(A_0\right)\\
y_1 &= L^{-1}\left(A_0\right)\\
&= \int_0^x e^x\int_0^x e^{-x}\left(xy_0^2\right)dxdx\\
&= \int_o^x e^x\int_0^x e^{-x}\times x\times\left(1+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{60}x^5+\frac{1}{360}x^6+\cdots\right)^2 dxdx\\
&= \frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\frac{17}{720}x^6+\frac{37}{5040}x^7\\
&\quad +\frac{61}{40320}x^8+\frac{649}{362880}x^9+\cdots
\end{aligned}
$$

หา y_2; $\quad y_0 + y_1 + y_2 = 1 + L^{-1}(2x) - L^{-1}x(A_0 + A_1)$

$$y_1 + y_2 = L^{-1}x(A_0) + L^{-1}x(A_1)$$

$$y_2 = L^{-1}x(A_1)$$

$$= \int_0^x e^x \int_0^x e^{-x} x(2y_0 y_1) dxdx$$

$$= \int_0^x e^x \int_0^x e^{-x} \times x \times 2 \times \left(1 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots\right) \times \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots\right) dxdx$$

$$= \frac{1}{90}x^6 + \frac{1}{280}x^7 + \frac{1}{1344}x^8 + \frac{23}{10080}x^9 + \cdots$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหา $y_3, y_4, y_5, \ldots$

ดังนั้น ผลเฉลย $y(x) = y_0 + y_1 + y_2 + \cdots$

จากนั้นแทนค่าผลเฉลยของ y_0, y_1, $y_2, \ldots$ ดังที่ได้แสดงไว้ข้างต้น

$\square$

ตัวอย่าง 4.2.4 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น พร้อมเงื่อนไขเริ่มต้น

$$\begin{aligned} y'' - 2e^y &= 0 \\ y(0) = y'(0) &= 0 \end{aligned} \tag{4.2.21}$$

<u>วิธีทำ</u> จัดรูปสมการ (4.2.21) จะได้

$$\begin{aligned} y'' &= 2e^y \\ y(0) = y'(0) &= 0 \end{aligned} \tag{4.2.22}$$

เนื่องจาก $n = 2$ และ $P(x) = 0$ จะได้

$$\begin{aligned} e^{-\int P(x)dx} &= e^{-\int 0dx} = e^0 = 1 \\ e^{\int P(x)dx} &= e^{\int 0dx} = e^0 = 1 \end{aligned} \tag{4.2.23}$$

เพราะฉะนั้น จะได้ตัวดำเนินการ $L(\cdot)$ และ $L^{-1}(\cdot)$ ดังนี้

$$\begin{aligned} L(\cdot) &= e^{-\int P(x)dx} \frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx} \frac{d}{dx}(\cdot)\right) \\ L(\cdot) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(\cdot)\right) \end{aligned} \tag{4.2.24}$$

และ

$$\begin{aligned} L^{-1}(\cdot) &= \int_0^x e^{-\int P(x)dx} \int_0^x e^{\int P(x)dx} (\cdot) dxdx \\ L^{-1}(\cdot) &= \int_0^x \int_0^x (\cdot) dxdx \end{aligned} \tag{4.2.25}$$

จากสมการ (4.2.22) จะได้

$$L^{-1}L(y) = 2L^{-1}\left(e^{y}\right)$$
$$y(x) = y(0) + xy'(0) + 2L^{-1}\left(e^{y}\right)$$
$$y(x) = 2L^{-1}\left(e^{y}\right) \tag{4.2.26}$$

โดยวิธีการแยกอโดเมียน ให้ $y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i$ และ $F\left(x, y, \ldots, y^{(n-2)}\right) = e^{y} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$

จากสมการ (4.2.26) จะได้

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i = 2L^{-1}\left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right)$$
$$y_0 + y_1 + y_2 + \cdots = 2L^{-1}\left(A_0 + A_1 + A_2 + \cdots\right) \tag{4.2.27}$$

จะได้ผลเฉลยอยู่ในรูปทั่วไป ดังนี้

$$y_0 = 0$$
$$y_{i+1} = 2L^{-1}\left(A_i\right),\ i \geq 0$$

เมื่อ $$A_i = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{d\lambda^i} F\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k\right)\right]_{\lambda=0},\ i = 0,1,2,\ldots$$

$$A_0 = F\left(y_0\right)$$
$$= e^{y_0}$$
$$A_1 = \frac{d}{d\lambda}\left[F\left(y_0 + \lambda y_1\right)\right]_{\lambda=0}$$
$$= \frac{d}{d\lambda}\left[e^{\left(y_0 + \lambda y_1\right)}\right]_{\lambda=0}$$
$$= \left[e^{\left(y_0 + \lambda y_1\right)}\left(y_1\right)\right]_{\lambda=0}$$
$$= y_1 e^{y_0}$$
$$A_2 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[F\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2\right)\right]_{\lambda=0}$$
$$= \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[e^{\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2\right)}\right]_{\lambda=0}$$
$$= \frac{1}{2!}\frac{d}{d\lambda}\left[e^{\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2\right)}\left(y_1 + 2\lambda y_2\right)\right]_{\lambda=0}$$
$$= \frac{1}{2!}\left[e^{\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2\right)}\left(2y_2\right) + \left(y_1 + 2\lambda y_2\right)e^{\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2\right)}\left(y_1 + 2\lambda y_2\right)\right]_{\lambda=0}$$
$$= \frac{1}{2!}\left[2y_2 e^{y_0} + y_1^2 e^{y_0}\right]$$
$$= y_2 e^{y_0} + \frac{y_1^2 e^{y_0}}{2!}$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}\left[F\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}\left[e^{\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)}\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{3!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[e^{\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)}\left(y_1 + 2\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{3!}\frac{d}{d\lambda}\begin{bmatrix} e^{\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)}\left(2y_2 + 6\lambda y_3\right) \\ +\left(y_1 + 2\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3\right)e^{\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)}\left(y_1 + 2\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3\right)\end{bmatrix}_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{3!}\begin{bmatrix} e^{\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)}\left(6y_3\right) + \left(2y_2 + 6\lambda y_3\right)e^{\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)}\left(y_1 + 2\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3\right) \\ +\left(y_1 + 2\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3\right)^2 e^{\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)}\left(y_1 + 2\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3\right) \\ + e^{\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)}2\left(y_1 + 2\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3\right)\left(2y_2 + 6\lambda y_3\right)\end{bmatrix}_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{3!}\left[6y_3 e^{y_0} + 2y_1 y_2 e^{y_0} + y_1^3 e^{y_0} + 4y_1 y_2 e^{y_0}\right]$$

$$= y_3 e^{y_0} + y_1 y_2 e^{y_0} + \frac{y_1^3 e^{y_0}}{3!}$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหา $A_4, A_5, \ldots$

จากสมการ (4.2.27) สามารถหา $y_0, y_1, y_2, \ldots$ ดังนี้

หา y_0; $\quad y_0 = 0$

หา y_1; $\quad y_0 + y_1 = 2L^{-1}\left(A_0\right)$

$$y_1 = 2L^{-1}\left(A_0\right)$$

$$= 2\int_0^x \int_0^x e^{y_0}\, dxdx$$

$$= x^2$$

หา y_2; $\quad y_0 + y_1 + y_2 = 2L^{-1}\left(A_0 + A_1\right)$

$$y_2 = 2L^{-1}\left(A_1\right)$$

$$= 2\int_0^x \int_0^x y_1 e^{y_0}\, dxdx$$

$$= \frac{1}{6}x^4$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$y_3 = \frac{2}{45}x^6$$
$$\vdots$$

ดังนั้น ผลเฉลย $y(x) = y_0 + y_1 + y_2 + \cdots$

$$= x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + \cdots$$
$$= 1 - 2\ln(\cos x)$$

$\square$

ตัวอย่าง 4.2.5 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น พร้อมเงื่อนไขเริ่มต้น

$$\begin{aligned} &y'' = 2y + 4y\ln y \\ &y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{aligned} \tag{4.2.28}$$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $n = 2$ และ $P(x) = 0$ จะได้

$$\begin{aligned} &e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int 0dx} = e^0 = 1 \\ &e^{\int P(x)dx} = e^{\int 0dx} = e^0 = 1 \end{aligned} \tag{4.2.29}$$

