

ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบอุปนัยและนิรนัย ที่มีต่อความสามารถ
ในการให้เหตุผล และความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์
เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ไพศาล แผลงทับทอง

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรการศึกษามหาบัณฑิต

สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์

คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

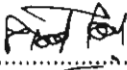
เมษายน 2558

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยบูรพา

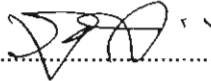
คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์และคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ได้พิจารณา
วิทยานิพนธ์ของ ไพศาล เมล่งทับทอง ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยบูรพาได้


คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์

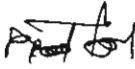
.......... อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก
(รองศาสตราจารย์ ดร.เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร)


.......... อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม
(ดร.คงรัฐ นवलเปง)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.......... ประธาน
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รุ่ง เจนจิต)

.......... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร)

.......... กรรมการ
(ดร.คงรัฐ นवलเปง)

.......... กรรมการ
(นาวาตรี ดร.พงศ์เทพ จิระโร)

คณะศึกษาศาสตร์อนุมัติให้รับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยบูรพา

.......... คณบดีคณะศึกษาศาสตร์
(รองศาสตราจารย์ ดร.วิจิต สุรัตน์เรืองชัย)

วันที่ 1 เดือน พฤษภาคม พ.ศ. 2558

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ สำเร็จได้เป็นอย่างดีด้วยความอนุเคราะห์จาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เวชฤทธิ์ อังคนะภัทรขจร อาจารย์ที่ปรึกษาหลักและ ดร.คงรัฐ นวลแปง อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ที่ได้เสียสละเวลาอันมีค่าเพื่อให้คำปรึกษาแนะนำ ตลอดจนแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ด้วยความเอาใจใส่ อย่างยิ่งตลอดมา ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในความกรุณาและความเป็นแบบอย่างของครูที่ดีของท่าน เป็นอย่างมาก จึงขอกราบขอบพระคุณไว้ ณ โอกาสนี้

ขอขอบพระคุณประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รุ่ง เจริญจิต และนางาตรี ดร.พงศ์เทพ จิระโร กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่กรุณาให้ความรู้ ให้คำปรึกษา ตลอดจนตรวจแก้ไขและวิจารณ์ผลงาน ทำให้งานวิจัยมีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น และผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่ให้ความอนุเคราะห์ในการตรวจสอบ รวมทั้งให้คำแนะนำแก้ไขเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ให้มีคุณภาพนอกจากนี้ยังได้รับความอนุเคราะห์จากผู้อำนวยการ โรงเรียนดัดดรุณี ตลอดจนคณะครู นักเรียน โรงเรียนดัดดรุณี ที่ให้ความร่วมมือเป็นอย่างดีในการเก็บรวบรวมข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย ทำให้วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จได้ด้วยดี

ขอขอบคุณสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ที่สนับสนุนทุนการศึกษาตลอดหลักสูตร และทุนการศึกษาในการทำวิจัยแก่นิสิต โครงการส่งเสริมการผลิตครูที่มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์(สควค.) ขอขอบคุณเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อพัฒนพงษ์ คุณแม่นริสา คุณปู่สำราญ คุณย่าละเมียด แมลงทับทอง และญาติ ๆ ทุกคนที่ให้กำลังใจ และสนับสนุนผู้วิจัยเสมอมา ขอขอบคุณพี่ ๆ เพื่อน ๆ สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ และสาขาวิชาการสอนวิทยาศาสตร์ ที่คอยให้กำลังใจและให้คำปรึกษาที่ดีเสมอมา

คุณความดีทั้งหลายอันเกิดจากการทำวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยขอมอบเป็นเครื่องบูชาพระคุณของ บิดา มารดา และครูอาจารย์ทุกท่านที่ประสิทธิ์ประสาทความรู้แก่ผู้วิจัยทั้งในอดีตและปัจจุบันทำให้ผู้วิจัยเป็นผู้มีการศึกษาและประสบความสำเร็จมาจนตราบเท่าทุกวันนี้

ไพศาล แมลงทับทอง

56910188: สาขาวิชา: การสอนคณิตศาสตร์; กศ.ม (การสอนคณิตศาสตร์)

คำสำคัญ: ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์/ ความสามารถในการสื่อสาร
ด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์/ ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น/ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้
แบบอุปนัยและนิรนัย

ไพศาล เมล่งทับทอง: ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบอุปนัยและนิรนัยที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผล และความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 (THE EFFECTS OF ORGANIZING INDUCTIVE AND DEDUCTIVE LEARNING ON MATHEMATICAL REASONING AND WRITTEN COMMUNICATION ABILITIES IN NUMBERS THEORY OF MATHAYOMSUKSA IV STUDENTS) คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์: เวชฤทธิ์ อังกะภัทรขจร, กศ.ด., คงรัฐ นวลเป่ง, กศ.ด., 152 หน้า. ปี พ.ศ. 2558.

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยกับเกณฑ์ร้อยละ 70 2) เปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียน ทางคณิตศาสตร์เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยกับเกณฑ์ร้อยละ 70

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/ 4 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2557 โรงเรียนคัตตฤณี จำนวน 1 ห้องเรียน ได้มาจากการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster random sampling) เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย 1) แผนการจัดการเรียนรู้ จำนวน 7 แผน 2) แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ มีค่าความเชื่อมั่น 0.84 สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล ได้แก่ ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และการทดสอบที (*t-test* for one sample)

ผลการวิจัยพบว่า

1. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

2. ความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

56920188: MAJOR: MATHEMATICS TEACHING; M.Ed.

(MATHEMATICS TEACHING)

KEYWORDS: MATHEMATICAL REASONING ABILITIES/ MATHEMATICAL WRITTEN
COMMUNICATION ABILITIES/ NUMBER THEORY/ ORGANIZING
INDUCTIVE AND DEDUCTIVE LEARNING

PAISAN MALANGTUPHONG: THE EFFECTS OF ORGANIZING INDUCTIVE
AND DEDUCTIVE LEARNING ON MATHEMATICAL REASONING AND WRITTEN
COMMUNICATION ABILITIES IN NUMBER THEORY OF MATHAYOMSUKSA IV
STUDENTS. ADVISORY COMMITTEE: VETCHARIT ANGGANAPATTARAKAJORN,
Ed.D., KONGRAT NUALPANG, Ed. D. 152 p. 2015.

The purposes of this research were 1) to compare mathematical reasoning ability on number theory for Mathayomsuksa IV students after learning with inductive and deductive learning activities and 2) to compare mathematical written communication ability on number theory for Mathayomsuksa IV students after learning with inductive and deductive learning activities.

The sample were 44 Mathayomsuksa IV students of the first semester in academic year B.E 2557 they were selected by cluster random sampling method. The research instruments used in this research consisted of; 1) seven number theory lesson plans and 2) Mathematical reasoning and written communication abilities test, with the reliability of 0.84. The statistical for analyzing the collected data were mean, standard deviation and t-test for one sample.

Research results were that

1. Mathematical reasoning ability in number theory for Mathayomsuksa IV students after learning with inductive and deductive learning activities was higher than the set criterion of 70% at 0.01 level of statistical significance.

2. Mathematical written communication ability in number theory of Mathayomsuksa IV students after learning with inductive and deductive learning activities was higher than the set criterion of 70% at 0.01 level of significance.

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
สารบัญ.....	ฉ
สารบัญตาราง.....	ซ
สารบัญภาพ.....	ญ
บทที่	
1 บทนำ.....	1
ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	6
สมมติฐานของการวิจัย.....	6
กรอบแนวคิดในการวิจัย.....	7
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย.....	8
ขอบเขตของการวิจัย.....	8
นิยามศัพท์เฉพาะ.....	9
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	11
หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551: กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์.....	12
หลักสูตรสถานศึกษาของ โรงเรียนดัดดรุณี: สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์.....	16
การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย.....	18
การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัย.....	26
ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์.....	34
ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์.....	42
งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	52
3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	55
ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง.....	55
เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.....	55
การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.....	56

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
การดำเนินการวิจัย.....	68
การเก็บรวบรวมข้อมูล.....	68
การวิเคราะห์ข้อมูล.....	71
สถิติที่ใช้ในการวิจัย.....	71
4 ผลการวิจัย.....	75
สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล.....	75
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	75
5 สรุปผล และอภิปรายผล.....	83
สรุปผลการวิจัย.....	84
อภิปรายผล.....	84
ข้อเสนอแนะ.....	88
บรรณานุกรม.....	90
ภาคผนวก.....	98
ภาคผนวก ก.....	99
ภาคผนวก ข.....	108
ภาคผนวก ค.....	138
ภาคผนวก ง.....	143
ภาคผนวก จ.....	145
ประวัติย่อของผู้วิจัย.....	152

สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
1	มาตรฐานและตัวชี้วัดที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย.....	15
2	ผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค31201.....	17
3	ผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติมที่ใช้ในการวิจัย.....	18
4	ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัย.....	33
5	เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของ กระทรวงศึกษาธิการ.....	40
6	เกณฑ์การประเมินวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของอติสร วมชั้น.....	41
7	เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์.....	42
8	เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการสื่อสาร ทางคณิตศาสตร์ของ กระทรวงศึกษาธิการ.....	50
9	เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการสื่อสาร ทางคณิตศาสตร์ของสถาบัน ส่งเสริมการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.....	51
10	เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์...	51
11	การวิเคราะห์แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น.....	57
12	การวิเคราะห์แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถ ในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น.....	64
13	แบบแผนการวิจัย.....	68
14	เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์.....	69
15	เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์.....	71
16	การเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์กับ เกณฑ์ร้อยละ 70.....	76
17	การเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียน ทางคณิตศาสตร์ กับเกณฑ์ร้อยละ 70.....	80

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่		หน้า
18	ค่าดัชนีความสอดคล้องของแผนการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัย วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4...	139
19	ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและ ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ด้านการเขียน เรื่อง ทฤษฎีจำนวน เบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ แบบอุปนัยและนิรนัย.....	139
20	ค่าความยากง่าย ค่าอำนาจจำแนก และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัด ความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ด้านการเขียนเรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4.....	140
21	คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทาง คณิตศาสตร์ด้านการเขียนเรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4..	140

สารบัญญภาพ

ภาพที่		หน้า
1	กรอบแนวคิดในการวิจัย.....	7
2	ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 1 ด้านความสามารถในการให้เหตุผล ทางคณิตศาสตร์.....	77
3	ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 2 ด้านความสามารถในการให้เหตุผล ทางคณิตศาสตร์.....	77
4	ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 3 ด้านความสามารถในการให้เหตุผล ทางคณิตศาสตร์.....	78
5	ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 4 ด้านความสามารถในการให้เหตุผล ทางคณิตศาสตร์.....	79
6	ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 1 ด้านความสามารถในการให้ เหตุผลทางคณิตศาสตร์.....	79
7	ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 1 ด้านความสามารถในการสื่อสาร ด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์.....	81
8	ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 2 ด้านความสามารถในการสื่อสาร ด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์.....	81
9	ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 3 ด้านความสามารถในการสื่อสาร ด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์.....	82

บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

แผนพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ ฉบับที่ 11 (พ.ศ. 2555-2559) ประเทศไทยได้ให้ความสำคัญต่อการเตรียมความพร้อมคน สังคม และระบบเศรษฐกิจของประเทศให้สามารถปรับตัวเพื่อรองรับผลกระทบจากการเปลี่ยนแปลงในด้านต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสมโดยให้ความสำคัญกับการพัฒนาคนและสังคมไทยให้มีคุณภาพ มีโอกาสเข้าถึงทรัพยากรและได้รับประโยชน์จากการพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมอย่างเป็นธรรม รวมทั้งการสร้างโอกาสทางเศรษฐกิจด้วยฐานความรู้ เทคโนโลยี นวัตกรรม และความคิดสร้างสรรค์ (สำนักงานคณะกรรมการพัฒนาการเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ, 2554, หน้า ๗) ดังนั้นจะเห็นว่าการจัดการศึกษาจึงมุ่งพัฒนาคนให้มีคุณภาพทั้งทางด้านสติปัญญาความรู้ ทักษะและกระบวนการต่าง ๆ รวมทั้งสภาพทางด้านจิตใจทั้งนี้เพื่อเน้นกระบวนการเรียนรู้กระบวนการในการพัฒนาการศึกษาโดยยึดนักเรียนเป็นศูนย์กลางของการพัฒนาให้นักเรียนจัดการเรียนรู้ด้วยตนเองในรูปแบบและวิธีที่หลากหลายตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 แก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ. 2545 หมวด 4 เสนอว่า การจัดการศึกษาต้องยึดหลักว่านักเรียนทุกคนมีความสามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเองได้ และถือว่านักเรียนมีความสำคัญที่สุดกระบวนการจัดการศึกษาต้องส่งเสริมให้นักเรียนสามารถพัฒนาตามธรรมชาติ และเต็มตามศักยภาพ เพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ดังกล่าว ครูผู้สอนและสถาบันการศึกษาจึงต้องมุ่งส่งเสริมและพัฒนาให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ที่เหมาะสม

ด้วยเหตุนี้กระทรวงศึกษาธิการจึงได้ประกาศใช้หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 โดยที่การจัดการเรียนรู้ในหลักสูตรดังกล่าวได้ให้ความสำคัญต่อการพัฒนา นักเรียนทางด้านการคิด รวมทั้งการตระหนักและคำนึงถึงการสอดแทรกแนวคิดที่จะพัฒนาความสามารถด้านต่าง ๆ ของนักเรียน (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2555 ก, หน้า 31) ซึ่งวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาหนึ่งที่มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล มีการคิดอย่างมีวิจารณญาณและเป็นระบบ ตลอดจนมีทักษะการแก้ปัญหาทำให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้องเหมาะสม นอกจากนี้ คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่น ๆ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2555 ก,

หน้า 1) ดังนั้นคณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต ช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้นและสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์จึงมุ่งให้เยาวชนทุกคนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่องตามศักยภาพโดยกำหนดสาระหลักที่จำเป็นสำหรับนักเรียนตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานได้แบ่งคณิตศาสตร์ออกเป็น 6 สาระการเรียนรู้ได้แก่ สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ สาระที่ 2 การวัด สาระที่ 3 เรขาคณิต สาระที่ 4 พีชคณิต สาระที่ 5 การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น และสาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย ทักษะการแก้ปัญหา ทักษะการให้เหตุผล ทักษะการสื่อสาร ทักษะการเชื่อมโยง และทักษะการคิดริเริ่มสร้างสรรค์ (สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา, 2551, หน้า 1-2)

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เป็นสาระหนึ่งในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ที่นักการศึกษาคณิตศาสตร์ตระหนักถึงความสำคัญและความจำเป็นที่จะส่งเสริมให้เกิดการพัฒนาในทุก ๆ ระดับชั้น (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2555 ข, หน้า 4) ซึ่งทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์หนึ่งที่มีความสำคัญต่อการพัฒนาให้เกิดขึ้นกับนักเรียนคือ ทักษะการให้เหตุผล อันเป็นหัวใจสำคัญของการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เนื่องจากวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เป็นนามธรรม ซึ่งการให้เหตุผลเป็นเครื่องมือที่จะเข้าใจนามธรรมนั้น (Russell, 1999, p. 1) และการให้เหตุผลยังเป็นพื้นฐานของการเรียนและการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ นักเรียนจะไม่สามารถดำเนินการทางคณิตศาสตร์ได้โดยปราศจากการให้เหตุผล ซึ่งการแสดงเหตุผลที่ดีมีคุณค่ามากกว่าการที่นักเรียนหาคำตอบได้ (สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (The national council of teachers of mathematics) (NCTM), 1989, p. 6, 29, 81) นอกจากนี้ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ ก็เป็นทักษะหนึ่งที่มีส่วนเกี่ยวข้องและเกิดควบคู่ไปกับทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ทั้งสองทักษะถือได้ว่ามีความสำคัญและมีความเกี่ยวข้องกัน ดังที่ Fensell & Rowan (2001, p. 289) ได้กล่าวว่า ทักษะการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่ช่วยสนับสนุนการให้เหตุผล ซึ่งการสื่อสารทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถของผู้เรียนในการอธิบาย ชี้แจง แสดงความเข้าใจเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ของตนเองให้ผู้อื่นได้รับรู้ ตัวอย่างของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ คือ การใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการอธิบายขั้นตอน การแสดงเหตุผลเพื่อสนับสนุนข้อสรุปที่ได้ (อัมพร ม้าคนอง, 2547, หน้า 102-103) ซึ่งนักการศึกษาหลายท่านให้ความเห็นว่าการให้ผู้เรียนสื่อสาร โดยการเขียนเป็นสิ่งจำเป็น (Bicknell, 1999; Campbell & Rowan, 1997 อ้างถึงใน อัมพร ม้าคนอง, 2547, หน้า 102-103) เนื่องจากการเขียนให้ผู้อื่นอ่าน ผู้เรียนจะต้องใช้ความระมัดระวังมากกว่าการพูดจึงต้องมีการทบทวนไตร่ตรองให้แน่ใจว่า