เพราะฉะนั้น จะได้ตัวดำเนินการ $L(\cdot)$ และ $L^{-1}(\cdot)$ ดังนี้

$$\begin{aligned} &L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d}{dx}(\cdot)\right) \\ &L(\cdot) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(\cdot)\right) \end{aligned} \tag{4.2.30}$$

และ

$$\begin{aligned} &L^{-1}(\cdot) = \int_0^x e^{-\int P(x)dx}\int_0^x e^{\int P(x)dx}(\cdot)dxdx \\ &L^{-1}(\cdot) = \int_0^x\int_0^x (\cdot)dxdx \end{aligned} \tag{4.2.31}$$

จากสมการ (4.2.28) จะได้

$$L^{-1}L(y) = 2L^{-1}(y) + 4L^{-1}(y\ln y)$$
$$y(x) = y(0) + xy'(0) + 2L^{-1}(y) + 4L^{-1}(y\ln y)$$
$$y(x) = 1 + 2L^{-1}(y) + 4L^{-1}(y\ln y) \tag{4.2.32}$$

โดยวิธีการแยกอโดเมียน ให้ $y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i$ และ $F\left(x, y, \ldots, y^{(n-2)}\right) = y\ln y = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$

จากสมการ (4.2.32) จะได้

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i = 1 + 2L^{-1}\left(\sum_{i=0}^{\infty} y_i\right) + 4L^{-1}\left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right)$$

$$y_0 + y_1 + y_2 + \cdots = 1 + 2L^{-1}(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots) + 4L^{-1}(A_0 + A_1 + A_2 + \cdots) \qquad (4.2.33)$$

จะได้ผลเฉลยอยู่ในรูปทั่วไป ดังนี้

$$y_0 = 1$$

$$y_{i+1} = 2L^{-1}(y_i) + 4L^{-1}(A_i),\ i \geq 0$$

เมื่อ $$A_i = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{d\lambda^i} F\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k\right)\right]_{\lambda=0},\ i = 0,1,2,\ldots$$

$$\begin{aligned}
A_0 &= F(y_0) \\
&= y_0 \ln y_0 \\
A_1 &= \frac{d}{d\lambda}\left[F(y_0 + \lambda y_1)\right]_{\lambda=0} \\
&= \frac{d}{d\lambda}\left[(y_0 + \lambda y_1)\ln(y_0 + \lambda y_1)\right]_{\lambda=0} \\
&= \left[(y_0 + \lambda y_1)\frac{1}{(y_0 + \lambda y_1)}(y_1) + \ln(y_0 + \lambda y_1)(y_1)\right]_{\lambda=0} \\
&= y_1 + y_1 \ln y_0 \\
A_2 &= \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[F(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2)\right]_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2)\ln(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2)\right]_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2!}\frac{d}{d\lambda}\left[\begin{array}{l}(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2)\dfrac{1}{(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2)}(y_1 + 2\lambda y_2) \\ + \ln(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2)(y_1 + 2\lambda y_2)\end{array}\right]_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2!}\left[2y_2 + \ln(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2)(2y_2) + (y_1 + 2\lambda y_2)\frac{1}{(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2)}(y_1 + 2\lambda y_2)\right]_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2!}\left[2y_2 + 2y_2 \ln y_0 + \frac{y_1^2}{y_0}\right] \\
&= y_2 + y_2 \ln y_0 + \frac{y_1^2}{2! y_0}
\end{aligned}$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}\left[F\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}\left[\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3\right)\ln\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{3!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\begin{bmatrix} \left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3\right)\dfrac{1}{\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3\right)}\left(y_1 + 2\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3\right) \\ + \ln\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3\right)\left(y_1 + 2\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3\right) \end{bmatrix}_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{3!}\frac{d}{d\lambda}\begin{bmatrix} \left(2y_2 + 6\lambda y_3\right) + \ln\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3\right)\left(2y_2 + 6\lambda y_3\right) \\ + \left(y_1 + 2\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3\right)\dfrac{1}{\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3\right)}\left(y_1 + 2\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3\right) \end{bmatrix}_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{3!}\begin{bmatrix} 6y_3 + \ln\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3\right)\left(6y_3\right) \\ + \left(2y_2 + 6\lambda y_3\right)\dfrac{1}{\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3\right)}\left(y_1 + 2\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3\right) \\ - \left(y_1 + 2\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3\right)^2 \dfrac{1}{\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3\right)^2}\left(y_1 + 2\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3\right) \\ + \dfrac{1}{\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3\right)} 2\left(y_1 + 2\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3\right)\left(2y_2 + 6\lambda y_3\right) \end{bmatrix}_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{3!}\left[6y_3 + 6y_3 \ln y_0 + \frac{2y_1 y_2}{y_0} - \frac{y_1^3}{y_0^2} + \frac{4y_1 y_2}{y_0}\right]$$

$$= y_3 + y_3 \ln y_0 + \frac{y_1 y_2}{y_0} - \frac{y_1^3}{3!\, y_0^2}$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหา $A_4, A_5, \ldots$

จากสมการ (4.2.33) สามารถหา $y_0, y_1, y_2, \ldots$ ดังนี้

หา y_0; $\quad y_0 = 1$

หา y_1; $\quad y_0 + y_1 = 1 + 2L^{-1}\left(y_0\right) + 4L^{-1}\left(A_0\right)$

$$y_1 = 2L^{-1}\left(y_0\right) + 4L^{-1}\left(A_0\right)$$

$$= 2\int_0^x\int_0^x y_0\, dxdx + 4\int_0^x\int_0^x y_0 \ln y_0\, dxdx$$

$$= x^2$$

หา y_2; $\quad y_0 + y_1 + y_2 = 1 + 2L^{-1}\left(y_0 + y_1\right) + 4L^{-1}\left(A_0 + A_1\right)$

$$y_2 = 2L^{-1}\left(y_1\right) + 4L^{-1}\left(A_1\right)$$

$$= 2\int_0^x\int_0^x y_1\, dxdx + 4\int_0^x\int_0^x y_1 + y_1 \ln y_0\, dxdx$$

$$= \frac{1}{2!}x^4$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$y_3 = \frac{1}{3!}x^6$$
$$\vdots$$

ดังนั้น ผลเฉลย $y(x) = y_0 + y_1 + y_2 + \cdots$

$$= 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \cdots$$
$$= e^{x^2}$$

$\square$

ตัวอย่างที่ 4.2.6 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น พร้อมเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y''' + xy'' - yy' + y^2 = xe^{\frac{3}{2}x^2} \qquad (4.2.34)$$
$$y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 0$$

<u>วิธีทำ</u> จัดรูปสมการ (4.2.34) จะได้

$$y''' + xy'' = xe^{\frac{3}{2}x^2} + \left(yy' - y^2\right) \qquad (4.2.35)$$
$$y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 0$$

เนื่องจาก $n = 3$และ $P(x) = x$ จะได้

$$e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int xdx} = e^{\frac{-x^2}{2}}$$
$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int xdx} = e^{\frac{x^2}{2}} \qquad (4.2.36)$$

เพราะฉะนั้น จะได้ตัวดำเนินการ $L(\cdot)$ และ $L^{-1}(\cdot)$ ดังนี้

$$L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^2}{dx^2}(\cdot)\right)$$
$$L(\cdot) = e^{\frac{-x^2}{2}}\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^2}{dx^2}(\cdot)\right) \qquad (4.2.37)$$

และ

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x\int_0^x e^{-\int P(x)dx}\int_0^x e^{\int P(x)dx}(\cdot)dxdxdx$$
$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x\int_0^x e^{\frac{-x^2}{2}}\int_0^x e^{\frac{x^2}{2}}(\cdot)dxdxdx \qquad (4.2.38)$$

จากสมการ (4.2.35) จะได้

$$L^{-1}L(y) = L^{-1}\left(xe^{\frac{3}{2}x^2}\right) + L^{-1}\left(yy' - y^2\right)$$