ความหมายของสิ่งที่กำลังอธิบายนั้นชัดเจนและตรงตามที่ตนเองต้องการ (อัมพร ม้าคนอง, 2547, หน้า 102-103) ดังนั้นทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนจึงเป็นทักษะหนึ่งที่ทำให้ นักเรียนได้ฝึกการเขียนแสดงแนวคิดของตนเอง เพื่อให้ให้นักเรียนได้เห็นว่า การเขียนเป็นส่วนสำคัญ ของการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ (Rowan & Morrow, 1993, pp. 9-11, 324) ซึ่งการสื่อสาร ทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนยังช่วยเสริมสร้างความเข้าใจในเนื้อหาที่เรียนอย่างลึกซึ้ง อันก่อให้เกิด เป็นความเข้าใจร่วมกันระหว่างนักเรียนและยังช่วยให้ผู้สอนสามารถมองเห็นความเข้าใจของ นักเรียนได้อีกด้วย (Mumme & Shepherd, 1993, pp. 7-9; NCTM, 1989, p. 29)

จากผลการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์พบว่านักเรียนส่วนใหญ่ยังขาด ความสามารถในการแสดงหรือการให้เหตุผลซึ่งเป็นเป้าหมายหลักในการเรียนคณิตศาสตร์และ ยังมีนักเรียนเป็นจำนวนมากไม่สามารถบรรลุเป้าหมายนี้ (วัชรวิ กาญจน์ศิริ, 2554, หน้า 64; สถาบัน ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2555 ข, หน้า 1) นอกจากนี้ยังพบว่านักเรียนไม่สามารถ สื่อสารวิธีการคิดของตนเอง รวมทั้งไม่สามารถสร้างความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนกับสถานการณ์ โจทย์ปัญหาได้ อีกทั้งการให้เหตุผลของนักเรียนยังไม่สมเหตุสมผล มักจะเป็นการอธิบายโดยขาด หลักการอ้างอิงที่ถูกต้อง (กิตติ พัฒนตระกูลสุข, 2546, หน้า 54-58) และจากการสัมภาษณ์ ครูผู้สอน ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ โรงเรียนดัดดรุณี อำเภอ เมือง จังหวัด ฉะเชิงเทรา พบว่า การจัดการเรียนการสอนที่ผ่านมา นักเรียนไม่สามารถสื่อสาร ทางคณิตศาสตร์ผ่านการเขียนได้ กล่าวคือ นักเรียนไม่สามารถใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ในการเขียนอธิบายขั้นตอนในการแก้ปัญหาหรือขั้นตอนในการพิสูจน์ได้รวมทั้งนักเรียนยังประสบ ปัญหาในเรื่องของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ กล่าวคือ นักเรียนไม่สามารถให้เหตุผลประกอบแต่ละ ขั้นตอนในการแก้ปัญหาหรือการพิสูจน์ได้ โดยเฉพาะเรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ซึ่งมีเนื้อหาที่เน้น การเขียนอธิบายขั้นตอนในการพิสูจน์ หรือแสดงขั้นตอนในการแก้ปัญหารวมทั้งเน้นการเขียน เพื่อแสดงเหตุผลประกอบแต่ละขั้นตอนของการพิสูจน์และการแก้ปัญหา แต่ที่ผ่านมา นักเรียน เป็นเพียงผู้จดตามครูผู้สอนเท่านั้นเนื่องจากนักเรียนไม่สามารถถ่ายทอดกระบวนการคิดการแสดง เหตุผลผ่านขั้นตอนการเขียนอธิบายออกมาได้ (ชวิทธิ์ เทศดี, สัมภาษณ์, 24 มีนาคม 2557)

นอกจากนี้จากการดำเนินการทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการ สื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา ปีที่ 4/ 4 เรื่อง จำนวนจริง ก่อน การดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัย พบว่า ความสามารถในการให้เหตุผล ทางคณิตศาสตร์ มีคะแนนเฉลี่ยร้อยละ 6.36 และความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียน ทางคณิตศาสตร์ มีคะแนนเฉลี่ยร้อยละ 23.18 ซึ่งเป็นคะแนนเฉลี่ยที่ต่ำกว่าเกณฑ์ตามที่

กระทรวงศึกษาธิการได้กำหนดไว้ ดังนั้นจากสภาพปัญหาดังกล่าวจึงควรเร่งพัฒนาทักษะ การให้เหตุผล และการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

จากข้อมูลดังกล่าวสาเหตุหนึ่งอาจเกิดจากปัญหาการจัดการกระบวนการเรียนการสอน คณิตศาสตร์ในห้องเรียนซึ่งครูยังเน้นความจำมากกว่ากระบวนการคิด เป็นการอธิบายและแสดง เหตุผลกำกับไว้โดยครูผู้สอนเอง และการดำเนินการสอนของครูเป็นลักษณะของรูปแบบ การสื่อสารทางเดียว ไม่ค่อยมีปฏิสัมพันธ์ระหว่างครูกับนักเรียน การโต้ตอบระหว่างครูกับนักเรียน เป็นเพียงการซักถามที่อยู่ในรูปของประโยคปิด เช่น ใช่หรือไม่ ถูกต้องหรือไม่เพียงเท่านั้น ไม่ได้ ปลูกฝังให้นักเรียนเป็นคนที่ช่างสังเกต รู้จักการสำรวจ การตั้งข้อคำถามพร้อมทั้งให้เหตุผล เชิงพิสูจน์ต่าง ๆ ได้ด้วยตนเอง ซึ่งลักษณะการเรียนการสอนดังกล่าวอาจถือได้ว่าเป็นการปิดกั้น การแสดงออกทางความคิดการให้เหตุผลของนักเรียน (กิตติ พัฒนตระกูลสุข, 2546, หน้า 54-58) อีกทั้งยังมีนักเรียนที่อ้างว่าคิดแก้ปัญหาได้ หาเหตุผลได้ แต่ไม่สามารถอธิบายหรือเขียนแสดง ออกมาได้จึงเป็นหน้าที่ของครูจะต้องช่วยกันคิดแก้ปัญหาด้านการสื่อสารต่อไป (สถาบันส่งเสริม การสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2551, หน้า 73) และจะต้องมีการปรับเปลี่ยนการจัดกิจกรรม การเรียนรู้คณิตศาสตร์ ทั้งในแง่เนื้อหา วิธีสอน กิจกรรมพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ที่สำคัญ (สำนักคณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์, 2547, หน้า 4) ดังนั้น การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ในโรงเรียนจึงต้องมีการปรับปรุงและพัฒนาให้เหมาะสมกับความเจริญในโลกปัจจุบันเพื่อให้นักเรียน เป็นผู้ที่มีความรู้ความสามารถด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์อย่างมีประสิทธิภาพ

แนวทางในการปรับปรุงการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ครูผู้สอนจะต้องคำนึงถึง การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นที่นักเรียนเป็นสำคัญ ผู้สอนจะต้องคำนึงถึงระดับ ความสามารถและวุฒิภาวะของผู้เรียน โดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้จะต้องเริ่มจากง่ายไปยาก จากรูปธรรมไปสู่นามธรรม ซึ่งการจัดกิจกรรมการเรียนรู้จะต้องส่งเสริมให้นักเรียนได้เกิด การค้นคว้า การสังเกตกรณีตัวอย่าง เปรียบเทียบและวิเคราะห์อันนำมาซึ่งข้อสรุปข้อความรู้โดยตัว นักเรียนเอง (ชาญชัย อาจินสมาจาร, 2542, หน้า 63) ตลอดจนต้องจัดการเรียนรู้ให้นักเรียนได้เรียนรู้ เนื้อหา ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์และพัฒนาไปพร้อม ๆ กันด้วยเหตุนี้ ผู้วิจัยจึงได้ ทำการศึกษาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบต่าง ๆ เพื่อพัฒนาการเรียนการสอนให้บรรลุ จุดมุ่งหมายที่ตั้งไว้ ซึ่งการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่น่าสนใจแบบหนึ่ง คือ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ แบบอุปนัยและนิรนัย

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยเป็นการจัดการเรียนการสอนแบบหนึ่ง ที่สามารถพัฒนานักเรียนให้สามารถสร้างองค์ความรู้ได้ด้วยตนเอง โดยเน้นนักเรียนเป็นสำคัญ

ซึ่ง ชมนาด เชื้อสุวรรณทวิ (2542, หน้า 70) กล่าวว่า การสอนแบบอุปนัยเป็นการสอนที่เริ่มต้นด้วยการยกตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่างเพื่อให้นักเรียนเห็นรูปแบบ นักเรียนต้องใช้การสังเกตเปรียบเทียบรูปแบบที่เหมือนกัน มีลักษณะร่วมกันนำไปสู่ข้อสรุป ซึ่งเป็นการค้นพบด้วยการสังเกตฝึกสัมผัสฝึกทักษะกระบวนการคิด การให้เหตุผล ช่างสังเกตและสามารถหาข้อสรุปได้ด้วยตนเองซึ่งกระบวนการดังกล่าวจะเกิดควบคู่ไปกับกระบวนการการสื่อสาร เนื่องด้วยการสื่อสารจะเป็นตัวสนับสนุน และช่วยขยายการให้เหตุผลต่าง ๆ เหล่านี้ (Fensell and Rowan, 2001, p.289) และการส่งเสริมให้นักเรียนมีทักษะกระบวนการคิด การให้เหตุผล จะช่วยส่งเสริมความสามารถในการสื่อสารของนักเรียนด้วย (NCTM, 2000, pp. 270-272) นอกจากนี้การสอนแบบอุปนัยยังเป็นวิธีพื้นฐานของการหาเหตุผลจากส่วนย่อยไปหาส่วนรวมซึ่งมีจุดมุ่งหมายเพื่อที่จะหาข้อเท็จจริงทั่ว ๆ ไปอีกด้วย (Sidhu, 1981, pp. 106-108) และการสอนแบบนิรนัยเป็นการสอนที่เน้นให้นักเรียนสามารถนำหลักการหรือทฤษฎีที่ค้นพบนั้นไปใช้ในการแก้ปัญหา ทำความเข้าใจให้เกิดความคิดรวบยอดและส่งเสริมให้นักเรียนมีโอกาสได้ฝึกฝนการนำทฤษฎี/ หลักการ ไปใช้ในสถานการณ์ใหม่ (ทศนา เขมมณี, 2556, หน้า 338) ซึ่งข้อดีของการสอนแบบนิรนัยจะช่วยให้ นักเรียนเป็นคนมีเหตุผลไม่เชื่ออะไรง่าย ๆ โดยไม่มีการตรวจสอบหรือพิสูจน์ให้เห็นจริง (สิริพร ทิพย์คงย์, 2545, หน้า 148) จากแนวคิดของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัยดังกล่าวทำให้ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะนำแนวคิดการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยมาใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ซึ่งเป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เริ่มจากการศึกษารายละเอียด ตัวอย่าง เพื่อนำไปสู่ข้อสรุป หลักการ หรือกฎเกณฑ์ต่าง ๆ โดยที่นักเรียนจะต้องสามารถนำ ข้อสรุป หลักการ หรือกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ดังกล่าว ที่สังเคราะห์ขึ้น ไปใช้ในการแก้ปัญหา หรือ นำมาใช้ในการให้เหตุผลประกอบการพิสูจน์ได้ นอกจากนี้ผู้วิจัยได้ศึกษา งานวิจัยที่เกี่ยวกับ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย และนิรนัยที่ส่งผลต่อความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์พบว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัย ทำให้ความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ สูงกว่าก่อนเรียนและสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 (ชินรัตน์ สัจธรรม, 2556, หน้า 127) การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัย ยังทำให้ความสามารถในการให้เหตุผลสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 (ปวีกันท์ พันธุ์สุข, 2552, หน้า 68) ดังนั้น การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยจึงน่าจะเป็นการสอนรูปแบบหนึ่งที่จะช่วยพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านการให้เหตุผล และด้านการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

จากเหตุผลที่กล่าวมาผู้วิจัยจึงมีแนวความคิดในการออกแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัย ที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผล และความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เนื่องจากเรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นมีเนื้อหาที่มีความสัมพันธ์กับการใช้เหตุผลและการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ในการอธิบายทฤษฎีหรือหลักการต่าง ๆ ที่นักเรียนค้นพบขึ้นจากกระบวนการสอนแบบอุปนัย และนักเรียนสามารถนำทฤษฎีหรือหลักการต่าง ๆ ไปประยุกต์ใช้ในการพิสูจน์ การแก้ปัญหาต่าง ๆ ได้ ด้วยกระบวนการสอนแบบนิรนัย ดังนั้นในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้จะเป็นแนวทางในการพัฒนาการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์สำหรับครูและผู้ที่เกี่ยวข้องเพื่อปรับปรุงคุณภาพในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

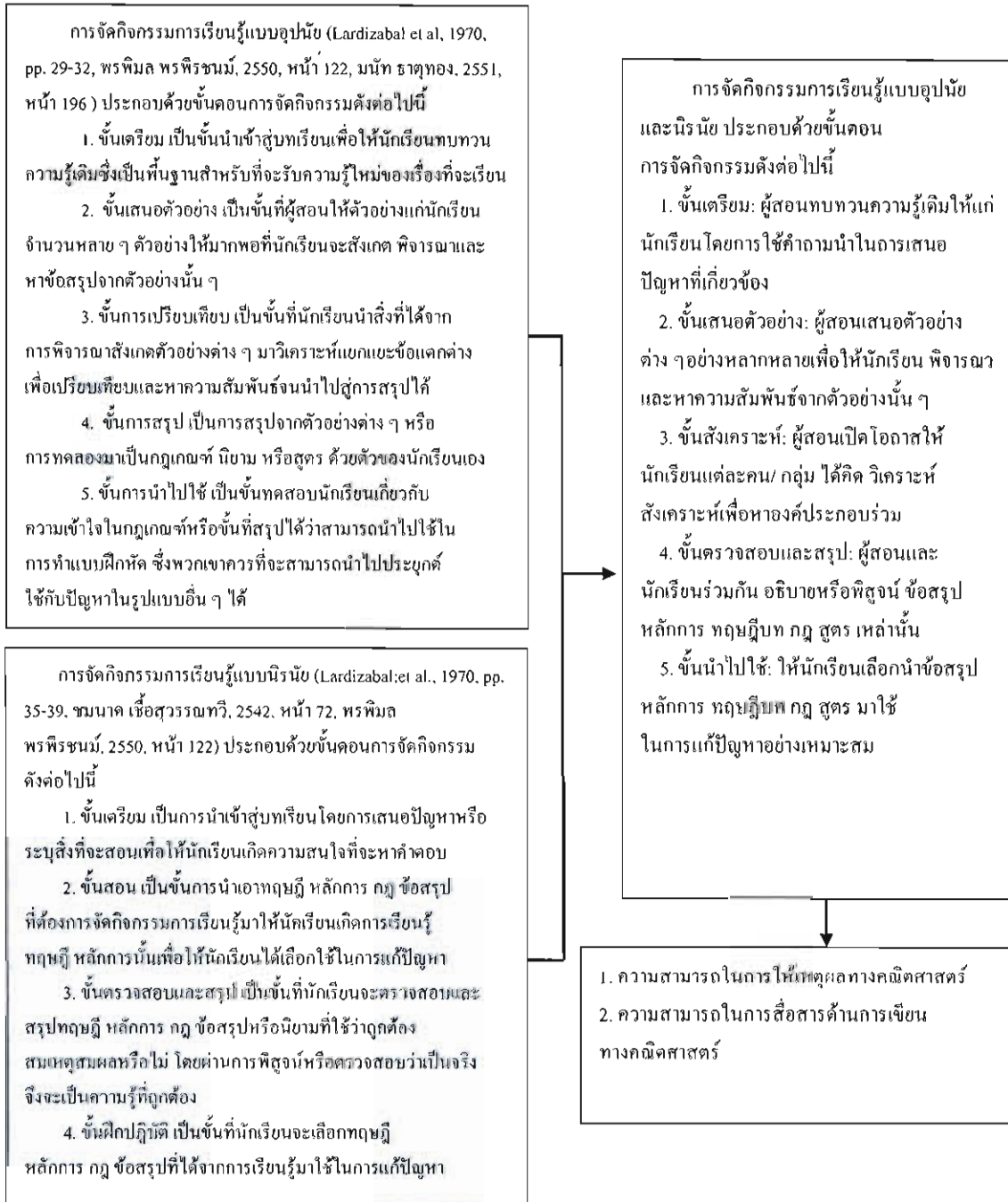
วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยกับเกณฑ์ร้อยละ 70
2. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยกับเกณฑ์ร้อยละ 70

สมมติฐานของการวิจัย

1. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01
2. ความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

กรอบแนวคิดในการวิจัย



ภาพที่ 1 กรอบแนวคิดในการวิจัย

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

1. ได้แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัย ที่สามารถนำมาใช้ในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผล และความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น
2. เป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผล และความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียน ทางคณิตศาสตร์

ขอบเขตของการวิจัย

1. ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

1.1 ประชากร

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ โรงเรียนดัดดรุณี อำเภอเมือง จังหวัด ฉะเชิงเทรา จำนวน 4 ห้องเรียน

1.2 กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/ 4 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2557 โรงเรียนดัดดรุณี อำเภอเมือง จังหวัด ฉะเชิงเทรา จำนวน 44 คน ได้มาจากการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster random sampling) ซึ่งทางโรงเรียนจัดห้องเรียนแบบความสามารถของนักเรียน คือมีทั้งเรียนที่มีความสามารถในการเรียนระดับ เก่ง ปานกลาง และอ่อน ในห้องเดียวกัน ใช้คะแนนจากการสอบคัดเลือกเข้าเรียนเป็นเกณฑ์

2. เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นเนื้อหารายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค31201 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามหลักสูตรสถานศึกษาของโรงเรียนดัดดรุณี กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ประกอบด้วยเนื้อหา ดังนี้

- 2.1 การหารลงตัว
- 2.2 ขั้นตอนวิธีการหาร
- 2.3 ตัวหารร่วมมาก
- 2.4 ตัวคูณร่วมน้อย

3. ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ดำเนินการวิจัยในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2557 ซึ่งใช้เวลาในการทำวิจัยทั้งหมด 15 คาบ คาบละ 50 นาที แบ่งเป็นการสอน 13 คาบ และการทดสอบหลังเรียน 2 คาบ

4. ตัวแปรที่ใช้ในการวิจัย

4.1 ตัวแปรอิสระ ได้แก่ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนินัย

4.2 ตัวแปรตาม ได้แก่

4.2.1 ความสามารถในการให้เหตุผล ทางคณิตศาสตร์

4.2.2 ความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย หมายถึง การจัดกระบวนการเรียนรู้ที่มองจากรูปธรรมไปสู่สิ่งที่เป็นนามธรรมและจากตัวอย่างไปสู่กฎเกณฑ์ทั่ว ๆ ไป ซึ่งนักเรียนจะต้องศึกษาวิเคราะห์ใช้การสังเกตเปรียบเทียบจากนั้นจึงนำส่วนสำคัญที่มีเหมือนหรือคล้ายกันมาสรุปเป็นกฎเกณฑ์ทั่ว ๆ ไป รายละเอียดต่าง ๆ ที่สัมพันธ์กันนั้นจะนำไปสู่ข้อสรุป บทนิยาม กฎ หลักการ หรือสูตรนั่นเอง และสามารถนำหลักการดังกล่าวไปใช้ในการแก้ปัญหาได้

2. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนินัย หมายถึง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เริ่มจากข้อสรุปทั่ว ๆ ไปแล้วนำไปประยุกต์ใช้กับตัวอย่างต่าง ๆ ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนฝึกการนำทฤษฎี/หลักการ/กฎ หรือข้อสรุปนั้นไปใช้ในการพิสูจน์การแสดงเหตุผลประกอบการพิสูจน์ต่าง ๆ รวมทั้งการนำทฤษฎี/หลักการ/กฎ หรือข้อสรุปนั้นไปใช้ในสถานการณ์ใหม่ ๆ ที่หลากหลาย เพื่อช่วยให้ผู้เรียนมีความเข้าใจในทฤษฎี/หลักการ/กฎหรือข้อสรุปนั้น ๆ อย่างลึกซึ้งขึ้น

3. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนินัย หมายถึง การจัดกระบวนการเรียนรู้ที่เริ่มจากการศึกษาจากรายละเอียด ตัวอย่าง เพื่อนำไปสู่ข้อสรุป หลักการ หรือกฎเกณฑ์ต่าง ๆ โดยที่นักเรียนจะต้องสามารถนำ ข้อสรุป หลักการ หรือกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ดังกล่าว ที่สังเคราะห์ขึ้นไปใช้ในการแก้ปัญหา หรือ นำมาใช้่างในการพิสูจน์ การให้เหตุผล ที่สมเหตุสมผลถูกต้องและชัดเจน โดยมีกระบวนการในการจัดการเรียนรู้ ดังนี้

3.1 ขั้นเตรียม: ผู้สอนทบทวนความรู้เดิมให้แก่ นักเรียน โดยการใช้คำถามนำในการเสนอปัญหาที่เกี่ยวข้อง เพื่อให้ นักเรียนเกิดความสนใจที่จะหาคำตอบ จากนั้นผู้สอนแจ้งจุดประสงค์ของการเรียนในหัวข้อนั้น ๆ

3.2 ขั้นเสนอตัวอย่าง: ผู้สอนเสนอตัวอย่างต่าง ๆ อย่างหลากหลายเพื่อให้ นักเรียนแต่ละคนได้วิเคราะห์ สังเกต พิจารณาและหาความสัมพันธ์จากตัวอย่างนั้น ๆ ด้วยตัวของนักเรียนเอง

3.3 ขั้นสังเคราะห์: ผู้สอนเปิดโอกาสให้นักเรียนแต่ละคน/กลุ่ม ได้คิด วิเคราะห์ สังเคราะห์เพื่อหาองค์ประกอบร่วม ซึ่งพิจารณาถึงความเหมือนหรือความต่างจากกรณีตัวอย่าง

ที่ผู้สอนยกเป็นกรณีศึกษา โดยผู้สอนจะใช้คำถามนำเพื่อให้นักเรียน เกิดกระบวนการคิด
อันนำมาซึ่งข้อคาดการณ์หรือข้อค้นพบด้วยตัวนักเรียนเอง

3.4 ขั้นตรวจสอบและสรุป: ผู้สอนและนักเรียนร่วมกัน อธิบายหรือพิสูจน์ ข้อสรุป
หลักการ ทฤษฎีบท กฎ สูตร เหล่านี้ขึ้นอีกครั้งหนึ่งเพื่อให้นักเรียน ได้เกิดการเรียนรู้ โดยผู้สอนจะใช้
คำถามนำแต่ละขั้นตอนของการอธิบายหรือการพิสูจน์ เพื่อให้ผู้เรียนเห็นภาพและเกิดความเข้าใจ
มากยิ่งขึ้น

3.5 ขั้นนำไปใช้: ให้นักเรียนเลือกนำข้อสรุป หลักการ ทฤษฎีบท กฎ สูตร มาใช้ในการ
การแก้ปัญหาอย่างเหมาะสมเพื่อให้นักเรียนเข้าใจในสิ่งที่ตนเองสรุปมาได้ อย่างลึกซึ้งและชัดเจน
มากขึ้นรวมทั้งการนำความรู้มาประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ใหม่ ๆ ที่หลากหลายได้อีกด้วย

2. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการแสดง
แนวคิดขั้นตอนในการหาคำตอบหรือการพิสูจน์ และแสดงเหตุผลสนับสนุนคำตอบหรือขั้นตอน
การพิสูจน์เหล่านั้น เพื่อยืนยันข้อสรุป โดยการอ้างอิงหลักการและแนวคิด รวมทั้ง ทฤษฎีบท กฎ
สูตร และนิยามต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้อง อย่างสมเหตุสมผล

3. ความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถ
ในการใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการเขียนแสดงขั้นตอนในการหาคำตอบหรือ
การพิสูจน์รวมทั้งการเขียนแสดงเหตุผลสนับสนุนคำตอบหรือขั้นตอนการพิสูจน์เหล่านั้น
ได้อย่างถูกต้อง ครบถ้วน ตามหลักการทางคณิตศาสตร์

4. เกณฑ์ หมายถึง คะแนนขั้นต่ำที่ยอมรับได้ กล่าวคือ นักเรียนต้องได้คะแนนในการทำ
แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผล และความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียน
ทางคณิตศาสตร์ ตั้งแต่ร้อยละ 70 ขึ้น ไปของคะแนนรวม ถือว่าผู้นั้นสอบผ่านเกณฑ์ ซึ่งเป็นเกณฑ์
ที่อยู่ในระดับดีขึ้นไปตามที่ กระทรวงศึกษาธิการ (2552 ก, หน้า 23) ได้กำหนดไว้

5. แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสาร
ด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ หมายถึง เครื่องมือที่ใช้ในการวัดความสามารถในการให้เหตุผล
และความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัย ได้สร้างขึ้นเป็นแบบอัตโนมัติ
จำนวน 10 ข้อ

6. นักเรียน หมายถึง ผู้ที่กำลังศึกษาอยู่ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 1
ปีการศึกษา 2557 โรงเรียนคัคครุณี อำเภอเมือง จังหวัด ฉะเชิงเทรา จำนวน 1 ห้องเรียน

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการศึกษาผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบอุปนัยและนิรนัย ที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผล และความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียน ทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ครั้งนี้ ผู้วิจัย ได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

1. หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551: กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
 - 1.1 ความสำคัญของหลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
 - 1.2 คุณภาพของนักเรียน
 - 1.3 สาระและมาตรฐานการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
2. หลักสูตรสถานศึกษาของโรงเรียนดัดดรุณี: สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
 - 2.1 คำอธิบายรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม
 - 2.2 ผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
3. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย
 - 3.1 ความหมายของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย
 - 3.2 วัตถุประสงค์ของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย
 - 3.3 ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย
 - 3.4 ข้อดีและข้อจำกัด ของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย
4. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัย
 - 4.1 ความหมายของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัย
 - 4.2 วัตถุประสงค์ของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัย
 - 4.3 ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัย
 - 4.4 ข้อดีและข้อจำกัด ของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัย
5. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
 - 5.1 ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
 - 5.2 ความสำคัญของ การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
 - 5.3 แนวทางในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
 - 5.4 การประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

- 5.4.1 แนวทางในการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
- 5.4.2 เกณฑ์การประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
- 6. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
 - 6.1 ความหมายของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
 - 6.2 ความสำคัญของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
 - 6.3 แนวทางในการพัฒนาความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
 - 6.4 การประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
 - 6.4.1 แนวทางในการประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
 - 6.4.2 เกณฑ์การประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
- 7. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
 - 7.1 งานวิจัยต่างประเทศ
 - 7.2 งานวิจัยในประเทศ

หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551: กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 นี้ จัดทำขึ้นสำหรับห้องเรียนและสถานศึกษาได้นำไปใช้เป็นกรอบและทิศทางในการจัดทำหลักสูตรสถานศึกษา และจัดการเรียนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาเด็กและเยาวชนไทยทุกคนในระดับการศึกษาขั้นพื้นฐานให้มีคุณภาพด้านความรู้ และทักษะที่จำเป็นสำหรับการดำรงชีวิตในสังคมที่มีการเปลี่ยนแปลง (กระทรวงศึกษาธิการ, 2552 ข, หน้า 2) มีรายละเอียด ดังนี้

1. ความสำคัญของหลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วน รอบคอบ ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้อง เหมาะสม นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและศาสตร์อื่น ๆ คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต ช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข (กระทรวงศึกษาธิการ, 2552 ข, หน้า 56)

2. คุณภาพของนักเรียน

หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้กำหนดคุณภาพของนักเรียนเมื่อผู้จบชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ดังนี้ (กระทรวงศึกษาธิการ, 2552 ข, หน้า 62-63)

2.1 มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับระบบจำนวนจริง ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง จำนวนจริงที่อยู่ในรูปกรณฑ์ และจำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ หาค่าประมาณของจำนวนจริงที่อยู่ในรูปกรณฑ์ และจำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังโดยใช้วิธีการคำนวณที่เหมาะสมและสามารถนำเสนอสมบัติของจำนวนจริงไปใช้ได้

2.2 นำความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้คาดคะเนระยะทาง ความสูง และแก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัดได้

3.3 มีความคิดรวบยอดในเรื่องเซต การดำเนินการของเซต และใช้ความรู้เกี่ยวกับแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์แสดงเซตไปใช้แก้ปัญหา และตรวจสอบความสมเหตุสมผลของการให้เหตุผล

4.4 เข้าใจและสามารถใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัยได้

4.5 มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สามารถใช้ความสัมพันธ์และฟังก์ชันแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้

4.6 เข้าใจความหมายของลำดับเลขคณิต ลำดับเรขาคณิต และสามารถหาพจน์ทั่วไปได้ เข้าใจความหมายของผลบวกของ n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต อนุกรมเรขาคณิต และหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต และอนุกรมเรขาคณิตโดยใช้สูตรและนำไปใช้ได้

4.7 รู้และเข้าใจการแก้สมการ และอสมการตัวแปรเดียวดีกรีไม่เกินสอง รวมทั้งใช้กราฟของสมการ อสมการ หรือฟังก์ชันในการแก้ปัญหา

4.8 เข้าใจวิธีการสำรวจความคิดเห็นอย่างง่าย เลือกใช้ค่ากลางได้เหมาะสมกับข้อมูล และวัตถุประสงค์ สามารถหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัชฐาน ฐานนิยม ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และเปอร์เซ็นต์ไทล์ ของข้อมูล วิเคราะห์ข้อมูล และนำผลจากการวิเคราะห์ข้อมูลไปช่วยในการตัดสินใจ

4.9 เข้าใจเกี่ยวกับการทดลองสุ่ม เหตุการณ์ และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ สามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์ ประกอบการตัดสินใจ และแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้

1.10 ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหา ใช้ความรู้ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้อง และชัดเจน เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์

และนำความรู้ หลักการ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

จากการกำหนดคุณภาพนักเรียน ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ดังกล่าว สรุปได้ว่าหลังจากที่นักเรียนได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบอุปนัยและนิรนัย เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แล้วนักเรียนจะต้องสามารถใช้เหตุผล ประกอบการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม

3. สาระและมาตรฐานการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ ประกอบด้วยมาตรฐานการเรียนรู้ ดังนี้