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2}y''(0) + L^{-1}\left(xe^{\frac{3}{2}x^2}\right) + L^{-1}\left(yy' - y^2\right)$$

$$y(x) = 1 + L^{-1}\left(xe^{\frac{3}{2}x^2}\right) + L^{-1}\left(yy' - y^2\right) \tag{4.2.39}$$

โดยวิธีการแยกอโดเมียน ให้ $y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i$ และ $F\left(x, y, \ldots, y^{(n-2)}\right) = yy' - y^2 = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$

จากสมการ (4.2.39) จะได้

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i = 1 + L^{-1}\left(xe^{\frac{3}{2}x^2}\right) + L^{-1}\left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right)$$

$$y_0 + y_1 + y_2 + \cdots = 1 + L^{-1}\left(xe^{\frac{3}{2}x^2}\right) + L^{-1}\left(A_0 + A_1 + A_2 + \cdots\right) \tag{4.2.40}$$

จะได้ผลเฉลยอยู่ในรูปทั่วไป ดังนี้

$$y_0 = 1 + L^{-1}\left(xe^{\frac{3}{2}x^2}\right)$$

$$y_{i+1} = L^{-1}(A_i),\ i \geq 0$$

เมื่อ $$A_i = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{d\lambda^i} F\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k\right)\right]_{\lambda=0},\ i = 0,1,2,\ldots$$

$$\begin{aligned}
A_0 &= F(y_0) \\
&= y_0 y_0' - y_0^2 \\
A_1 &= \frac{d}{d\lambda}\left[F(y_0 + \lambda y_1)\right]_{\lambda=0} \\
&= \frac{d}{d\lambda}\left[(y_0 + \lambda y_1)(y_0 + \lambda y_1)' - (y_0 + \lambda y_1)^2\right]_{\lambda=0} \\
&= \left[(y_0 + \lambda y_1)y_1' + (y_0 + \lambda y_1)' y_1 - 2(y_0 + \lambda y_1)y_1\right]_{\lambda=0} \\
&= y_0' y_1 + y_1' y_0 - 2y_0 y_1
\end{aligned}$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[F\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[\left(\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2\right)\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2\right)' - \left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2\right)^2\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{2!}\frac{d}{d\lambda}\begin{bmatrix}\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2\right)\left(y_1'+2\lambda y_2'\right)+\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2\right)'\left(y_1+2\lambda y_2\right)\\ -2\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2\right)\left(y_1+2\lambda y_2\right)\end{bmatrix}_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{2!}\begin{bmatrix}\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2\right)\left(2y_2'\right)+\left(y_1'+2\lambda y_2'\right)\left(y_1+2\lambda y_2\right)+\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2\right)'\left(2y_2\right)\\ +\left(y_1+2\lambda y_2\right)\left(y_1'+2\lambda y_2'\right)-2\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_1\right)\left(2y_2\right)-2\left(y_1+2\lambda y_2\right)\left(y_1+2\lambda y_2\right)\end{bmatrix}_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{2!}\left[2y_0 y_2' + 2y_1 y_1' + 2y_0' y_2 - 4y_0 y_2 - 2y_1^2\right]$$

$$= y_0 y_2' + y_1 y_1' + y_0' y_2 - 2y_0 y_2 - y_1^2$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}\left[F\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}\left[\begin{pmatrix}\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)'\\ -\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)^2\end{pmatrix}\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{3!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\begin{bmatrix}\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)\left(y_1'+2\lambda y_2'+3\lambda^2 y_3'\right)\\ +\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)'\left(y_1+2\lambda y_2+3\lambda^2 y_3\right)\\ -2\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)\left(y_1+2\lambda y_2+3\lambda^2 y_3\right)\end{bmatrix}_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{3!}\frac{d}{d\lambda}\begin{bmatrix}\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)\left(2y_2'+6\lambda y_3'\right)\\ +\left(y_1'+2\lambda y_2'+3\lambda^2 y_3'\right)\left(y_1+2\lambda y_2+3\lambda^2 y_3\right)\\ +\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)'\left(2y_2+6\lambda y_3\right)\\ +\left(y_1+2\lambda y_2+3\lambda^2 y_3\right)\left(y_1'+2\lambda y_2'+3\lambda^2 y_3'\right)\\ -2\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)\left(2y_2+6\lambda y_3\right)\\ -2\left(y_1+2\lambda y_2+3\lambda^2 y_3\right)\left(y_1+2\lambda y_2+3\lambda^2 y_3\right)\end{bmatrix}_{\lambda=0}$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}\begin{bmatrix}\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)\left(6y_3'\right)+\left(2y_2'+6\lambda y_3'\right)\left(y_1+2\lambda y_2+3\lambda^2 y_3\right)\\ +\left(y_1'+2\lambda y_2'+3\lambda^2 y_3'\right)\left(2y_2+6\lambda y_3\right)+\left(y_1+2\lambda y_2+3\lambda^2 y_3\right)\left(2y_2'+6\lambda y_3'\right)\\ +\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)'\left(6y_3\right)+\left(2y_2+6\lambda y_3\right)\left(y_1'+2\lambda y_2'+3\lambda^2 y_3'\right)\\ +\left(y_1+2\lambda y_2+3\lambda^2 y_3\right)\left(2y_2'+6\lambda y_3'\right)+\left(y_1'+2\lambda y_2'+3\lambda^2 y_3'\right)\left(2y_2+6\lambda y_3\right)\\ -2\left(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\lambda^3 y_3\right)\left(6y_3\right)-2\left(2y_2+6\lambda y_3\right)\left(y_1+2\lambda y_2+3\lambda^2 y_3\right)\\ -2\left(y_1+2\lambda y_2+3\lambda^2 y_3\right)\left(2y_2+6\lambda y_3\right)-2\left(y_1+2\lambda y_2+3\lambda^2 y_3\right)\left(2y_2+6\lambda y_3\right)\end{bmatrix}_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{3!}\begin{bmatrix}6y_0 y_3' + 2y_1 y_2' + 2y_1' y_2 + 2y_1 y_2' + 6y_0' y_3 + 2y_1' y_2 + 2y_1 y_2'\\ +2y_1' y_2 - 12 y_0 y_3 - 12 y_1 y_2\end{bmatrix}$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}\left[6y_0y_3' + 6y_1y_2' + 6y_1'y_2 + 6y_0'y_3 - 12y_0y_3 - 12y_1y_2\right]$$

$$= y_0y_3' + y_1y_2' + y_1'y_2 + y_0'y_3 - 2y_0y_3 - 2y_1y_2$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหา $A_4, A_5, \ldots$

จากสมการ (4.2.40) สามารถหา $y_0, y_1, y_2, \ldots$ ดังนี้

หา y_0;
$$y_0 = 1 + L^{-1}\left(xe^{\frac{3}{2}x^2}\right)$$
$$= 1 + \int_0^x\int_0^x e^{\frac{-x^2}{2}}\int_0^x e^{\frac{x^2}{2}}\left(xe^{\frac{3}{2}x^2}\right)dxdxdx$$
$$= 1 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^6 + \frac{1}{384}x^8 + \cdots$$

หา y_1;
$$y_0 + y_1 = 1 + L^{-1}\left(xe^{\frac{3}{2}x^2}\right) + L^{-1}(A_0)$$
$$y_1 = L^{-1}(A_0)$$
$$y_1 = \int_0^x\int_0^x e^{\frac{-x^2}{2}}\int_0^x e^{\frac{x^2}{2}}\left(y_0y_0' - y_0^2\right)dxdxdx$$
$$= -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{720}x^6 - \frac{1}{504}x^7 + \frac{1}{40320}x^8 + \frac{1}{7560}x^9 + \cdots$$

หา y_2;
$$y_0 + y_1 + y_2 = 1 + L^{-1}\left(xe^{\frac{3}{2}x^2}\right) + L^{-1}(A_0 + A_1)$$
$$y_1 + y_2 = L^{-1}(A_0) + L^{-1}(A_1)$$
$$y_2 = L^{-1}(A_1)$$
$$= \int_0^x\int_0^x e^{\frac{-x^2}{2}}\int_0^x e^{\frac{x^2}{2}}\left(y_0'y_1 + y_1'y_0 - 2y_0y_1\right)dxdxdx$$
$$= -\frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{360}x^6 + \frac{1}{840}x^7 - \frac{13}{40320}x^8 - \frac{83}{362880}x^9 + \cdots$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหา $y_3, y_4, y_5, \cdots$

ดังนั้น ผลเฉลย $y(x) = y_0 + y_1 + y_2 + \cdots$

จากนั้นแทนค่าผลเฉลยของ $y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots$ ดังที่ได้แสดงไว้แล้ว

$\blacksquare$

ตัวอย่างที่ 4.2.7 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น พร้อมเงื่อนไขเริ่มต้น

$$\begin{aligned} &y^{(4)} + xy''' - yy'' + xyy' + y^2 = (x+3)e^{3x^2} \\ &y(0)=1, y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0 \end{aligned} \tag{4.2.41}$$

<u>วิธีทำ</u> จัดรูปสมการ (4.2.41) จะได้

$$\begin{aligned} &y^{(4)} + xy''' = (x+3)e^{3x^2} + \left(yy'' - xyy' - y^2\right) \\ &y(0)=1, y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0 \end{aligned} \tag{4.2.42}$$

เนื่องจาก $n=4$ และ $P(x)=x$ จะได้

$$\begin{aligned} &e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int x dx} = e^{\frac{-x^2}{2}} \\ &e^{\int P(x)dx} = e^{\int x dx} = e^{\frac{x^2}{2}} \end{aligned} \tag{4.2.43}$$

เพราะฉะนั้น จะได้ตัวดำเนินการ $L(\cdot)$ และ $L^{-1}(\cdot)$ ดังนี้

$$\begin{aligned} &L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\frac{d^3}{dx^3}(\cdot)\right) \\ &L(\cdot) = e^{\frac{-x^2}{2}}\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^3}{dx^3}(\cdot)\right) \end{aligned} \tag{4.2.44}$$

และ

$$\begin{aligned} &L^{-1}(\cdot) = \int_0^x\int_0^x\int_0^x e^{-\int P(x)dx}\int_0^x e^{\int P(x)dx}(\cdot)dxdxdxdx \\ &L^{-1}(\cdot) = \int_0^x\int_0^x\int_0^x e^{\frac{-x^2}{2}}\int_0^x e^{\frac{x^2}{2}}(\cdot)dxdxdxdx \end{aligned} \tag{4.2.45}$$

จากสมการ (4.2.42) จะได้

$$L^{-1}L(y) = L^{-1}(x+3)e^{3x^2} + L^{-1}\left(yy'' - xyy' - y^2\right)$$

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2}y''(0) + \frac{x^3}{6}y'''(0) + L^{-1}(x+3)e^{3x^2} + L^{-1}\left(yy'' - xyy' - y^2\right)$$

$$y(x) = 1 + L^{-1}(x+3)e^{3x^2} + L^{-1}\left(yy'' - xyy' - y^2\right) \tag{4.2.46}$$

โดยวิธีการแยกอโดเมียน ให้ $y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i$ และ $F\left(x, y, \ldots, y^{(n-2)}\right) = yy'' - xyy' - y^2 = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$

จากสมการ (4.2.46) จะได้

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i = 1 + L^{-1}(x+3)e^{3x^2} + L^{-1}\left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right)$$

$$y_0 + y_1 + y_2 + \cdots = 1 + L^{-1}(x+3)e^{3x^2} + L^{-1}\left(A_0 + A_1 + A_2 + \cdots\right) \tag{4.2.47}$$

ผลเฉลยที่ได้จะอยู่ในรูปทั่วไป ดังนี้

$$y_0 = 1 + L^{-1}(x+3)e^{3x^2}$$

$$y_{i+1} = L^{-1}(A_i),\ i \geq 0$$

เมื่อ $\quad A_i = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{d\lambda^i}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k y_k\right)\right]_{\lambda=0}$, $i = 0,1,2,\ldots$

$$\begin{aligned}
A_0 &= F(y_0) \\
&= y_0 y_0'' - x y_0 y_0' - y_0^2 \\
A_1 &= \frac{d}{d\lambda}\left[F(y_0+\lambda y_1)\right]_{\lambda=0} \\
&= \frac{d}{d\lambda}\left[(y_0+\lambda y_1)(y_0+\lambda y_1)'' - x\left((y_0+\lambda y_1)(y_0+\lambda y_1)'\right) - (y_0+\lambda y_1)^2\right]_{\lambda=0} \\
&= \left[(y_0+\lambda y_1)y_1'' + (y_0+\lambda y_1)'' y_1 - x\left((y_0+\lambda y_1)y_1' + (y_0+\lambda y_1)' y_1\right) - 2(y_0+\lambda y_1)y_1\right]_{\lambda=0} \\
&= y_0'' y_1 + y_1'' y_0 - x(y_0' y_1 + y_1' y_0) - 2y_0 y_1 \\
A_2 &= \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[F(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2)\right]_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\begin{bmatrix} (y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2)(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2)'' \\ -x\left((y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2)(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2)'\right) \\ -(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2)^2 \end{bmatrix}_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2!}\frac{d}{d\lambda}\begin{bmatrix} (y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2)(y_1''+2\lambda y_2'') + (y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2)''(y_1+2\lambda y_2) \\ -x\left((y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2)(y_1'+2\lambda y_2') + (y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2)'(y_1+2\lambda y_2)\right) \\ -2(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2)(y_1+2\lambda y_2) \end{bmatrix}_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} (y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2)(2y_2'') + (y_1''+2\lambda y_2'')(y_1+2\lambda y_2) + (y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2)''(2y_2) \\ +(y_1+2\lambda y_2)(y_1''+2\lambda y_2'') \\ -x\begin{pmatrix} (y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2)(2y_2') + (y_1'+2\lambda y_2')(y_1+2\lambda y_2) + \\ (y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2)'(2y_2) + (y_1+2\lambda y_2)(y_1'+2\lambda y_2') \end{pmatrix} \\ -2(y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2)(2y_2) - 2(y_1+2\lambda y_2)(y_1+2\lambda y_2) \end{bmatrix}_{\lambda=0} \\
A_2 &= \frac{1}{2!}\left[2y_0 y_2'' + y_1 y_1'' + 2y_0'' y_2 + y_1'' y'' - x(2y_0 y_2' + y_1 y_1' + 2y_0' y_2 + y_1 y') - 4y_0 y_2 - 2y_1^2\right] \\
&= \frac{1}{2!}\left[2y_0 y_2'' + 2y_1 y_1'' + 2y_0'' y_2 - x(2y_0 y_2' + 2y_1 y_1' + 2y_0' y_2) - 4y_0 y_2 - 2y_1^2\right] \\
&= y_0 y_2'' + y_1 y_1'' + y_0'' y_2 - x(y_0 y_2' + y_1 y_1' + y_0' y_2) - 2y_0 y_2 - y_1^2
\end{aligned}$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}\left[F\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}\begin{bmatrix} \left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3\right)\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3\right)'' \\ -x\left(\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3\right)\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3\right)'\right) \\ -\left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3\right)^2 \end{bmatrix}_{\lambda=0}$$

ดังนั้น จะได้

$$A_3 = y_0 y_3'' + y_1 y_2'' + y_1'' y_2 + y_0'' y_3 - x\left(y_0 y_3' + y_1 y_2' + y_1' y_2 + y_0' y_3\right) - 2y_0 y_3 - 2y_1 y_2$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหา $A_4, A_5, \ldots$

จากสมการ (4.2.47) สามารถหา $y_0, y_1, y_2, \ldots$ ดังนี้

หา y_0;

$$y_0 = 1 + L^{-1}(x+3)e^{3x^2}$$

$$y_0 = 1 + \int_0^x\int_0^x\int_0^x e^{\frac{-x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{x^2}{2}} (x+3)e^{x^2}\, dxdxdxdx$$

$$= 1 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{60}x^6 + \frac{1}{336}x^7 + \frac{23}{3360}x^8 + \frac{31}{24192}x^9 + \cdots$$