มาตรฐาน ค 1.1 เข้าใจถึงความหลากหลายของการแสดงจำนวนและการใช้จำนวนในชีวิตจริง

มาตรฐาน ค 1.2 เข้าใจถึงผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการของจำนวนและความสัมพันธ์ระหว่าง การดำเนินการต่าง ๆ และสามารถใช้ในการดำเนินการในการแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 1.3 ใช้การประมาณค่าในการคำนวณและแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 1.4 เข้าใจระบบจำนวนและนำเสนอบัติเกี่ยวกับจำนวนไปใช้

สาระที่ 2 การวัด ประกอบด้วยมาตรฐานการเรียนรู้ ดังนี้

มาตรฐาน ค 2.1 เข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการวัด วัดและคาดคะเนขนาดของสิ่งที่ต้องการวัด

มาตรฐาน ค 2.2 แก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัด

สาระที่ 3 เรขาคณิต ประกอบด้วยมาตรฐานการเรียนรู้ ดังนี้

มาตรฐาน ค 3.1 อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ

มาตรฐาน ค 3.2 ใช้การนึ่งภาพ (Visualization) ใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (Spatial reasoning) และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (Geometric model) ในการแก้ปัญหา

สาระที่ 4 พีชคณิต ประกอบด้วยมาตรฐานการเรียนรู้ ดังนี้

มาตรฐาน ค 4.1 เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป (Pattern) ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

มาตรฐาน ค 4.2 ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical model) อื่น ๆ แทนสถานการณ์ต่าง ๆ ตลอดจนแปลความหมาย และนำไปใช้แก้ปัญหา

- สาระที่ 5 การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น ประกอบด้วยมาตรฐานการเรียนรู้ ดังนี้
- มาตรฐาน ค 5.1 เข้าใจและใช้วิธีการทางสถิติในการวิเคราะห์ข้อมูล
- มาตรฐาน ค 5.2 ใช้วิธีการทางสถิติและความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์ได้ อย่างสมเหตุสมผล
- มาตรฐาน ค 5.3 ใช้ความรู้เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็นช่วยในการตัดสินใจและแก้ปัญหา

สาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วยมาตรฐานการเรียนรู้ ดังนี้

- มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผลการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และ เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

จากสาระและมาตรฐานการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ดังกล่าว มีการกำหนดสาระและมาตรฐานการเรียนรู้ในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ทั้งหมด 6 สาระ 14 มาตรฐาน ซึ่งสาระและมาตรฐานที่ผู้วิจัยนำมาใช้ประกอบงานวิจัยเพื่อพัฒนานักเรียนในครั้งนี้คือสาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหาการให้เหตุผลการสื่อสารการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และ เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และ มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ซึ่งมีตัวชี้วัดดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 มาตรฐานและตัวชี้วัดที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย

มาตรฐาน	ตัวชี้วัด
มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหาการให้เหตุผลการสื่อสารการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และ เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และ มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์	1. ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม 2. ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน

หลักสูตรสถานศึกษาของโรงเรียนดัดดรุณี: สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

หลักสูตรสถานศึกษาของโรงเรียนดัดดรุณี กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 1 ได้เปิดการเรียนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ค 31101 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค 31201 และ คณิตศาสตร์พิเศษ ค 31203 ซึ่งการวิจัยนี้ผู้วิจัยใช้เนื้อหาในรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค 31201 ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. คำอธิบายรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

คำอธิบายรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค 31201 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 1 เวลา 80 ชั่วโมง จำนวน 2.0 หน่วยกิต มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

ตรรกศาสตร์เบื้องต้น ประพจน์ การหาความจริงของประพจน์ การสร้างตารางค่าความจริง รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน การอ้างเหตุผล ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณและค่าความจริงของประ โยค ที่มีตัวบ่งปริมาณ สมมูลและนิเสธของประ โยคที่มีตัวบ่งปริมาณ

ระบบจำนวนจริง จำนวนจริง การเท่ากัน การบวก การลบ การคูณ และการหาร ในระบบจำนวนจริง สมบัติของระบบจำนวนจริง การแก้สมการพหุนามตัวแปรเดียว สมบัติการไม่เท่ากัน ช่วงและการแก้อสมการ ค่าสมบูรณ์ การแก้สมการและอสมการในรูปค่าสมบูรณ์

ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น สมบัติของจำนวนเต็ม

โดยจัดประสบการณ์หรือสร้างสถานการณ์ในชีวิตประจำวันที่เกี่ยวข้องให้นักเรียนได้ศึกษา ค้นคว้า โดยการปฏิบัติจริง ทดลอง สรุป รายงาน เพื่อพัฒนาทักษะ/ กระบวนการ ในการคิดคำนวณ การแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ การนำเสนอประสบการณ์ด้านความรู้ ความคิด ทักษะกระบวนการที่ได้ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์ รวมทั้งเห็นคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ สามารถทำงานอย่างเป็นระบบระเบียบ มีความรอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีวิจารณญาณ และมีความเชื่อมั่นในตนเอง

การวัดผลและประเมินผล ใช้วิธีที่หลากหลายตามสภาพความเป็นจริงให้สอดคล้องกับเนื้อหา และทักษะที่ต้องการวัด

2. ผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ผู้วิจัยได้ศึกษาผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค31201 โรงเรียนดัดดรุณี อ.เมือง จ.ฉะเชิงเทรา มีรายละเอียดดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 ผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค31201

ที่	ชื่อหน่วยการเรียนรู้	ผลการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้
1	ตรรกศาสตร์เบื้องต้น	1. หาค่าความจริงของประพจน์ และสร้างตารางหาค่าความจริงได้ 2. ตรวจสอบรูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน ประพจน์ที่เป็นสัจนิรันดร์ การอ้างเหตุผลที่กำหนดให้ สมเหตุสมผลหรือไม่ได้ 3. หาค่าความจริงของประ โยคที่มีตัวบ่งบอกปริมาณตัวแปรเดียว สองตัวแปร และเห็นความสำคัญของ สมมูลและนิเสธของประ โยคที่มีตัวบ่งปริมาณ ได้	- ประพจน์ - การหาความจริงของประพจน์ - การสร้างตารางค่าความจริง - รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน - การอ้างเหตุผล - ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณและค่าความจริงของประ โยคที่มีตัวบ่งปริมาณ - สมมูลและนิเสธของประ โยคที่มีตัวบ่งปริมาณ
2	ระบบจำนวนจริง	1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับ ระบบจำนวนจริง 2. นำสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับจำนวนจริง การดำเนินการไปใช้ได้ 3. แก้สมการพหุนามตัวแปรเดียวดีกรีไม่เกินสี่ได้ 4. เขียนช่วงและแก้สมการพหุนามตัวแปรเดียวได้ 5. แก้สมการและอสมการในรูปค่าสัมบูรณ์ได้	- จำนวนจริง - การเท่ากัน - การบวก การลบ การคูณ และ การหาร ในระบบจำนวนจริง - สมบัติของระบบจำนวนจริง - การแก้สมการพหุนามตัวแปรเดียว - สมบัติการไม่เท่ากัน - ช่วงและการแก้สมการ - ค่าสัมบูรณ์ - การแก้สมการและอสมการในรูปค่าสัมบูรณ์
3	ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น	1. เข้าใจสมบัติของจำนวนเต็ม 2. นำสมบัติของจำนวนเต็มไปใช้ในการให้เหตุผลเกี่ยวกับการหารลงตัวได้	- สมบัติของจำนวนเต็ม - การหารลงตัว - ขั้นตอนวิธีหาร - ตัวหารร่วมมาก - ตัวคูณร่วมน้อย

จากผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค31201 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนตติศรณี อ.เมือง จ.ฉะเชิงเทรา ดังกล่าว ในการวิจัยนี้ผู้วิจัยใช้หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นและมีผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้ดังตารางที่ 3

ตารางที่ 3 ผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติมที่ใช้ในการวิจัย

ชื่อหน่วยการเรียนรู้	ผลการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้
ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น	1. เข้าใจสมบัติของจำนวนเต็ม 2. นำสมบัติของจำนวนเต็ม ไปใช้ในการให้เหตุผลเกี่ยวกับการหารลงตัวได้	- การหารลงตัว - ขั้นตอนวิธีหาร - ตัวหารร่วมมาก - ตัวคูณร่วมน้อย

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย

1. ความหมายของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย

ลาร์ดิซาบอล (Lardizabal, 1970, pp. 29-32) กล่าวว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้การอุปนัยเป็นวิธีการหาข้อเท็จจริงโดยผ่านขั้นตอนการอุปนัย โดยการนำสถานการณ์หลาย ๆ สถานการณ์หรือตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่างมาให้นักเรียนได้ศึกษา สังเกตและเปรียบเทียบจากนั้นจึงนำส่วนสำคัญที่มีเหมือนหรือคล้ายกันมาสรุปเป็นกฎเกณฑ์ทั่ว ๆ ไป รายละเอียดต่าง ๆ ที่สัมพันธ์กันนั้นจะนำไปสู่การสร้างบทสรุปสุดท้าย บทนิยาม กฎ หลักการหรือสูตรนั่นเอง

สิธุ (Sidhu, 1981, pp. 106-108) กล่าวว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยเป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เป็นการมองจากรูปธรรมไปสู่สิ่งที่เป็นนามธรรมและจากตัวอย่างไปสู่กฎเกณฑ์ทั่ว ๆ ไป เป็นวิธีการที่จะสร้างกฎเกณฑ์โดยการนำตัวอย่างที่เป็นรูปธรรมเข้ามาช่วยวิธีการนี้เป็นวิธีพื้นฐานของการหาเหตุผลจากส่วนย่อยไปหาส่วนร่วมซึ่งมีจุดมุ่งหมายเพื่อที่จะหาข้อเท็จจริงทั่ว ๆ ไปโดยจะแสดงว่าถ้ามันเป็นจริงในกรณีเฉพาะแต่ละกรณีและมีการให้เหตุผลที่เพียงพอในแต่ละกรณีก็จะเป็นความจริงในทุก ๆ กรณี สูตรหรือหลักการทั่ว ๆ ไปจะต้องผ่านกระบวนการให้เหตุผลและแก้ปัญหาซึ่งจะทำให้เกิดความมั่นใจแล้ว หลักจากยกตัวอย่างสิ่งที่เป็นรูปธรรมจนเกิดความเข้าใจและนักเรียนก็สามารถที่จะประสบความสำเร็จในการหากฎเกณฑ์โดยทั่วไปได้

ชมนาด เชื้อสุวรรณทวิ (2542, หน้า 70) กล่าวว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย เป็นวิธีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เริ่มต้นจากตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่างเพื่อให้นักเรียนเห็นรูปแบบ นักเรียนต้องใช้การสังเกตเปรียบเทียบ รูปแบบที่เหมือนกันมีลักษณะร่วมกันนำไปสู่ข้อสรุป ซึ่งเป็นการค้นพบโดยการสังเกตฝึกสัมพันธ์ความคิดทำให้เข้าใจได้อย่างชัดเจน ฝึกทักษะกระบวนการคิด ให้เหตุผล ช่างสังเกตสามารถหาข้อสรุปได้ด้วยตนเอง การยกตัวอย่างจะต้องมากพอที่จะทำให้ นักเรียนสามารถสรุปมโนคติ (Concept) ได้และถ้าเป็นเรื่องที่ยาวและยากเกินไปจะทำให้เสียเวลา ผู้สอนและต้องเลือกเนื้อหาและวิธีสอนให้เหมาะสมสัมพันธ์กัน ต้องเตรียมการจัดกิจกรรม การเรียนรู้ เตรียมตัวเป็นอย่างดี

สิริพร ทิพย์คง (2545, หน้า 148) กล่าวว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยนี้ใช้กันมา ช้านานตั้งแต่สมัยอริสโตเติลและได้รับการปรับปรุงพัฒนาขึ้น ต่อ ๆ มา วิธีสอนแบบอุปนัยนี้จะเริ่ม จากการที่ครูยกตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่างให้นักเรียนสังเกต คิด พิจารณาตัวอย่างเหล่านั้นอย่างมี เหตุผล ค้นหาแบบรูป แล้วสรุปเป็นกฎเกณฑ์หรือนัยทั่วไป

ทิสนา แจมมณี (2550, หน้า 31) กล่าวว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้การอุปนัย คือ กระบวนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ผู้สอนใช้ในการช่วยให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ตามวัตถุประสงค์ ที่กำหนดโดยการนำตัวอย่าง/ ข้อมูล/ ความคิด/ เหตุการณ์/ สถานการณ์/ ปรากฏการณ์ที่มีหลักการ/ แนวคิดที่ต้องการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้นักเรียนแฝงอยู่ มาให้นักเรียนศึกษาวิเคราะห์ จนสามารถ ดึงหลักการ/ แนวคิดที่แฝงอยู่ออกมา เพื่อนำ ไปใช้ในสถานการณ์อื่น ๆ ต่อไป กล่าวอย่างสั้น ๆ ได้ว่า เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ให้นักเรียนสรุปหลักการจากตัวอย่างต่าง ๆ ด้วยตนเอง

พรพิมล พรพิรชนม์ (2550, หน้า 122) กล่าวว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย หมายถึง การจัดกระบวนการเรียนรู้ที่เริ่มจากการศึกษารายละเอียดปลีกย่อยไปหากฎเกณฑ์ หรือ ส่วนรวม เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้จากตัวอย่างไปหากฎเกณฑ์ หลักการ ข้อเท็จจริงหรือ ข้อสรุป โดยให้นักเรียนทำการศึกษา สังเกต ทดลอง เปรียบเทียบแล้ว พิจารณาค้นหาองค์ประกอบ ที่เหมือนกันหรือคล้ายคลึงกันจากตัวอย่างต่าง ๆ เพื่อนำไปสู่ข้อสรุป

มนัท ธาตุทอง (2551, หน้า 196) กล่าวว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย (Inductive method) เป็นการจัดการเรียนรู้รายละเอียดปลีกย่อย หรือจากส่วนย่อยไปหาส่วนใหญ่ กฎเกณฑ์ หลักการ ข้อเท็จจริง ข้อสรุป โดยการนำตัวอย่าง ข้อมูล เหตุการณ์ สถานการณ์ ปรากฏการณ์ ที่มีหลักแฝงอยู่ให้นักเรียนศึกษา สังเกต ทดลอง เปรียบเทียบ วิเคราะห์จนสามารถ สรุปหลักการ กฎเกณฑ์ได้ด้วยตนเอง

วีณา ประชากุล และประสาท เนืองเฉลิม (2553, หน้า 170) กล่าวว่า รูปแบบการเรียน การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบคิดอุปนัย (Inductive thinking instructional model) เป็นการจัด

กิจกรรมการเรียนรู้การจัดการจัดการกิจกรรมการเรียนรู้ที่จะต้องเริ่มจากตัวผู้สอนยกตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่าง และให้นักเรียนค่อย ๆ คิดและสังเกตไปพร้อมกัน ผู้สอนควรยกตัวอย่างเหล่านั้นอย่างมีเหตุผล ค้นหารูปแบบและสรุปเป็น กฎเกณฑ์ ซึ่งจะช่วยให้ นักเรียนได้พัฒนาความคิดรวบยอดหรือ มโนทัศน์ มีความเข้าใจอย่างต่อเนื่อง มีความสนใจในการติดตาม ค้นหาเหตุผล และค้นพบข้อสรุป ได้ด้วยตนเอง ซึ่งจะทำให้นักเรียนมีความเข้าใจอย่างลึกซึ้ง ชัดเจน และสามารถจดจำได้ยาวนาน สามารถนำวิธีการเรียนรู้ไปใช้ประโยชน์ในชีวิตประจำวันได้เป็นอย่างดี