หา y_1;

$$y_0 + y_1 = 1 + L^{-1}(x+3)e^{3x^2} + L^{-1}(A_0)$$

$$y_1 = L^{-1}(A_0)$$

$$= \int_0^x\int_0^x\int_0^x e^{\frac{-x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{x^2}{2}} \left(y_0 y_0'' - x y_0 y_0' - y_0^2\right) dxdxdxdx$$

$$= -\frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{144}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 - \frac{13}{20160}x^8 + \frac{1}{120960}x^9 + \cdots$$

หา y_2;

$$y_0 + y_1 + y_2 = 1 + L^{-1}(x+3)e^{3x^2} + L^{-1}(A_0 + A_1)$$

$$y_1 + y_2 = L^{-1}(A_0) + L^{-1}(A_1)$$

$$y_2 = L^{-1}(A_1)$$

$$= \int_0^x\int_0^x\int_0^x e^{\frac{-x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{x^2}{2}} \left[y_0'' y_1 + y_0 y_1'' - x\left(y_0' y_1 + y_1' y_0\right) - 2y_0 y_1\right] dxdxdxdx$$

$$= -\frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{2688}x^8 + \frac{1}{362880}x^9 + \cdots$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหา $y_3, y_4, y_5, \ldots$

ดังนั้น ผลเฉลย $y(x) = y_0 + y_1 + y_2 + \cdots$

จากนั้นแทนค่าผลเฉลยของ $y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots$ ดังที่ได้แสดงไว้ข้างต้น

$\square$

จากนั้นจะเป็นการหาสูตรการแปลงธรรมชาติ โดยวิธีการแยกอโดเมียน ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

4.3 การหาสูตรการแปลงธรรมชาติ โดยวิธีการแยกอโดเมียน

ตัวอย่างที่ 4.3.1 แสดงการหา $N[1]$

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ (3.3.10), ให้ $Q(t)=1$

$$N[Q(t)]=\int_0^\infty e^{-st}Q(ut)dt=\lim_{x\to\infty}\left(e^{-st}\sum_{i=0}^\infty y_i\right)\Bigg|_0^x$$

จะได้
$$N[1]=\int_0^\infty e^{-st}dt=\lim_{x\to\infty}\left(e^{-st}\sum_{i=0}^\infty y_i\right)\Bigg|_0^x$$

โดยวิธีการแยกอโดเมียนสามารถหา $y_0, y_1, y_2, \ldots$ ดังนี้

$$y_0=\frac{Q}{P}$$
$$=-\frac{1}{s}$$
$$y_1=-\frac{1}{P}L\left(\frac{Q}{P}\right)$$
$$y_1=\frac{1}{s}L\left(-\frac{1}{s}\right)$$
$$=0$$

เพราะฉะนั้น $y_2=y_3=\cdots=0$

ดังนั้น
$$N[1]=\lim_{x\to\infty}\left(e^{-st}\left(-\frac{1}{s}\right)\right)\Bigg|_0^x$$
$$=\frac{1}{s}$$

$\square$

ตัวอย่างที่ 4.3.2 แสดงการหา $N[t]$

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ (3.3.10), ให้ $Q(t)=t$

$$N[Q(t)]=\int_0^\infty e^{-st}Q(ut)dt=\lim_{x\to\infty}\left(e^{-st}\sum_{i=0}^\infty y_i\right)\Bigg|_0^x$$

จะได้
$$N[t]=\int_0^\infty e^{-st}(ut)dt=\lim_{x\to\infty}\left(e^{-st}\sum_{i=0}^\infty y_i\right)\Bigg|_0^x$$

โดยวิธีการแยกอโดเมียนสามารถหา $y_0, y_1, y_2, \ldots$ ดังนี้

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{Q}{P} \\ &= -\frac{ut}{s} \\ y_1 &= -\frac{1}{P} L\left(\frac{Q}{P}\right) \\ &= \frac{1}{s} L\left(-\frac{ut}{s}\right) \\ &= \frac{1}{s}\left(-\frac{u}{s}\right) \\ &= -\frac{u}{s^2} \\ y_2 &= (-1)^2 \frac{1}{P^2} L^2\left(\frac{Q}{P}\right) \\ &= \frac{1}{s^2} L^2\left(-\frac{ut}{s}\right) \\ &= \frac{1}{s^2} L\left(-\frac{u}{s}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $y_3 = y_4 = \cdots = 0$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} N[t] &= \lim_{x\to\infty}\left(e^{-st}\left(-\frac{1}{s} - \frac{u}{s^2}\right)\right)\Bigg|_0^x \\ &= \frac{u}{s^2} \end{aligned}$$

$\square$

ตัวอย่างที่ 4.3.3 แสดงการหา $N\left[e^{at}\right]$

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ (3.3.10), ให้ $Q(t) = e^{at}$

$$N[Q(t)] = \int_0^\infty e^{-st} Q(ut)\,dt = \lim_{x\to\infty}\left(e^{-st}\sum_{i=0}^\infty y_i\right)\Bigg|_0^x$$

จะได้
$$N\left[e^{at}\right] = \int_0^\infty e^{-st}\left(e^{aut}\right)dt = \lim_{x\to\infty}\left(e^{-st}\sum_{i=0}^\infty y_i\right)\Bigg|_0^x$$

โดยวิธีการแยกอโดเมียนสามารถหา $y_0, y_1, y_2, \ldots$ ดังนี้

$$y_0 = \frac{Q}{P}$$
$$= -\frac{e^{aut}}{s}$$
$$y_1 = -\frac{1}{P}L\left(\frac{Q}{P}\right)$$
$$= \frac{1}{s}L\left(-\frac{e^{aut}}{s}\right)$$
$$= \frac{1}{s}\left(-\frac{au}{s}e^{aut}\right)$$
$$y_1 = -\frac{au}{s^2}e^{aut}$$
$$y_2 = (-1)^2 \frac{1}{P^2}L^2\left(\frac{Q}{P}\right)$$
$$= \frac{1}{s^2}L^2\left(-\frac{e^{aut}}{s}\right)$$
$$= \frac{1}{s^2}L\left(-\frac{au}{s}e^{aut}\right)$$
$$= -\frac{a^2u^2}{s^3}e^{aut}$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหา $y_3, y_4, \ldots$ ได้

ดังนั้น
$$N\left[e^{at}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(e^{-st}\left(-\frac{e^{aut}}{s} - \frac{au}{s^2}e^{aut} - \frac{a^2u^2}{s^3}e^{aut} - \cdots\right)\right)\Bigg|_0^x$$
$$= \frac{e^{aut}}{s} + \frac{au}{s^2}e^{aut} + \frac{a^2u^2}{s^3}e^{aut} + \cdots$$
$$= \frac{1}{s - au}$$

$\blacksquare$

ตัวอย่างที่ 4.3.4 แสดงการหา $N[\sin at]$

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ (3.3.10), ให้ $Q(t) = \sin at$

$$N[Q(t)] = \int_0^\infty e^{-st}Q(ut)dt = \lim_{x\to\infty}\left(e^{-st}\sum_{i=0}^\infty y_i\right)\Bigg|_0^x$$

จะได้
$$N[\sin at] = \int_0^\infty e^{-st}\sin autdt = \lim_{x\to\infty}\left(e^{-st}\sum_{i=0}^\infty y_i\right)\Bigg|_0^x$$

โดยวิธีการแยกอโดเมียนสามารถหา $y_0, y_1, y_2, \ldots$ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \frac{Q}{P} \\
&= -\frac{\sin aut}{s} \\
y_1 &= -\frac{1}{P} L\left(\frac{Q}{P}\right) \\
&= \frac{1}{s} L\left(-\frac{\sin aut}{s}\right) \\
&= \frac{1}{s}\left(-\frac{au}{s}\cos aut\right) \\
&= -\frac{au}{s^2}\cos aut \\
y_2 &= (-1)^2 \frac{1}{P^2} L^2\left(\frac{Q}{P}\right) \\
&= \frac{1}{s^2} L^2\left(-\frac{\sin aut}{s}\right) \\
&= \frac{1}{s^2} L\left(-\frac{au}{s}\cos aut\right) \\
&= \frac{a^2u^2}{s^3}\sin aut \\
y_3 &= (-1)^3 \frac{1}{P^3} L^3\left(\frac{Q}{P}\right) \\
&= \frac{1}{s^3} L^3\left(-\frac{\sin aut}{s}\right) \\
&= \frac{a^3u^3}{s^4}\cos aut
\end{aligned}
$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหา $y_4, y_5, \ldots$ ได้