จากแนวคิดเกี่ยวกับการจัดการกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยดังกล่าวสรุปได้ว่า การจัดการ กิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย หมายถึง การจัดกระบวนการเรียนรู้ที่มองจากรูปธรรมไปสู่สิ่งที่เป็นนามธรรมและจากตัวอย่างไปสู่กฎเกณฑ์ทั่ว ๆ ไป โดยการนำตัวอย่าง/ ข้อมูล/ ความคิด/ เหตุการณ์/ สถานการณ์/ ปรัชญาการที่มีหลักการ/ แนวคิดที่ต้องการจัดการกิจกรรมการเรียนรู้ให้แก่ นักเรียนแฝงอยู่ มาให้นักเรียนศึกษาวิเคราะห์นักเรียนต้องใช้การสังเกตเปรียบเทียบจากนั้นจึงนำส่วนสำคัญที่มีเหมือนหรือคล้ายกันมาสรุปเป็นกฎเกณฑ์ทั่ว ๆ ไป รายละเอียดต่าง ๆ ที่สัมพันธ์กันนั้นจะนำไปสู่ การสร้างบทสรุปสุดท้าย บทนิยาม กฎ หลักการหรือสูตรนั่นเอง ซึ่งจะทำให้นักเรียนมีความเข้าใจอย่างลึกซึ้ง ชัดเจน และสามารถจดจำได้ยาวนาน สามารถนำวิธีการเรียนรู้ไปใช้ประโยชน์ใน ชีวิตประจำวันได้เป็นอย่างดี

2. วัตถุประสงค์ของการจัดการกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย

ชาลซ์ ฮาจินสมาจาร (2542, หน้า 63) กล่าวว่า การจัดการกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยมี จุดมุ่งหมายดังนี้

2.1 เพื่อช่วยให้นักเรียนได้ค้นพบกฎหรือความจริงที่สำคัญสำหรับตัวนักเรียนเอง โดยผ่านการสังเกตอย่างรอบคอบในตัวอย่างจำเพาะอย่างเพียงพอซึ่งจะสนับสนุนเป็นกฎเกณฑ์

2.2 เพื่อทำให้ความหมาย การอธิบาย และความสัมพันธ์ของแนวความคิดที่มีความแจ่มชัดต่อนักเรียน

3.3 เพื่อช่วยให้นักเรียนได้ดำเนินการสืบค้นด้วยตนเองโดยไม่ต้องพึ่งพาครู

ทิสนา แจมมณี (2550, หน้า 31) กล่าวว่า การจัดการกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้การอุปนัย เป็นวิธีการที่มุ่งช่วยให้นักเรียนได้ฝึกทักษะการคิดวิเคราะห์ สามารถจับหลักการ หรือประเด็นสำคัญได้ด้วยตนเอง ทำให้เกิดการเรียนรู้หลักการ/ แนวคิด หรือข้อความรู้ต่าง ๆ อย่างเข้าใจ

พรพิมล พรพิรชนม์ (2550, หน้า 122) กล่าวว่า วัตถุประสงค์ของการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัยช่วยให้นักเรียนได้ฝึกทักษะการคิดวิเคราะห์ เพื่อนำไปสู่การค้นพบกฎเกณฑ์หรือความจริงที่สำคัญ ๆ ด้วยตนเอง ส่งเสริมให้นักเรียนสร้างความเข้าใจอย่างมีความหมายและสร้างความสัมพันธ์

ของความคิดต่าง ๆ อย่างชัดเจน ตลอดจนกระตุ้นให้นักเรียนรู้จักทำการศึกษาค้นคว้าหาความรู้ด้วยตนเอง

ฉันท ชาทูทอง (2551, หน้า 196) กล่าวว่า วัตถุประสงค์ของการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัย เพื่อให้ให้นักเรียนฝึกทักษะการสังเกต คิววิเคราะห์ ทำให้เกิดการเรียนรู้ และสามารถสรุปหรือค้นพบหลักการ กฎเกณฑ์ ประเด็นสำคัญ หรือความจริงด้วยตนเอง

จากแนวคิดดังกล่าวสรุปว่า วัตถุประสงค์ของการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัย คือ ช่วยให้นักเรียนได้ฝึกทักษะการคิดวิเคราะห์ ทำให้เกิดการเรียนรู้ และสามารถสรุปหรือค้นพบหลักการ กฎเกณฑ์ ประเด็นสำคัญ หรือความจริงด้วยตนเอง โดยผ่านการสังเกตอย่างรอบคอบทำให้เกิดการเรียนรู้หลักการ/แนวคิด หรือข้อความรู้ต่าง ๆ อย่างเข้าใจ

3. ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย

ลาร์ดิซาบอล (Lardizabal, 1970, pp. 29-32) ได้เสนอขั้นตอนของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยไว้ดังนี้

1. ขั้นเตรียมการขั้นตอนนี้จะประกอบด้วย

- 1.1 กระบวนการของการทำความเข้าใจ
- 1.2 การสร้างแรงจูงใจ
- 1.3 การชี้แจงจุดประสงค์

การทำความเข้าใจในขั้นพื้นฐานอาจจะต้องมีการทบทวนข้อเท็จจริงเก่า ๆ หรือบทเรียนเดิม ๆ ซึ่งองค์ความรู้เดิมนั้นอาจจะเป็นประโยชน์ในการสร้างองค์ความรู้ใหม่

2. ขั้นการนำเสนอหรือขั้นตอน

ในสถานการณ์หรือตัวอย่างที่จะนำมาเสนอในชั้นเรียนควรมีจำนวนตัวอย่างที่เพียงพอในการที่จะนำมาสรุปเป็นกฎเกณฑ์ทั่ว ๆ ไปได้ซึ่งควรจะมากกว่า 2-3 ตัวอย่างขึ้นไป

3. ขั้นการเปรียบเทียบและรวบรวม

ในขั้นตอนนี้ตัวอย่างแต่ละตัวอย่างจะนำส่วนที่เหมือนหรือคล้ายคลึงกันมาเป็นข้อสรุป แต่ละตัวอย่างควรที่จะเปรียบเทียบอย่างละเอียดซึ่งจะเป็นขั้นตอนที่นักเรียนได้เปรียบเทียบตัวอย่างเพื่อนำไปหาข้อสรุป

4. ขั้นสรุป

ข้อเท็จจริงที่เหมือนกันจะนำมาเป็นข้อสรุปทั่ว ๆ ไปเป็น กฎ บทนิยาม หลักการ หรือ สูตร ซึ่งความสามารถของนักเรียนในการที่จะสรุปสูตรด้วยตัวของพวกเขาเองถือเป็นความสำเร็จในบทเรียนนั้น ๆ ผลสำเร็จของวิธีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยขึ้นอยู่กับการจัดบทเรียนอย่างเป็นระบบ ซึ่งส่วนนี้จะเป็นความรับผิดชอบของครูผู้สอน

5. ขั้นการประยุกต์ใช้

ในขั้นตอนนี้จะเป็นการทดสอบความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับกฎหรือข้อสรุปซึ่งพวกเขาควรที่จะสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาในรูปแบบอื่น ๆ ได้

พรพิมล พรพิรชนม์ (2550, หน้า 122) กล่าวว่า ขั้นตอนของการดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย มีดังต่อไปนี้

1. ขั้นเตรียม เป็นการเตรียมตัวนักเรียนด้วยการทบทวนความรู้เดิม กำหนดจุดมุ่งหมายและอธิบายความมุ่งหมายของการเรียนให้นักเรียนเข้าใจอย่างชัดเจน
2. ขั้นสอนหรือขั้นแสดง เป็นการเสนอตัวอย่างหรือกรณีต่าง ๆ ให้นักเรียนได้พิจารณาเพื่อให้สามารถเปรียบเทียบ สรุปกฎเกณฑ์ได้ การเสนอตัวอย่างควรเสนอหลาย ๆ อย่างให้มากพอที่นักเรียนจะสามารถสรุปกฎเกณฑ์ได้ ไม่ควรเสนอเพียงตัวอย่างเดียว
3. ขั้นเปรียบเทียบและรวบรวม เป็นขั้นหาลักษณะประกอบรวม โดยให้นักเรียนพิจารณาความคล้ายคลึงหรือความแตกต่างกันขององค์ประกอบในตัวอย่าง เพื่อเตรียมสรุปกฎเกณฑ์ในขั้นนี้ผู้สอนไม่ควรเร่งเร้านักเรียนจนเกินไป
4. ขั้นสรุป เป็นการนำข้อสังเกตต่าง ๆ จากตัวอย่าง โดยนำมาสรุปเป็นกฎเกณฑ์ นิยาม หลักการ หรือสูตรด้วยตัวนักเรียนเอง
5. ขั้นนำไปใช้ เป็นขั้นทดสอบความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับกฎเกณฑ์หรือข้อสรุปที่ได้ทำมาแล้วว่าสามารถที่จะนำไปใช้ในปัญหาหรือแบบฝึกหัดอื่น ๆ ได้หรือไม่

ฉันท ชาติทอง (2551, หน้า 196) กล่าวว่า ขั้นตอนของการดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย มีดังต่อไปนี้

1. ขั้นเตรียม
 - 1.1 เตรียมตัวนักเรียน
 - 1.2 ทบทวนความรู้เดิม
 - 1.3 สร้างพื้นฐานความรู้
2. ขั้นเสนอตัวอย่าง
 - 2.1 นำเสนอตัวอย่างข้อมูล สถานการณ์ เหตุการณ์ ปรากฏการณ์ แนวคิด
 - 2.2 ให้นักเรียนสังเกตลักษณะและคุณสมบัติ
3. ขั้นเปรียบเทียบ
 - 3.1 นักเรียนรวบรวมข้อมูลที่ได้จากการสังเกต ค้นหา วิเคราะห์
 - 3.2 ผู้สอนตั้งคำถาม เพื่อกระตุ้นนักเรียน
 - 3.3 เปรียบเทียบความคล้ายคลึง ความแตกต่างขององค์ประกอบ

4. ขั้นสรุปกฎเกณฑ์

นักเรียนนำข้อสังเกตต่าง ๆ ที่ได้มาสรุปเป็นหลักการ กฎเกณฑ์นิยาม ความคิดรวบยอด ด้วยตนเอง

5. ขั้นนำไปใช้

5.1 ผู้สอนเตรียมตัวอย่าง สถานการณ์ หรือความคิดใหม่ ๆ ที่หลากหลายให้นักเรียนฝึก

5.2 ใช้ประสบการณ์ในชีวิตประจำวัน

5.3 นำไปใช้ในสถานการณ์จริง

5.4 แลกเปลี่ยน เรียนรู้ซึ่งกันและกัน

จากขั้นตอนของการดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยดังกล่าวสรุปว่า ขั้นตอนของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ขั้นเตรียม

ขั้นนี้เป็นขั้นนำเข้าสู่บทเรียน เตรียมตัวนักเรียนทั้งนี้เพื่อเป็นการชี้แนะให้นักเรียนเกิดกระบวนการของการทำความเข้าใจและยังเป็นพื้นฐานสำหรับที่จะรับความรู้ใหม่ของเรื่องที่จะเรียนอีกด้วย

2. ขั้นเสนอตัวอย่าง

ขั้นนี้เป็นขั้นที่ผู้สอนให้ตัวอย่างแก่นักเรียนจำนวนหลาย ๆ ตัวอย่างให้มากพอที่นักเรียนจะสังเกต พิจารณาและหาข้อสรุปจากตัวอย่างนั้น ๆ ได้ นอกจากการให้ตัวอย่างแล้วผู้สอนอาจจะให้นักเรียนสังเกตจากการทดลองด้วยตัวเองก็ได้

3. ขั้นการเปรียบเทียบ

ขั้นนี้เป็นขั้นที่นักเรียนนำสิ่งที่ได้จากการพิจารณาสังเกตตัวอย่างต่าง ๆ หรือจากการทดลองมาวิเคราะห์แยกแยะข้อแตกต่าง เพื่อเปรียบเทียบและหาความสัมพันธ์ของรายละเอียดในส่วนที่เหมือนกัน เพื่อนำไปสู่การสรุป การให้คำนิยามและการตั้งเป็นกฎเกณฑ์ไว้ในขั้นนี้ผู้สอนไม่ควรเร่งเร้าให้นักเรียนให้มากจนเกินไป

4. ขั้นการสรุป

ขั้นนี้เป็นขั้นการสรุปจากตัวอย่างต่าง ๆ หรือการทดลองมาเป็นกฎเกณฑ์ นิยาม หรือสูตร ด้วยตัวของนักเรียนเอง

5. ขั้นการนำไปใช้

ขั้นนี้เป็นขั้นทดสอบนักเรียนเกี่ยวกับความเข้าใจใน ทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยามต่าง ๆ หรือขั้นที่สรุปได้ว่าสามารถนำไปใช้ในการทำแบบฝึกหัด ซึ่งพวกเขาควรที่จะสามารถนำไป

ประยุกต์ใช้กับปัญหาในรูปแบบอื่น ๆ ได้ เช่น “จงหาจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่หาร 4566 แล้วมีเศษเหลือเป็น 12 และหาร 10482 มีเศษเหลือเป็น 17” ซึ่งโจทย์ดังกล่าวให้นักเรียนจะได้ฝึกนำทฤษฎีขั้นตอนวิธีการหาร และนิยามตัวหารร่วมไปใช้ในการแก้ปัญหาเป็นต้น

4. ข้อดีและข้อจำกัด ของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย

ทิสนา แจมมณี (2550, หน้า 31) กล่าวว่า ข้อดีและข้อจำกัดของการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัย มีดังนี้

ข้อดี

1. เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่นักเรียนสามารถค้นพบการเรียนรู้ได้ด้วยตนเอง จึงทำให้เกิดความเข้าใจและจดจำได้ดี
2. เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ช่วยให้นักเรียนได้พัฒนาทักษะการคิดวิเคราะห์ อันเป็นเครื่องมือสำคัญของการเรียนรู้
3. เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่นักเรียนได้ตั้งเนื้อหาคำถาม (ได้แก่ หลักการ/แนวคิด ฯลฯ) และกระบวนการ (ได้แก่ กระบวนการคิด) ซึ่งนักเรียนสามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการเรียนรู้เรื่องอื่น ๆ ได้

ข้อจำกัด

1. เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ใช้เวลาค่อนข้างมาก
2. เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่อาศัยตัวอย่างที่ดีหากผู้สอนขาดความเข้าใจในการจัดเตรียมตัวอย่างที่ครอบคลุมลักษณะสำคัญ ๆ ของหลักการ/แนวคิดที่สอน การจัดกิจกรรมการเรียนรู้จะไม่ประสบผลสำเร็จเท่าที่ควร

พรพิมล พรพิรชนม์ (2550, หน้า 122) กล่าวว่า ข้อดีและข้อจำกัดของการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัย มีดังนี้

ข้อดี

1. เป็นวิธีสอนที่ช่วยทำให้นักเรียนเข้าใจได้อย่างชัดเจนและจำได้นาน
2. ฝึกให้นักเรียนรู้จักคิดวิเคราะห์ ตามหลักตรรกศาสตร์และหลักวิทยาศาสตร์
3. ช่วยให้นักเรียนเข้าใจวิธีการแก้ปัญหาและรู้จักวิธีการทำงานที่ถูกต้องสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ต่อไป

ข้อจำกัด

1. เป็นวิธีสอนที่ใช้เวลาค่อนข้างมาก
2. ไม่เหมาะสมที่จะสอนวิชาที่มีคุณค่าทางสุนทรียะ

3. ผู้สอนต้องเข้าใจในเทคนิควิธีสอนแบบนี้อย่างดี จึงจะได้ผลสัมฤทธิ์ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เพราะผู้สอนต้องจัดเตรียมตัวอย่างที่ครอบคลุมลักษณะสำคัญ ๆ ของกฎเกณฑ์ นิยาม หลักการ หรือสูตรที่เรียน

ฉันทิช ชาติทอง (2551, หน้า 196) กล่าวว่า ข้อดีและข้อจำกัดของการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัย มีดังนี้

ข้อดี

1. นักเรียนค้นพบความรู้ด้วยตนเอง
2. เข้าใจและจดจำได้นาน
3. พัฒนาทักษะการสังเกต คิดวิเคราะห์ เปรียบเทียบตามหลักครุศาสตร์ วิทยาศาสตร์
4. นักเรียนสรุปการเรียนรู้ด้วยตนเองอย่างมีเหตุผล
5. เรียนรู้ได้ทั้งเนื้อหาและกระบวนการ

ข้อจำกัด

1. ใช้เวลาก่อนข้างนาน อาจทำให้นักเรียนเบื่อหน่าย
2. ผู้สอนต้องเตรียมตัวอย่างดีไม่ควรด่วนสรุปกฎเกณฑ์ต่าง ๆ เอง
3. อาศัยทักษะพื้นฐานการคิดและการทำงานเป็นกลุ่ม

จากคำกล่าวของนักการศึกษาเกี่ยวกับข้อดีและข้อจำกัดของรูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยดังกล่าวผู้วิจัยสรุปได้ว่าข้อดีและข้อจำกัดของรูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยมีดังต่อไปนี้

ข้อดี

1. เป็นวิธีสอนที่ช่วยให้นักเรียนเกิดความเข้าใจ และจดจำข้อความรู้นั้น ๆ ได้อย่างยาวนานนอกจากนี้ยังเป็นวิธีการที่จะทำให้ผู้สามารถสังเคราะห์ทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยามได้ด้วยตนเองอีกด้วย

2. ทำให้นักเรียนเกิดการพัฒนาทักษะด้านกระบวนการคิดวิเคราะห์อย่างมีเหตุผลและสมเหตุสมผลอันเป็นเครื่องมือสำคัญของการเรียนรู้และจะนำไปสู่ข้อค้นพบต่าง ๆ อีกด้วย

ข้อจำกัด

1. เป็นวิธีสอนที่ต้องอาศัยตัวอย่างที่ดีซึ่งผู้สอนต้องเตรียมตัวอย่างที่ดี และมากพอที่จะทำให้นักเรียนสามารถสามารถสังเคราะห์ทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยามได้ด้วยตนเอง

2. เป็นวิธีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ใช้เวลาก่อนข้างนาน อาจทำให้นักเรียนเบื่อหน่ายได้

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัย

1. ความหมายของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัย

ลาร์ดิซาเบต (Lardizabal, 1970, pp. 35-38) กล่าวว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัย จะตรงข้ามกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย ในขณะที่การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย จะเริ่ม โดยการเรียนจากตัวอย่างและสิ้นสุดลงที่ข้อสรุปหรือหลักเกณฑ์ แต่การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัยนั้นจะเริ่มจากข้อสรุปทั่ว ๆ ไปแล้วนำไปประยุกต์ใช้กับตัวอย่างต่าง ๆ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัยมีกระบวนการทำให้เหตุผลจากสิ่งทั่วไปไปยังสิ่งที่เฉพาะเจาะจงการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัยมีลักษณะอยู่ 2 ประเภทคือ แบบทำนาย และแบบทำนายอธิบายชี้แจง นิรนัยแบบทำนายนั้นจะเป็นการคาดคะเนรายละเอียดต่าง ๆ ที่จะค้นหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ส่วนนิรนัยแบบการอธิบายหรือการชี้แจงจะเชื่อมโยงข้อเท็จจริงที่ใกล้เคียงกับหลักการนั้น ๆ เพื่ออธิบายให้นักเรียนเข้าใจ นิรนัยประเภทนี้จะถูกนำมาใช้บ่อย ในชั้นเรียน

สิธู (Sidhu, 1981, pp. 108-110) กล่าวว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัยว่าเป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ตรงข้ามกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัยนักเรียนจะดำเนินการจากสิ่งที่เป็นทั่ว ๆ ไป ไปยังสิ่งที่เฉพาะเจาะจงจากสิ่งที่เป็นนามธรรมไปสู่สิ่งที่เป็นรูปธรรม จากสูตรไปยังตัวอย่างก่อนการวิเคราะห์สูตร ซึ่งสูตรที่ได้รับการยอมรับจากนักเรียนจะต้องเป็นจริงทั้งก่อนและหลังการนำมาแสดงให้นักเรียนเห็น

ชมนาด เชื้อสุวรรณเทวี (2542, หน้า 72) กล่าวว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัยเป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่มีลักษณะตรงข้ามกับวิธีสอนแบบอุปนัย ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เริ่มต้นที่ครูผู้สอนบอกหลักเกณฑ์ ทฤษฎี หลักการ สูตรต่าง ๆ ให้นักเรียนก่อนแล้วจึงพิสูจน์หรือแก้ปัญหา เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้จากกฎไปหาตัวอย่างเหมาะสมสำหรับการแก้ปัญหาที่ยาก ใช้กฎ สูตรต่าง ๆ ความรู้ที่เคยเรียนมาแล้ว ทำให้จดจำหลักการ กฎเกณฑ์ สูตรต่าง ๆ ได้อย่างแม่นยำขึ้น ใช้การจำเป็นส่วนใหญ่บางครั้งจะไม่เข้าใจแจ่มแจ้งแต่จำรูปแบบการดำเนินการแก้ปัญหาแต่ถ้าลืมกฎหรือสูตรก็ไม่สามารถแก้ปัญหาได้เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นให้นักเรียนยอมรับนำกฎเกณฑ์ ทฤษฎี ที่มีคิดไว้แล้วไปใช้ นักเรียนไม่ได้คิด ทำให้เข้าใจให้เกิดความคิดรวบยอด

พรพิมล พรพีรชนม์ (2550, หน้า 122) กล่าวว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัย หมายถึง การจัดกระบวนการเรียนรู้ที่เริ่มจากทฤษฎี กฎ หรือ หลักการต่าง ๆ แล้วให้นักเรียนหาหลักฐานหรือเหตุผลมาพิสูจน์ยืนยันวิธีสอนแบบนี้ช่วยฝึกให้นักเรียนเป็นคนมีเหตุผลไม่เชื่ออะไรง่าย ๆ จนกว่าจะพิสูจน์ให้เห็นข้อเท็จจริงเสียก่อน

ทิสนา แคมมณี (2556, หน้า 337) กล่าวว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้การนิรนัย คือ กระบวนการที่ผู้สอนใช้ในการช่วยให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ตามวัตถุประสงค์ที่กำหนดโดยการช่วยให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับทฤษฎี หลักการ กฎ หรือข้อสรุปในเรื่องที่เรียน แล้วจึงให้ตัวอย่างหลายๆ ตัวอย่างเกี่ยวกับการใช้ทฤษฎี/หลักการ/กฎ หรือข้อสรุปนั้น หรืออาจให้นักเรียนฝึกนำทฤษฎี/หลักการ/กฎ หรือข้อสรุปนั้น ไปใช้สถานการณ์ใหม่ ๆ ที่หลากหลาย เพื่อช่วยให้ผู้เรียนมีความเข้าใจในทฤษฎี/หลักการ/กฎหรือข้อสรุปนั้น ๆ อย่างลึกซึ้งขึ้น หรือกล่าวสั้น ๆ ได้ว่าเป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้จากหลักการไปสู่ตัวอย่างย่อย ๆ

จากความหมายของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัยของนักการศึกษาดังกล่าวสรุปได้ว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัย เป็นการจัดกิจกรรมที่เริ่มจากข้อสรุปทั่ว ๆ ไปแล้วนำไปประยุกต์ใช้กับตัวอย่างต่าง ๆ ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนฝึกการนำทฤษฎี/หลักการ/กฎ หรือข้อสรุปนั้นไปใช้ในการพิสูจน์การแสดงผลประกอบการพิสูจน์ต่าง ๆ รวมทั้งการนำทฤษฎี/หลักการ/กฎ หรือข้อสรุปนั้นไปใช้สถานการณ์ใหม่ ๆ ที่หลากหลาย เพื่อช่วยให้ผู้เรียนมีความเข้าใจในทฤษฎี/หลักการ/กฎหรือข้อสรุปนั้น ๆ อย่างลึกซึ้งขึ้น เช่น เมื่อนักเรียนต้องการจะสรุปว่า $c = (ax)y$ สามารถเขียนได้เป็น $c = a(xy)$ นักเรียนจะต้องนำทฤษฎี/หลักการ/กฎ หรือข้อสรุปมาสนับสนุนข้อสรุปดังกล่าว นั่นคือนักเรียนต้องอ้าง สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการคูณ เพื่อสนับสนุนข้อสรุปนั้น

2. วัตถุประสงค์ของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัย

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช (2549, หน้า 279) ได้ให้วัตถุประสงค์ของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ นิรนัยไว้ดังนี้

2.1 ใช้สอนเมื่อต้องการแก้ปัญหาหายาก ๆ โดยใช้ทฤษฎีบท กฎ สูตร หรือข้อสรุปที่เคยเรียนมาแล้ว

2.2 นักเรียนจะตัดสินใจเรื่องใดเรื่องหนึ่งได้จะต้องพิสูจน์ความจริงให้วิเคราะห์ให้เสร็จสิ้นเสียก่อน

พรพิมล พรพิรชนม์ (2550, หน้า 122) กล่าวว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้การนิรนัยเพื่อให้นักเรียนรู้จักใช้ทฤษฎี กฎ สูตร นิยาม และหลักการต่าง ๆ มาช่วยในการแก้ปัญหา ไม่ตัดสินใจในการทำงานอย่างง่าย ๆ จนกว่าจะผ่านการพิสูจน์ข้อเท็จจริงเสียก่อน

เวชฤทธิ์ อังกะระภัทรขจร (2555, หน้า 84) กล่าวว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัยมีจุดประสงค์เพื่อ

1. ใช้สอนเมื่อต้องการแก้ปัญหาหายาก ๆ โดยใช้ทฤษฎีบท กฎ สูตร หรือข้อสรุปที่เคยเรียนมาแล้ว

2. ให้นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบท กฎ สูตร หรือข้อสรุป ไปประยุกต์ใช้ได้อย่างถูกต้อง

ทิสนา เขมมณี (2556, หน้า 337) กล่าวว่า วิธีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้การนิรนัย เป็นวิธีการที่มุ่งช่วยให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้หลักการ และสามารถนำหลักการดังกล่าวไปใช้ได้

จากวัตถุประสงค์ของนักการศึกษาดังกล่าวสรุปได้ว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ นิรนัยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ในหลักการและทฤษฎีต่าง ๆ และยังช่วยให้นักเรียนรู้จักใช้ทฤษฎี กฎ สูตร นิยาม และหลักการต่าง ๆ ที่ผ่านการพิสูจน์การวิเคราะห์ยอมรับว่าเป็นจริงแล้ว มาช่วยในการแก้ปัญหาอีกด้วย

3. ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัย

ลาร์ดิซาเบล (Lardizabal, 1970 pp. 29-32) ได้กล่าวถึงขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัยดังนี้

1. ขั้นแฉงปัญหาหรือขั้นการอธิบายปัญหา โดยปัญหาที่นำมานั้นควรจะเป็นปัญหาที่น่าสนใจและกระตุ้นนักเรียนให้เกิดความสนใจที่จะแก้ปัญหาถ้าเป็นไปได้ปัญหาที่นำมาควรจะต้องเชื่อมโยงกับสถานการณ์ในชีวิตประจำวันและค่อนข้างจะมีความจำเป็นที่สำคัญนั้นปัญหาที่นำมาควรจะต้องอยู่ในขอบเขตความสามารถของเด็กด้วย
2. ขั้นวางหลักเกณฑ์ควรจะนำหลักการทั่ว ๆ ไป กฎเกณฑ์ บทนิยาม หรือทฤษฎีมากกว่า 1 ข้อขึ้นไป มาใช้ในการอธิบายเพื่อที่นักเรียนจะได้เลือกกฎเกณฑ์เหล่านี้มาใช้ในการแก้ปัญหา
3. ขั้นสรุป ขั้นตอนนี้คือการเลือกหลักเกณฑ์ทั่ว ๆ ไป กฎเกณฑ์ หรือทฤษฎีที่เหมาะสมในปัญหานั้น ๆ บางครั้งการเลือกอาจจะเจอข้อผิดพลาดบ้างก่อนที่จะนำมาสู่ข้อสรุปที่ถูกต้องที่สุด
4. ขั้นการพิสูจน์หาข้อเท็จจริง ขั้นตอนนี้เป็นการทดลองและนำกฎเกณฑ์ทั่วไปเหล่านั้นได้ผลอย่างสมบูรณ์โดยจะค้นหาข้อมูลเชื่อถือได้จากผู้ที่รอบรู้ เช่น ครู ตำราเรียน พจนานุกรม สารานุกรม หรือหนังสือทั่วไป หลักจากการพิสูจน์แล้วนั้นข้อเท็จจริงที่ได้ จะกลายเป็นความรู้ที่ถูกต้อง

ชมนาด เชื้อสุวรรณทวี (2542, หน้า 72) ได้กล่าวถึงขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัยดังนี้

1. ขั้นเตรียม เป็นขั้นนำเข้าสู่บทเรียน ดึงความสนใจให้นักเรียนอยากเรียน เห็นความสำคัญของบทเรียน
2. ขั้นสอน เป็นขั้นดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ครูบอกกฎเกณฑ์ หลักการ สูตร ทฤษฎี ให้นักเรียนทราบ เขียนบนกระดานและอธิบายแยกแยะให้นักเรียนเข้าใจอย่างชัดเจนตามกฎเกณฑ์ หลักการต่าง ๆ นั้น
3. ขั้นสรุป เป็นขั้นให้นักเรียนสรุปตามกฎเกณฑ์ ทฤษฎีที่เรียน

4. ชื่อนำไปใช้ ให้นักเรียนนำกฎเกณฑ์ ทฤษฎี เหล่านั้นไปใช้ทำแบบฝึกหัด พรพิมล พรพิรชนม์ (2550, หน้า 122) กล่าวว่าขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัย มีดังนี้

4.1 ช้อธิบายปัญหาเป็นขั้นระบุสิ่งที่จะสอนในแง่ของปัญหาเพื่อยั่วให้นักเรียนเกิดความสนใจที่จะหาคำตอบ โดยปัญหาดังกล่าวจะต้องเกี่ยวข้องกับสถานการณ์จริงของชีวิตนักเรียน (เช่น เราจะหาพื้นที่ของสนามฟุตบอลได้อย่างไร)

4.2 ช้อธิบายข้อสรุป เป็นขั้นที่ผู้สอนนำเอาทฤษฎี หลักการ กฎ หรือ นิยามมากกว่า 1 อย่างมาอธิบาย เพื่อให้นักเรียนได้เลือกใช้ในการแก้ปัญหา

4.3 ช้นดกลงใจ เป็นขั้นที่นักเรียนจะเลือกทฤษฎี หลักการ กฎ หรือ นิยามที่จะนำมาใช้ในการแก้ปัญหา

4.4 ช้นพิสูจน์ หรืออาจเรียกว่าขั้นตรวจสอบ เป็นขั้นที่สรุปทฤษฎี หลักการ กฎ หรือ นิยาม ว่าเป็นความจริงหรือไม่ โดยการปรึกษาผู้สอน คั่นคว้าจากตำราต่าง ๆ และจากการทดลอง ข้อสรุปที่ได้พิสูจน์ว่าเป็นความจริง เป็นความรู้ที่ถูกต้อง

จากขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัยของนักการศึกษาดังกล่าวสรุปได้ว่า ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัย มีดังนี้

1. ช้นเตรียม เป็นการนำเข้าสู่บทเรียน โดยการเสนอปัญหาหรือระบุสิ่งที่จะสอนเพื่อให้นักเรียนเกิดความสนใจที่จะหาคำตอบ ปัญหาที่จะนำเสนอควรจะต้องเกี่ยวข้องกับสถานการณ์ของชีวิต และเหมาะสมกับวุฒิภาวะของนักเรียน

2. ช้นสอนเป็นขั้นการนำเอาทฤษฎี หลักการ กฎ ข้อสรุปที่ต้องการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มาให้ให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ทฤษฎี หลักการนั้นเพื่อให้นักเรียนได้เลือกใช้ในการแก้ปัญหา