ดังนั้น
$$
N[\sin at] = \lim_{x\to\infty}\left(e^{-st}\left(\begin{array}{l} \sin aut\left(-\frac{1}{s}+\frac{a^2u^2}{s^3}-\frac{a^4u^4}{s^5}+\cdots\right) \\ +\cos aut\left(-\frac{au}{s^2}+\frac{a^3u^3}{s^4}-\frac{a^5u^5}{s^6}+\cdots\right) \end{array}\right)\right)\Bigg|_0^x
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{au}{s^2}-\frac{a^3u^3}{s^4}+\frac{a^5u^5}{s^6}-\cdots \\
&= \frac{au}{s^2+a^2u^2}
\end{aligned}
$$

$\square$

ตัวอย่างที่ 4.3.5 แสดงการหา $N[\cos at]$

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ (3.3.10), ให้ $Q(t) = \cos at$

$$N[Q(t)] = \int_0^\infty e^{-st} Q(ut)dt = \lim_{x\to\infty}\left(e^{-st}\sum_{i=0}^{\infty} y_i \right)\Bigg|_0^x$$

จะได้ $$N[\cos at] = \int_0^\infty e^{-st} \cos autdt = \lim_{x\to\infty}\left(e^{-st}\sum_{i=0}^{\infty} y_i \right)\Bigg|_0^x$$

โดยวิธีการแยกอโดเมียนสามารถหา $y_0, y_1, y_2, \ldots$ ดังนี้

$$\begin{aligned}
y_0 &= \frac{Q}{P} \\
&= -\frac{\cos aut}{s} \\
y_1 &= -\frac{1}{P} L\left(\frac{Q}{P}\right) \\
&= \frac{1}{s} L\left(-\frac{\cos aut}{s}\right) \\
&= \frac{1}{s}\left(\frac{au}{s}\sin aut\right) \\
&= \frac{au}{s^2}\sin aut \\
y_2 &= (-1)^2 \frac{1}{P^2} L^2\left(\frac{Q}{P}\right) \\
&= \frac{1}{s^2} L^2\left(-\frac{\cos aut}{s}\right) \\
&= \frac{1}{s^2} L\left(\frac{au}{s}\sin aut\right) \\
&= \frac{a^2u^2}{s^3}\cos aut \\
y_3 &= (-1)^3 \frac{1}{P^3} L^3\left(\frac{Q}{P}\right) \\
&= \frac{1}{s^3} L^3\left(-\frac{\cos aut}{s}\right) \\
&= -\frac{a^3u^3}{s^4}\sin aut
\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหา $y_4, y_5, \ldots$ ได้

ดังนั้น $$N[\cos at] = \lim_{x\to\infty}\left(e^{-st}\left(\begin{array}{l} \sin aut\left(\frac{au}{s^2} - \frac{a^3u^3}{s^4} + \frac{a^5u^5}{s^6} - \cdots\right) \\ + \cos aut\left(-\frac{1}{s} + \frac{a^2u^2}{s^3} - \frac{a^4u^4}{s^5} + \cdots\right) \end{array}\right)\right)\Bigg|_0^x$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{a^2u^2}{s^3} + \frac{a^4u^4}{s^5} - \cdots$$

$$= \frac{s}{s^2 + a^2u^2}$$

$\square$

ตัวอย่างที่ 4.3.6 แสดงการหา $N[\sinh at]$

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ (3.3.10), ให้ $Q(t) = \sinh at$

$$N[Q(t)] = \int_0^\infty e^{-st} Q(ut)dt = \lim_{x\to\infty}\left(e^{-st}\sum_{i=0}^{\infty} y_i \right)\Bigg|_0^x$$

จะได้ $$N[\sinh at] = \int_0^\infty e^{-st} \sinh autdt = \lim_{x\to\infty}\left(e^{-st}\sum_{i=0}^{\infty} y_i \right)\Bigg|_0^x$$

โดยวิธีการแยกอโดเมียนสามารถหา $y_0, y_1, y_2, \ldots$ ดังนี้

$$y_0 = \frac{Q}{P}$$

$$= -\frac{\sinh aut}{s}$$

$$y_1 = -\frac{1}{P}L\left(\frac{Q}{P}\right)$$

$$= \frac{1}{s}L\left(-\frac{\sinh aut}{s}\right)$$

$$= \frac{1}{s}\left(-\frac{au}{s}\cosh aut\right)$$

$$= -\frac{au}{s^2}\cosh aut$$

$$y_2 = (-1)^2\frac{1}{P^2}L^2\left(\frac{Q}{P}\right)$$

$$= \frac{1}{s^2}L^2\left(-\frac{\sinh aut}{s}\right)$$

$$= \frac{1}{s^2}L\left(-\frac{au}{s}\cosh aut\right)$$

$$y_2 = -\frac{a^2u^2}{s^3}\sinh aut$$

$$y_3 = (-1)^3\frac{1}{P^3}L^3\left(\frac{Q}{P}\right)$$

$$= \frac{1}{s^3}L^3\left(-\frac{\sinh aut}{s}\right)$$

$$= -\frac{a^3u^3}{s^4}\cosh aut$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหา $y_4, y_5, \ldots$ ได้

ดังนั้น
$$N[\sinh at] = \lim_{x\to\infty}\left(e^{-st}\left(\begin{array}{l}\sin aut\left(-\frac{1}{s}-\frac{a^2u^2}{s^3}-\frac{a^4u^4}{s^5}-\cdots\right)\\ +\cos aut\left(-\frac{au}{s^2}-\frac{a^3u^3}{s^4}-\frac{a^5u^5}{s^6}-\cdots\right)\end{array}\right)\right)\Bigg|_0^x$$

$$N[\sinh at] = \frac{au}{s^2}+\frac{a^3u^3}{s^4}+\frac{a^5u^5}{s^6}+\cdots$$

$$= \frac{au}{s^2-a^2u^2}$$

$\square$

ตัวอย่างที่ 4.3.7 แสดงการหา $N[\cosh at]$

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ (3.3.10), ให้ $Q(t) = \cosh at$

$$N[Q(t)] = \int_0^\infty e^{-st}Q(ut)dt = \lim_{x\to\infty}\left(e^{-st}\sum_{i=0}^{\infty}y_i\right)\Bigg|_0^x$$

จะได้
$$N[\cosh at] = \int_0^\infty e^{-st}\cosh aut dt = \lim_{x\to\infty}\left(e^{-st}\sum_{i=0}^{\infty}y_i\right)\Bigg|_0^x$$

โดยวิธีการแยกอโดเมียนสามารถหา $y_0, y_1, y_2, \ldots$ ดังนี้

$$y_0 = \frac{Q}{P}$$

$$= -\frac{\cosh aut}{s}$$

$$y_1 = -\frac{1}{P}L\left(\frac{Q}{P}\right)$$

$$= \frac{1}{s}L\left(-\frac{\cosh aut}{s}\right)$$

$$= \frac{1}{s}\left(-\frac{au}{s}\sinh aut\right)$$

$$y_1 = -\frac{au}{s^2}\sinh aut$$

$$y_2 = (-1)^2 \frac{1}{P^2} L^2\left(\frac{Q}{P}\right)$$

$$= \frac{1}{s^2} L^2\left(-\frac{\cosh aut}{s}\right)$$

$$= \frac{1}{s^2} L\left(-\frac{au}{s}\sinh aut\right)$$

$$= -\frac{a^2u^2}{s^3}\cosh aut$$

$$y_3 = (-1)^3 \frac{1}{P^3} L^3\left(\frac{Q}{P}\right)$$

$$= \frac{1}{s^3} L^3\left(-\frac{\cosh aut}{s}\right)$$

$$= -\frac{a^3u^3}{s^4}\sinh aut$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหา $y_4, y_5, \ldots$ ได้