3. ช้นตรวจสอบและสรุป เป็นขั้นที่นักเรียนจะตรวจสอบและสรุปทฤษฎี หลักการ กฎ ข้อสรุปหรือนิยามที่ใช้ว่าถูกต้อง สมเหตุสมผลหรือไม่ โดยผ่านการพิสูจน์หรือตรวจสอบว่าเป็นจริง จึงจะเป็นความรู้ที่ถูกต้อง

4. ช้นฝึกปฏิบัติ เป็นขั้นที่นักเรียนจะเลือกทฤษฎี หลักการ กฎ ข้อสรุปที่ได้จากการเรียนรู้มาใช้ในการแก้ปัญหาที่กำหนดไว้เมื่อนักเรียนเกิดความเข้าใจในทฤษฎี หลักการ กฎ ข้อสรุปพอสมควรแล้ว ผู้สอนเสนอสถานการณ์ใหม่ให้นักเรียนฝึกนำความรู้มาประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ใหม่ ๆ ที่หลากหลาย เช่น จากโจทย์ จงหา $[a, 60]$ เมื่อ $(a, 28) = 4$ และ $[a, 28] = 140$ ซึ่งนักเรียนจะได้ฝึกนำ ทฤษฎีบท คือ ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว $ab = (a, b)[a, b]$ มาใช้ในการแก้ปัญหาในข้อนี้ เป็นต้น

ข้อดีและข้อจำกัด ของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัย

สิริ (Sidhu, 1981, pp. 108-110) ได้กล่าวถึงข้อดีของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัยไว้ดังนี้

1. เป็นวิธีที่มีขั้นตอนสั้นและประหยัดเวลาในการแก้ปัญหาโดยการใช้สูตรจะทำให้ใช้เวลาน้อยเพราะฉะนั้นครูผู้สอนจึงเลือกที่จะใช้วิธีนี้
2. วิธีการนี้ความจำเป็นเรื่องสำคัญเนื่องจากนักเรียนจะต้องใช้ความจำในการจำสูตร
3. ในขั้นตอนของการฝึกฝนและการปรับปรุงวิธีการนี้จะมีประโยชน์เพียงพอที่จะนำมาใช้

4. วิธีการนี้จะทำให้ความเร็วและประสิทธิภาพของการแก้ปัญหาดีขึ้น

ทิตนา แคมมณี (2550, หน้า 31) กล่าวว่า ข้อดีและข้อจำกัด ของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัย ดังนี้

ข้อดี

1. เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ช่วยถ่ายทอดเนื้อหาสาระได้อย่างรวดเร็วและไม่ยุ่งยาก
2. เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่นักเรียนมีโอกาสได้ฝึกฝนการนำทฤษฎี/ หลักการไปใช้ในสถานการณ์ใหม่ๆ
3. เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เอื้ออำนวยให้นักเรียนที่มีความสามารถหรือเรียนรู้ได้เร็ว สามารถพัฒนา โดยไม่ต้องรอนักเรียนที่ช้ากว่า

ข้อจำกัด

1. เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ผู้สอนจำเป็นต้องเตรียมตัวอย่าง/ สถานการณ์/ ปัญหาที่หลากหลายมาให้นักเรียนได้ฝึกทำ
2. เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ขึ้นกับความเข้าใจและความสามารถของผู้สอนในการนำเสนอทฤษฎี หลักการ
3. เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่นักเรียนที่เรียนรู้ได้ช้า อาจจะตามไม่ทันเพื่อนและเกิดปัญหาในการเรียนรู้

พรพิมล พรพิรชนม์ (2550, หน้า 122) กล่าวว่า ข้อดีและข้อจำกัด ของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัย ดังนี้

ข้อดี

1. เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ช่วยถ่ายทอดเนื้อหาสาระได้อย่างรวดเร็วและไม่ยุ่งยาก

2. เหมาะที่จะใช้สอนเนื้อหาวิชาง่าย ๆ หรือสอนเกี่ยวกับหลักเกณฑ์ต่าง ๆ เพราะสามารถอธิบายให้นักเรียนเข้าใจความหมายได้ดี

3. ฝึกให้นักเรียนเป็นคนมีเหตุผล ไม่เชื่ออะไรง่าย ๆ โดยไม่มีการพิสูจน์ให้เห็นจริง

4. เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เอื้ออำนวยให้นักเรียนที่มีความสามารถเรียนรู้ได้เร็วสามารถพัฒนาการเรียนรู้ของตนได้โดยไม่ต้องรอนักเรียนที่เรียนรู้ได้ช้า

ข้อจำกัด

1. ใช้สอนได้เฉพาะบางเนื้อหา ไม่ส่งเสริมคุณค่าในการแสวงหาความรู้

2. เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่นักเรียนไม่ได้เกิดความคิดรวบยอดด้วยตนเอง

เพราะผู้สอนกำหนดความคิดรวบยอดให้

3. ผู้สอนต้องเตรียมตัวอย่างสถานการณ์หรือปัญหาที่หลากหลายให้นักเรียนได้ฝึกทำ และต้องอาศัยความสามารถของผู้สอนในการนำเสนอทฤษฎี หลักการ กฎ นิยามหรือข้อสรุปต่าง ๆ

4. นักเรียนที่เรียนรู้ได้ช้า อาจตามไม่ทันเพื่อนและอาจเกิดปัญหาในการเรียนรู้ได้จากคำกล่าวของนักการศึกษาเกี่ยวกับข้อดีและข้อจำกัดของรูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัยดังกล่าวผู้วิจัยสรุปได้ว่าข้อดีและข้อจำกัดของรูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัยมีดังต่อไปนี้

ข้อดี

1. เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เอื้ออำนวยให้นักเรียนที่มีความสามารถเรียนรู้ได้เร็วสามารถพัฒนาการเรียนรู้ของตนได้

2. เหมาะสำหรับใช้สอนเนื้อหาวิชาง่าย ๆ หรือสอนเกี่ยวกับหลักเกณฑ์ต่าง ๆ

3. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่นักเรียนมีโอกาสได้ฝึกฝนการนำทฤษฎี/ หลักการไปใช้ในสถานการณ์ใหม่ ๆ

ข้อจำกัด

1. เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่นักเรียนไม่ได้เกิดความคิดรวบยอดด้วยตนเอง

2. เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ขึ้นกับความเข้าใจและความสามารถของผู้สอนในการนำเสนอทฤษฎี หลักการ อาจส่งผลให้นักเรียนบางกลุ่มหรือบางคนตามไม่ทันอาจเกิดปัญหาในการเรียนรู้ได้

จากการศึกษาขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัย ผู้วิจัยจึงทำการสังเคราะห์ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยที่ใช้ในงานวิจัย ดังต่อไปนี้

1. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย (Lardizabal, 1970, pp. 29-32; พรพิมล พรพิรชนม์, 2550, หน้า 122 ; มนต์ ชาติทอง ,2551, หน้า 196) มีขั้นตอนดังนี้

1.1 ขั้นเตรียม เป็นขั้นนำเข้าสู่บทเรียน เตรียมตัวนักเรียนทั้งนี้เพื่อเป็นการชี้แนะให้นักเรียนเกิดกระบวนการของการทำความเข้าใจและยังเป็นพื้นฐานสำหรับที่จะรับความรู้ใหม่ของเรื่องที่จะเรียนอีกด้วย

1.2 ขั้นเสนอตัวอย่าง ขั้นนี้เป็นขั้นที่ผู้สอนให้ตัวอย่างแก่นักเรียนจำนวนหลาย ๆ ตัวอย่างให้มากพอที่นักเรียนจะสังเกต พิจารณาและหาข้อสรุปจากตัวอย่างนั้น ๆ ได้ นอกจากการให้ตัวอย่างแล้วผู้สอนอาจจะให้นักเรียนสังเกตจากการทดลองด้วยตัวเองก็ได้

1.3 ขั้นการเปรียบเทียบ ขั้นนี้เป็นขั้นที่นักเรียนนำสิ่งที่ได้จากการพิจารณาสังเกตตัวอย่างต่าง ๆ หรือจากการทดลองมาวิเคราะห์แยกแยะข้อแตกต่าง เพื่อเปรียบเทียบและหาความสัมพันธ์ของรายละเอียดใน ส่วนที่เหมือนกัน เพื่อนำไปสู่การสรุป การให้คำนิยามและการตั้งเป็นกฎเกณฑ์ไว้ ในขั้นนี้ผู้สอนไม่ควรเร่งเร้าให้นักเรียนให้มากจนเกินไป

1.4 ขั้นการสรุป ขั้นนี้เป็นการสรุปจากตัวอย่างต่าง ๆ หรือการทดลองมาเป็นกฎเกณฑ์นิยาม หรือสูตร ด้วยตัวของนักเรียนเอง

1.5 ขั้นการนำไปใช้ เป็นขั้นทดสอบนักเรียนเกี่ยวกับความเข้าใจในกฎเกณฑ์หรือขั้นที่สรุปได้ว่าสามารถนำไปใช้ในการทำแบบฝึกหัด ซึ่งพวกเขาควรที่จะสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาในรูปแบบ อื่น ๆ ได้

2. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัย

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนิรนัย (Lardizabal, 1970, pp. 35-39; ชมนาด เชื้อสุวรรณทวี, 2542, หน้า 72; พรพิมล พรพิรชนม์, 2550, หน้า 122) มีขั้นตอนดังนี้

2.1 ขั้นเตรียม เป็นการนำเข้าสู่บทเรียนโดยการเสนอปัญหาหรือระบุดังที่จะสอนเพื่อให้นักเรียนเกิดความสนใจที่จะหาคำตอบ ปัญหาที่จะนำเสนอควรจะต้องเกี่ยวข้องกับสถานการณ์ของชีวิตและเหมาะสมกับวุฒิภาวะของนักเรียน

2.2 ขั้นสอนเป็นขั้นการนำเอาทฤษฎี หลักการ กฎ ข้อสรุปที่ต้องการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มาให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ทฤษฎี หลักการนั้นเพื่อให้นักเรียนได้เลือกใช้ในการแก้ปัญหา

2.3 ขั้นตรวจสอบและสรุป เป็นขั้นที่นักเรียนจะตรวจสอบและสรุปทฤษฎี หลักการ กฎ ข้อสรุปหรือนิยามที่เชื่อว่าถูกต้อง สมเหตุสมผลหรือไม่ โดยผ่านการพิสูจน์หรือตรวจสอบว่าเป็นจริง จึงจะเป็นความรู้ที่ถูกต้อง

2.4 ขั้นฝึกปฏิบัติ เป็นขั้นที่นักเรียนจะเลือกทฤษฎี หลักการ กฎ ข้อสรุปที่ได้จากการเรียนรู้มาใช้ในการแก้ปัญหาที่กำหนดไว้เมื่อนักเรียนเกิดความเข้าใจในทฤษฎี หลักการ กฎ ข้อสรุป

พอสมควรแล้ว ผู้สอนเสนอสถานการณ์ใหม่ให้นักเรียนฝึกนำความรู้มาประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ใหม่ที่หลากหลาย

3. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนिरนัย

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนिरนัยดังกล่าว ผู้วิจัยได้จัดทำตารางสังเคราะห์ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนिरนัย ดังตารางที่ 4 แสดงขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนिरนัยดังนี้

ตารางที่ 4 ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนिरนัย

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้		
แบบอุปนัย	แบบอุปนัยและนिरนัย	แบบนिरนัย
1. ขั้นเตรียม	1. ขั้นเตรียม: ผู้สอนทบทวนความรู้เดิมให้แก่ นักเรียน โดยการ ใช้คำถามนำในการเสนอปัญหาที่เกี่ยวข้อง เพื่อให้นักเรียนเกิดความสนใจที่จะหาคำตอบ จากนั้น ผู้สอนแจ้งจุดประสงค์ของการเรียนในหัวข้อนั้น ๆ	1. ขั้นเตรียม
2. ขั้นเสนอ ตัวอย่าง	2. ขั้นเสนอตัวอย่าง: ผู้สอนเสนอตัวอย่างต่าง ๆ อย่างหลากหลายเพื่อให้นักเรียนแต่ละคน ได้วิเคราะห์ สังเกต พิจารณาและหาความสัมพันธ์จากตัวอย่างนั้น ๆ ด้วยตัวของนักเรียนเอง	
3. ขั้นการเปรียบเทียบ	3. ขั้นสังเคราะห์: ผู้สอนเปิดโอกาสให้นักเรียนแต่ละคน/กลุ่ม ได้คิด วิเคราะห์ สังเคราะห์เพื่อหาองค์ประกอบร่วม ซึ่งพิจารณาถึงความเหมือนหรือความต่างจากกรณี ตัวอย่างที่ผู้สอนยกเป็นกรณีศึกษาโดยผู้สอนจะใช้คำถามนำเพื่อให้นักเรียน เกิดกระบวนการคิด อันนำมาซึ่งข้อคาดการณ์หรือข้อค้นพบด้วยตัวนักเรียนเอง	
4. ขั้นการสรุป	4.ขั้นตรวจสอบและสรุป: ผู้สอนและนักเรียนร่วมกัน อธิบายหรือพิสูจน์ ข้อสรุป หลักการ ทฤษฎีบท กฎ สูตร เหล่านี้ขึ้นอีกครั้งหนึ่งเพื่อให้นักเรียน ได้เกิดการเรียนรู้ โดยผู้สอนจะใช้คำถามนำแต่ละขั้นตอนของการอธิบาย	2. ขั้นสอน 3. ขั้นตรวจสอบ และสรุป

ตารางที่ 4 (ต่อ)

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้		
แบบอุปนัย	แบบอุปนัยและนिरนัย	แบบนिरนัย
	หรือการพิสูจน์ เพื่อให้ผู้เรียนเห็นภาพ และเกิดความเข้าใจมากยิ่งขึ้น	
5. ขั้นการนำไปใช้	→ 5. ขั้นนำไปใช้: ให้นักเรียนเลือกนำข้อสรุป หลักการ ทฤษฎีบท กฎ สูตร มาใช้ในการแก้ปัญหาอย่างเหมาะสม เพื่อให้นักเรียนเข้าใจในสิ่งที่ตนเองสรุปมาได้ อย่างลึกซึ้ง และชัดเจนมากขึ้นรวมทั้งการนำความรู้มาประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ใหม่ ๆ ที่หลากหลายได้อีกด้วย	← 4. ขั้นฝึกปฏิบัติ

ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

1. ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

โอดาฟเฟอร์ และธอร์นควิสท์ (O'Daffer & Thomquist, 1993, p. 43) ได้กล่าวถึงการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ว่าการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หมายถึง การใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์ ที่มีอยู่อย่างหลากหลายในการทำความเข้าใจแนวคิดสร้างข้อสรุปหรือสนับสนุนข้อสรุปเกี่ยวกับแนวคิดและความสัมพันธ์ของแนวคิดและแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับแนวคิดนั้น

สมเดช บุญประจักษ์ (2540, หน้า 37) ได้ให้ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่าเป็น การแสดงแนวคิดเกี่ยวกับการสร้างหลักการ หาความสัมพันธ์ของแนวคิด และการสรุปที่สมเหตุสมผลตามแนวคิดนั้น ๆ ซึ่งประกอบด้วย

1. ความสามารถในการวิเคราะห์ และระบุถึงความสัมพันธ์ของข้อมูล
2. ความสามารถในการหาข้อสรุป
3. ความสามารถในการแสดงข้อสรุปและยืนยันข้อสรุปของแนวคิดอย่างสมเหตุสมผล

เวชฤทธิ์ อังกะนะภัทรขจร(2555, หน้า 131) กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการอธิบาย การหาความสัมพันธ์ การวิเคราะห์และแสดงข้อสรุปของ ข้อมูลอย่างสมเหตุสมผลและความสามารถในการพิจารณาข้อสรุป

สถาบันส่งเสริมการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2555 ข, หน้า 39) ได้ให้ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เป็น