ดังนั้น $$N[\cosh at] = \lim_{x\to\infty}\left(e^{-st}\left(\begin{array}{l} \sinh aut\left(-\dfrac{au}{s^2} - \dfrac{a^3u^3}{s^4} - \dfrac{a^5u^5}{s^6} - \cdots\right) \\ + \cosh aut\left(-\dfrac{1}{s} - \dfrac{a^2u^2}{s^3} - \dfrac{a^4u^4}{s^5} - \cdots\right) \end{array}\right)\right)\Bigg|_0^x$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{a^2u^2}{s^3} + \frac{a^4u^4}{s^5} + \cdots$$

$$= \frac{s}{s^2 - a^2u^2}$$

$\square$

จากตัวอย่างที่ 4.3.1 - 4.3.7 สามารถสรุปได้ดังนี้

ตารางที่ 3 สรุปสูตรการแปลงธรรมชาติ โดยวิธีการแยกอโดเมียน

$f(t)$	$N[f(t)]$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{u}{s^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-au}$
$\sin at$	$\frac{au}{s^2+a^2u^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2u^2}$
$\sinh at$	$\frac{au}{s^2-a^2u^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2u^2}$

ในบทนี้เราได้แสดงการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น โดยการปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียน ดังตัวอย่างที่ 4.1.1 - 4.1.4 และตัวอย่างที่ 4.2.1 - 4.2.7 ตามลำดับ และได้แสดงการหาสูตรการแปลงธรรมชาติ โดยวิธีการแยกอโดเมียน ดังตัวอย่างที่ 4.3.1 - 4.3.7 และจะอภิปรายผลในบทที่ 5

บทที่ 5
สรุปและอภิปรายผล

จากผลการศึกษาในงานวิจัยครั้งนี้ ที่ศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น โดยการปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียน และการหาสูตรการแปลงธรรมชาติ โดยวิธีการแยกอโดเมียน สามารถสรุปได้ดังนี้

5.1 สรุปผลการศึกษา

5.1.1 กรณีศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นพร้อมกับเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} = g(x)$$
$$y(0) = \alpha_0, y'(0) = \alpha_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = \alpha_{n-1}$$

เมื่อ $F\left(x, y, \ldots, y^{(n-2)}\right)$ แทน ฟังก์ชันของอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นอันดับที่ $n-2$ และ $P(x) \neq 0$ และ $g(x)$ แทน พจน์แหล่งต้นทาง (Source Term)

สำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นนี้ จะใช้วิธีการหาผลเฉลย ที่เรียกว่า การปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียน ซึ่งมีขั้นตอนในการผลเฉลย ดังนี้

5.1.1.1 นิยามตัวดำเนินการเชิงเส้น $L(\cdot)$ ที่อยู่ในรูป

$$L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx} \frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\cdot)\right), n = 1,2,\ldots$$

5.1.1.2 ให้ผลเฉลย $y(x)$ อยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ จะได้

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i$$

ผลเฉลยที่ได้จะอยู่ในรูป

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i = \phi(x) + L^{-1}g(x)$$

เมื่อ $\quad L(\phi(x)) = 0$

และสามารถหา $y_i(x)$ ได้จากความสัมพันธ์เวียนเกิด (Recurrence Relation) ดังนี้

$$y_0 = \phi(x) + L^{-1}(g(x)),$$
$$y_{i+1} = 0,\ i \geq 0$$

5.1.2 กรณีศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นพร้อมด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} + F\left(x, y, \ldots, y^{(n-2)}\right) = g(x)$$
$$y(0) = \alpha_0, y'(0) = \alpha_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = \alpha_{n-1}$$

เมื่อ $F\left(x, y, \ldots, y^{(n-2)}\right)$ แทน ฟังก์ชันของอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นอันดับที่ $n-2$ และ $P(x) \neq 0$ และ $g(x)$ แทน พจน์แหล่งต้นทาง (Source Term)

สำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นนี้ จะใช้การปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียน ซึ่งมีขั้นตอนในการผลเฉลย ดังนี้

5.1.2.1 นิยามตัวดำเนินการเชิงเส้น $L(\cdot)$ ที่อยู่ในรูป

$$L(\cdot) = e^{-\int P(x)dx} \frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\cdot)\right), n = 1,2,\ldots$$

5.1.2.2 ให้ผลเฉลย $y(x)$ อยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ และฟังก์ชันไม่เชิงเส้นอยู่ในรูปของพหุนามอโดเมียน ตามลำดับ ดังนี้

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \quad \text{และ} \quad F\left(x, y, \ldots, y^{(n-2)}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$$

เมื่อ A_m คือ พหุนามอโดเมียน (Adomian Polynomials)

โดยที่ $$A_i = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{d\lambda^i} F\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k\right)\right]_{\lambda=0}, \ i = 0,1,2,\ldots$$

ผลเฉลยที่ได้จะอยู่ในรูป

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i = \phi(x) + L^{-1}g(x) - L^{-1}\left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right)$$

เมื่อ $L(\phi(x)) = 0$

ซึ่งสามารถหา $y_i(x)$ ได้จากความสัมพันธ์เวียนเกิด (Recurrence Relation) ดังนี้

$$y_0 = \phi(x) + L^{-1}g(x),$$
$$y_{i+1} = -L^{-1}(A_i), \ i \geq 0$$

จากการศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ทั้ง 2 กรณี โดยการปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียน จะพบว่า วิธีนี้จะช่วยลดการคำนวณและทำให้การคำนวณมีความซับซ้อนน้อยลง โดยจะรวมเทอมของฟังก์ชัน $y^{(n-1)}$ ไว้กับฟังก์ชัน $y^{(n)}$

5.1.3 กรณีศึกษาการหาสูตรการแปลงธรรมชาติ โดยวิธีการแยกอโดเมียน มีวิธีดำเนินการดังนี้

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

$$\frac{dy}{dt} + P(t)y = Q(ut)$$

$$y(0) = 0$$

ผลเฉลยที่ได้อยู่ในรูป $y(t)f(t) = \int f(t)Q(ut)dt$ (*)

เมื่อ $f(t) = e^{\int P(t)dt}$

โดยวิธีการแยกอโดเมียน ให้ $y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i$ และให้ $P(t) = -s\,;\; s > 0$

จากสมการ (*) จะได้

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i e^{-st} = \int_0^{\infty} e^{-st} Q(ut)dt$$

เพราะฉะนั้น จะได้ $N[Q(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} Q(ut)dt = \lim_{x\to\infty} \left(e^{-st} \sum_{i=0}^{\infty} y_i \right)\Bigg|_0^x$

เมื่อ

$$y_0 = \frac{Q}{P}$$

$$y_1 = -\frac{1}{P} L\left(\frac{Q}{P}\right)$$

$$y_2 = (-1)^2 \frac{1}{P^2} L^2\left(\frac{Q}{P}\right)$$

$$\vdots$$

$$y_i = (-1)^i \frac{1}{P^i} L^i\left(\frac{Q}{P}\right)$$

โดยที่ $L^i = \dfrac{d^i}{dt^i}\,;\; i \geq 0$

5.2 อภิปรายผลการศึกษา

5.2.1 ในงานวิจัยนี้ได้แนวคิดมาจากงานวิจัยของ Hosseini and Jafari (2009) โดยจะสนใจสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งในงานวิจัยนี้จะนำเสนอตัวอย่างของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 ไปยังอันดับสูง นั้นคือ มีการนำเสนอโดยใช้ตัวอย่างที่มีความซับซ้อนจากน้อยไปมาก ดังตัวอย่างที่ 4.1.1 – 4.1.4 และตัวอย่างที่ 4.2.1 – 4.2.7 ตามลำดับ โดยมีฟังก์ชันไม่เชิงเส้น $F\left(x, y, \ldots, y^{(n-2)}\right)$ เป็นฟังก์ชันของ $y^{(n-2)}$ ซึ่งในงานวิจัยของ Hosseini and Jafari (2009)

ไม่ได้นำเสนอไว้ และข้อดีของการปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียน คือ จะลดขั้นตอนในการคำนวณโดยการรวมเทอมของฟังก์ชัน $y^{(n-1)}$ ไว้กับฟังก์ชัน $y^{(n)}$

5.2.2 สำหรับงานวิจัยนี้ได้นำวิธีการแยกอโดเมียนไปประยุกต์กับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 เพื่อหาสูตรการแปลงธรรมชาติ โดยวิธีการแยกอโดเมียน ดังตัวอย่างที่ 4.3.1 – 4.3.7 ซึ่งจะพบว่าวิธีนี้เป็นวิธีที่ใหม่ โดยวิธีนี้จะใช้อนุพันธ์สำหรับหาสูตรการแปลงธรรมชาติ และเป็นวิธีที่ง่าย มีประสิทธิภาพ เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีปกติที่ใช้การหาปริพันธ์ เพราะการหาอนุพันธ์สามารถหาค่าได้กับทุกฟังก์ชัน แต่การหาปริพันธ์บางฟังก์ชันอาจจะมีค่าของปริพันธ์ที่ลู่ออกได้

5.3 ข้อเสนอแนะ

5.3.1 พัฒนาและปรับปรุงตัวดำเนินการ $L(\cdot)$ เพื่อนำไปหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น

5.3.2 นำการแปลงธรรมชาติร่วมกับวิธีการแยกอโดเมียน ไปหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ทั้งในแบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น

บรรณานุกรม

พิชากร แปลงประสพโชค. (2542). *สมการเชิงอนุพันธ์ แบบธรรมดา: ฉบับแนะนำ*. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

Adomian, G. (1988). A review of the decomposition method in applied mathematics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 135*, 501-544.

Adomian, G., & Rach, R. (1989). Equality of partial solutions in the decomposition method for linear or nonlinear partial differential equation. *Computers and Mathematics with Application, 19*(12), 9-12.

Al-Hayani, W. (2011). Adomian decomposition method with Green's function for sixth-order boundary value problems. *Computers and Mathematics with Application, 61*, 1567-1575.

Al-Khaled, K., & Anwar, M. N. (2007). Numerical comparison of method for solving second-Order ordinary initial value problems. *Applied Mathematical Modelling*, *31*, 292-301.

Babolian, E., & Biazar, J. (2002). Solution of nonlinear equation by modified adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation, 132*, 507-512.

Babolian, E., Biazar, J., & Vahidi, A. R. (2004). Solution of a system of nonlinear equations by Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation, 150*, 847- 854.

Babolian, E., Biazar, J., & Vahidi, A. R. (2004). A new computational method for Laplace transforms by decomposition method. *Applied Mathematics and Computation, 150*, 841-846.

Biazar, J., Babolian, E., & Islam, R. (2004). Solution of the system of ordinary differential equations by Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation, 147*, 713-719.

Babolian, E., Vahidi, A. R., & Cordshooli, GH. A. (2005). Solving differential equations by decomposition method. *Applied Mathematics and Computation, 167*, 1150-1155.

Bougoffa, L., & Bougoffa, S. (2006). Adomian method for solving some coupled systems of two equations. *Applied Mathematics and Computation, 177*, 553-560.

Casasus, L., & Al-Hayani, W. (2002). The decomposition method for ordinary differential equations with discontinuities. *Applied Mathematics and Computation, 131*, 245-251.

Ebaid, A. (2011). A new analytical and numerical treatment for singular two-point boundary value problem via the Adomian decomposition method. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 235*, 1914-1924.

El-Wakil, S. A., & Abdou, M. A. (2007). New applications of Adomian decomposition method. *Chaos, Solitons and Fractals, 33*, 513-522.

Hasan, Y. Q., & Zhu, L. M. (2009). Solving singular boundary value problems of higher-order ordinary differential equation by modified Adomian decomposition method. *Communications in Nonlinear Science Numerical Simulation, 14*, 2592-2596.

Hasan, Y. Q., & Zhu, L. M. (2009). A note on the use of modified Adomian decomposition method for solving singular boundary value problems of high-order ordinary differential equations. *Communications in Nonlinear Science Numerical Simulation, 14*, 3261-3265.

Hashim, I. (2006). Adomian decomposition method for solving BVPs for fourth order integro-differential equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics,193*, 658-664.

Hosseini, M. M., & Nasabzadeh, H. (2007). Modified Adomian decomposition method for specific second order ordinary differential equations. *Applied Mathematics and Computation, 186*, 117-123.

Hosseini, M. M., & Jafari, M. (2009). A note on use of Adomian decomposition method for high-order and system of nonlinear differential equations. *Communications in Nonlinear Science Numerical Simulation, 14*, 1952-1957.

Jafari, H., & Dafterdar-Gejji, G. (2006 a). Revised Adomian decomposition method for solving a system of ordinary and fractional differential equation. *Applied Mathematics and Computation, 181*, 598-608.

Jafari, H., & Dafterdar-Gejji, G. (2006 b). Revised Adomian decomposition method for solving a system of nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation, 175*, 1-7.

Kaya, D., & Yokus, A. (2002). A numerical comparison of partial solutions in the decomposition method for linear and nonlinear partial differential equations. *Mathematics and Computers in Simulation, 60*, 507-512.

Khan, Z .H., & Khan,W. A. (2008). N-transform properties and applications. *NUST Journal of Engineering Sciences*, *1*, 127-133.

Mahmood, A. S., Casasus, L., & Al-Hayani, W. (2005). The decomposition method for stiff System of ordinary differential equation. *Applied Mathematics and Computation, 167*, 964-975.

Momani, S., Moadi, K., & Noor, M. A. (2006). Decomposition method for solving a system of fourth-order obstacle boundary value problems. *Applied Mathematics and Computation, 175*, 923-931.

Momani, S., & Noor, M. A. (2006). Numerical method for fourth-order fractional integro-differential equations. *Applied Mathematics and Computation, 182*, 754-760.

Momani, S., & Noor, M. A. (2007). Numerical comparison of method for solving a special fourth-order boundary value problem. *Applied Mathematics and Computation, 191*, 218-224.

Pamuk, S. (2005). An application for linear and nonlinear heat equations by Adomian's decomposition method. *Applied Mathematics and Computation,163*, 89-96.

Rawashdeh, M. S., & Maitama, S. (2014). Solving coupled system of nonlinear PDEs using the natural decomposition method. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, *92*, 757-776.

Rawashdeh, M. S., & Maitama, S. (2015). Solving nonlinear ordinary differential equations using the NDM. *Journal of Applied Analysis and Computation,5*, 77-88.

Shang, X., & Han, D. (2010). Application of the variational iteration method for solving nth-order integro-differenfial equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 234*, 1442-1447.

Soufyane, A., & Boulmalf, M. (2005). Solution of linear and nonlinear parabolic equations by the decomposition method. *Applied Mathematics and Computation, 162*, 687-693.

Wazwaz, A. M. (2000). The decomposition method applied to systems of partial differential equations and to the reaction-diffusion Brusselator model. *Applied Mathematics and Computation, 110*, 251-264.

Wazwaz, A. M. (2001a). The numerical solution of fifth-order boundary value problem by the decomposition method. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 136*, 259-270.

Wazwaz, A. M. (2001b). A reliable algorithm for solving boundary value problem for higher-order integro-differential equations. *Applied Mathematics and Computation, 118*, 327-342.

Wazwaz, A. M. (2002). A new method for solving singular initial value problems in the second-order ordinary differential equations. *Applied Mathematics and Computation, 128*, 45-57.

Wazwaz, A. M., & El-Sayed, S. M. (2001). A new modification of the Adomian decomposition method for linear and nonlinear operators. *Applied Mathematics and Computation, 110*, 393-405.

Zhang, B., & Lu, J. (2011). Exact Solutions of homogeneous partial differential equation by a new Adomian decomposition method. *Procedia Environmental Sciences, 11*, 440-446.