กระบวนการการคิดทางคณิตศาสตร์ที่ต้องอาศัยการคิดวิเคราะห์และ/หรือความคิดสร้างสรรค์ ในการรวบรวมข้อเท็จจริง ข้อความ/แนวคิด/สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ต่าง ๆ แจกแจงความสัมพันธ์ หรือการเชื่อมโยงเพื่อทำให้เกิดข้อเท็จจริงหรือสถานการณ์ใหม่

จากคำกล่าวข้างต้นเกี่ยวกับความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สรุปได้ว่าความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการแสดงแนวคิดขั้นตอนในการหาคำตอบหรือการพิสูจน์ และแสดงเหตุผลสนับสนุนคำตอบหรือขั้นตอนการพิสูจน์เหล่านั้น เพื่อเขียนข้อสรุป โดยการอ้างอิงหลักการและแนวคิด รวมทั้ง ทฤษฎีบท กฎ สูตร และนิยามต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้อง อย่างสมเหตุสมผล

2. ความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

รัสเซลล์ (Russell, 1999, p. 1) กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นหัวใจสำคัญของการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เป็นนามธรรม ซึ่งการให้เหตุผลเป็นเครื่องมือที่จะเข้าในนามธรรมนั้น

อาร์ทซ์ และชิเรล (Artzt & Shirel, 1999, pp. 115-126) ได้กล่าวถึงความสำคัญในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า การให้เหตุผลเป็นส่วนที่ทำให้การแก้ปัญหาสมบูรณ์ นักเรียนจะไม่สามารถเข้าใจปัญหา วิเคราะห์ปัญหาหรือวางแผนในการแก้ปัญหาได้ หากปราศจากการให้เหตุผล ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่าการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์มีความสำคัญควบคู่ไปกับการแก้ปัญหา

สถาบันส่งเสริมการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2555 ข, หน้า 39) ได้กล่าวว่า การให้เหตุผลเป็นทักษะและกระบวนการที่ส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักคิดอย่างมีเหตุผล คิดอย่างเป็นระบบ สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ สามารถคาดการณ์วางแผนตัดสินใจและแก้ไขปัญหาได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม การคิดอย่างมีเหตุผลเป็นเครื่องมือสำคัญที่นักเรียนสามารถนำคิดตัวไปใช้ในการพัฒนาตนเองในการเรียนรู้สิ่งใหม่ ๆ ในการทำงานและการดำรงชีวิต ดังนั้นการคิดอย่างมีเหตุจึงเป็นหัวใจสำคัญของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์

จากความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ดังกล่าวสรุปได้ว่าการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นหัวใจสำคัญของการเรียนรู้คณิตศาสตร์เนื่องจากการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นทักษะและกระบวนการที่ส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักคิดอย่างมีเหตุผล คิดอย่างเป็นระบบ สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ หากปราศจากการให้เหตุผลแล้วนักเรียนจะไม่สามารถเข้าใจปัญหา วิเคราะห์ปัญหาหรือวางแผนในการแก้ปัญหาได้

3. แนวทางในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

โรแวน และ โมร์โรว์ (Rowan & Morrow, 1993, pp. 16-18) ได้ให้ข้อคิดเกี่ยวกับบรรยากาศในชั้นเรียนว่าเป็นสิ่งสำคัญมาก ครูต้องจัดบรรยากาศให้นักเรียนเห็นว่าการให้เหตุผลเป็นสิ่งที่สำคัญมากกว่าการได้มาซึ่งคำตอบที่ถูกต้องและบรรยากาศในชั้นเรียนต้องไม่ทำให้นักเรียนรู้สึกหวาดกลัวแต่เป็นบรรยากาศที่สนับสนุนส่งเสริมให้นักเรียนได้พูดอธิบายและแสดงเหตุผลของแนวคิดได้กระทำและสรุปพร้อมทั้งแสดงการยืนยันข้อสรุปของแนวคิดนั้น ๆ

แบรนด์ท์ (Brandt, 1984, p. 3 อ้างถึงใน สมเดช บุญประจักษ์, 2540, หน้า 39) ได้กล่าวว่า การคิดกับการให้เหตุผลมีส่วนสัมพันธ์กัน และเป็นพื้นฐานสำคัญของการเรียนรู้และการแก้ปัญหา ด้วยเหตุนี้นักการศึกษาจึงให้ความสำคัญเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนเกิดการคิดอย่างมีเหตุผลมากขึ้น โดยได้พยายามศึกษาทดลอง เพื่อหาว่าทักษะการคิดอะไรที่จำเป็นและเป็นพื้นฐานของการคิดอย่างมีเหตุผล สอนอย่างไรจึงจะทำให้เกิดทักษะที่ต้องการเหล่านั้น ได้มีการกล่าวถึงแนวการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ไว้ 3 แนวทาง คือ แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อให้เห็นคิด (Teaching for thinking) แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การคิด (Teaching of thinking) และแนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เกี่ยวกับการคิด (Teaching about thinking)

1. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อให้เห็นคิด การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวทางนี้เน้นในด้านการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เนื้อหาวิชา โดยมีการปรับเปลี่ยนกระบวนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อเพิ่มความสามารถในด้านการคิดของนักเรียน
2. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้การคิด การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวทางนี้มีจุดเน้นเกี่ยวกับกระบวนการทางสมองที่นำมาใช้ในการคิด โดยเฉพาะ โดยเน้นไปที่ทักษะการคิดหรือเป็นแนวทางที่สอนทักษะการคิดโดยตรง แนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เน้นจะมีลักษณะที่แตกต่างกันหลายแนวทาง ตามความเชื่อพื้นฐานของผู้ที่จัดสร้างแนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้
3. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เกี่ยวกับการคิด การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวทางนี้เป็นแนวทางที่ใช้การคิดเป็นเนื้อหาสาระของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยมุ่งเน้นให้นักเรียนได้เรียนรู้ถึงสิ่งที่มีความคิดของตนเอง โดยรู้ว่าตนกำลังคิดอะไรต้องการรู้อะไร และในขณะที่กำลังคิดอยู่นั้นตนเองรู้อะไรและไม่รู้อะไร ซึ่งสิ่งดังกล่าวนี้จะช่วยให้นักเรียนได้เข้าใจถึงกระบวนการคิดของตนเองอันก่อให้เกิดทักษะที่เรียกว่า การสังเคราะห์ ความคิดของตนเอง แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เกี่ยวกับการคิดนี้เริ่มเป็นที่สนใจของนักการศึกษาทั่วไปเพิ่มขึ้น โดยเชื่อว่าเป็นแนวทางที่ทำให้นักเรียนสามารถควบคุมและตรวจสอบการคิดของตนเองได้ในขณะที่ทำการคิด ซึ่งจะช่วยให้ นักเรียนสามารถค้นหาข้อบกพร่องของตนเองได้ ทั้งนี้เพื่อหาแนวทางแก้ไขได้ตรงจุด

สถาบันส่งเสริมการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2547, หน้า 15-19) ได้ให้หลักในการพัฒนาการให้เหตุผลว่ามีหลักการที่สำคัญดังนี้

1. ควรจัดประสบการณ์ให้สม่ำเสมอทุกระดับชั้น
2. การให้เหตุผลสามารถพัฒนาได้โดยสอดแทรกทุกหน่วยการเรียนรู้

ตามความเหมาะสม

3. ระดับการให้เหตุผลควรให้สอดคล้องกับวัยและระดับชั้นของนักเรียน
4. การให้เหตุผลควรจัดให้มีประสบการณ์อย่างสม่ำเสมอตั้งแต่ก่อนวัยอนุบาลจนระดับ

มหาวิทยาลัยซึ่งควรจะถูกฝังให้เกิดเป็นนิสัย

5. ควรให้นักเรียนได้ตระหนักว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีเหตุผล ควรจัดบรรยากาศ

ในห้องเรียนให้ส่งเสริมการฝึกการให้เหตุผล

อัมพร ม้าคอง (2553, หน้า 50) เสนอแนะว่าความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนจะพัฒนาขึ้นได้ ครูควรให้นักเรียนได้ปฏิบัติด้วยตนเองทั้งในบริบททางคณิตศาสตร์และบริบทอื่น ๆ รวมทั้งความพยายามใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนแสดงเหตุผลได้อย่างต่อเนื่อง เช่น “ทำไม” “เพราะอะไร” “ถ้าเงื่อนไขบางอย่างเปลี่ยนแปลงไป จะเกิดอะไรขึ้นรู้ได้อย่างไร” โดยครูควรให้ความสำคัญกับทุกเหตุผลไม่เฉพาะเหตุผลที่ถูกต้องหรือสมเหตุสมผลเท่านั้น ซึ่งการให้นักเรียนได้อธิบาย ชี้แจงเหตุผลจะช่วยให้ นักเรียน ได้ทบทวนการทำงานเพื่อสะท้อนความคิดของตนและที่สำคัญคือนักเรียนจะได้ข้อสรุปหรือตัดสินใจถูกต้องของสิ่งต่าง ๆ ด้วยตนเองมากกว่าที่จะเชื่อตามที่ครูบอกหรือตามที่หนังสือเขียนไว้

เวชฤทธิ์ อังกะภักทรขจร (2555, หน้า 131) กล่าวว่า การพัฒนาทักษะการให้เหตุผลควรเริ่มจากการส่งเสริมให้นักเรียนคิดอย่างมีเหตุผลจากบรรยากาศที่สนับสนุน ส่งเสริมให้นักเรียนได้พูดอธิบายและแสดงเหตุผลของแนวคิดอย่างอิสระ แลกเปลี่ยนแนวคิดหรือคำตอบของปัญหา และชี้แจงเหตุผลร่วมกัน และควรจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เป็นการผสมผสานการฝึกการคิดและการให้เหตุผลควบคู่กับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เนื้อหาตามปกติ

จากแนวทางในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ข้างต้นสรุปได้ว่าแนวทางในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ควรเริ่มจากการส่งเสริมให้นักเรียนได้คิดอย่างมีเหตุผล โดยที่ผู้สอนจะต้องสอดแทรกการให้เหตุผลลงไปเนื้อหาและบรรยากาศในห้องเรียนควรเป็นบรรยากาศที่สนับสนุนให้เกิดการแลกเปลี่ยนทางความคิด การคิดอย่างมีเหตุผลสามารถพัฒนาได้โดยใช้กิจกรรมผสมผสานกับการฝึกการคิดควบคู่ไปกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เนื้อหาคณิตศาสตร์ที่เป็นปกติ

4. การประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

4.1 แนวทางในการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ครูลิก และ รุดนิก (Krutik & Rudnick, 1993, pp. 8-9) อธิบายถึงเทคนิคการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

4.1.1 การสังเกต โดยครุควรเดินรอบ ๆ ห้องเพื่อสังเกตความสามารถในการให้เหตุผล ขณะที่นักเรียนกำลังแก้ปัญหาในกลุ่มเพื่อนในห้องเรียน

4.1.2 การทดสอบ ไม่ควรใช้ข้อสอบแบบเลือกตอบแต่ควรเป็นข้อสอบที่ให้นักเรียนได้แสดงเหตุผล เพื่อดูการตัดสินใจของนักเรียน ซึ่งควรเป็นคำถามปลายเปิด

สถาบันส่งเสริมการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2547, หน้า 50-52) ได้ให้แนวคิดเกี่ยวกับการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลนอกจากจะพิจารณาความสามารถในการให้เหตุผล ผู้ประเมินควรคำนึงถึงความสามารถในด้านต่อไปนี้

1. การใช้พื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์ในการให้เหตุผล
2. การใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์สร้างข้อาคดเตาส่งที่จะเกิดขึ้น
3. การประเมินข้อโต้แย้งทางคณิตศาสตร์และการพิสูจน์
4. การเลือกใช้รูปแบบหรือวิธีการที่หลากหลายในการให้เหตุผลหรือพิสูจน์

สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา (2551, หน้า 60) ได้ให้แนวคิดเกี่ยวกับการประเมินผลความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นหนึ่งในทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ที่บรรจุไว้ในหลักสูตร โดยครูสามารถประเมินได้จากกิจกรรมที่นักเรียนทำ จากแบบฝึกหัด จากการเขียนอนุทิน หรือข้อสอบ ที่เป็นคำถามปลายเปิดที่ให้โอกาสนักเรียนแสดงความสามารถ

พรรณทิพา พรหมรัญ (2552, หน้า 59) กล่าวว่า แนวทางในการประเมินผลทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ในด้านการให้เหตุผล สามารถประเมินนักเรียนด้วยวิธีการอย่างหลากหลายวิธี เช่น การสังเกตจากการพูดคุย การเขียน และการประเมินจากการกระทำทางคณิตศาสตร์ (Doing mathematics) โดยปกติแล้วนักเรียนจะสามารถสร้างข้อาคดการณื จากตัวอย่างต่าง ๆ ที่นักเรียนได้เห็นหรือลงมือทำและพัฒนาข้อโต้แย้งซึ่งขึ้นอยู่กับข้อมูลที่นักเรียนมีความรู้ว่าเป็นข้อเท็จจริงหรือไม่

จากแนวทางในการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ดังกล่าวสรุปได้ว่าแนวทางในการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ผู้สอนจะต้องมีการวางแผนและการจัดการความรู้พื้นฐานรวมทั้งการเลือกใช้รูปแบบของการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จากการสังเกตจากการพูดคุย การเขียน การทำ

แบบฝึกหัด การเขียนอนุทิน หรือการทำแบบทดสอบ ซึ่งงานวิจัยนี้ผู้วิจัยเลือกรูปแบบในการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์โดยใช้แบบทดสอบแบบอัตนัยในการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

4.2 เกณฑ์การประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

เนื่องจากผู้วิจัยเลือกรูปแบบในการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ด้วยแบบทดสอบซึ่งใช้เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริคโดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

กูดริช (Goodrich, 1997, pp. 14-17 อ้างถึงใน เวชฤทธิ์ อังคนะภัทรขจร, 2555, หน้า 184) ได้กล่าวถึงสาเหตุของการให้คะแนนแบบรูบริคเป็นสิ่งที่น่าสนใจสำหรับผู้สอนและนักเรียนดังนี้

1. เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริค เป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพสูงสำหรับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้สามารถสะท้อนและช่วยให้นักเรียนปรับปรุงการทำงานได้ตลอดเวลาเหมือนกับการตรวจสอบของผู้สอนเกณฑ์ที่สร้างขึ้นจะช่วยให้นักเรียนได้เห็นถึงแนวทางในการทำงานที่จะทำให้บรรลุจุดมุ่งหมายของเนื้อหานั้น ๆ ได้ดีขึ้น ดังนั้นสิ่งที่สำคัญที่สุดของการให้คะแนนแบบรูบริคคือการนิยามเกณฑ์หรือระดับคุณภาพ

2. เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริค จะทำให้นักเรียนมีความละเอียดรอบคอบในการตัดสินคุณภาพของตนเองทำให้ตระหนักถึงความแตกต่างระหว่างงานที่เสร็จกับงานที่มีคุณภาพ

3. เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริคจะช่วยลดเวลาของผู้สอนในการประเมินชิ้นงานและเมื่อมีเกณฑ์ที่ชัดเจน นักเรียนก็สามารถวิเคราะห์และประเมินชิ้นงานของตนเองและผู้อื่นได้อย่างเที่ยงตรง มีความยุติธรรม เป็นที่ยอมรับของคนอื่นในชั้นเรียน

4. เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริคเป็นสิ่งที่ง่ายต่อการใช้และการอธิบายผู้อื่นให้ เข้าใจ การประเมินหรือการให้คะแนนของตนเอง

สถาบันส่งเสริมการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2555 ข, หน้า 168) กล่าวว่า การให้คะแนนแบบรูบริคเป็นเครื่องมือช่วยให้ครูพิจารณาและตัดสินใจระดับความสามารถของนักเรียนด้านความรู้ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ ทักษะ/ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ และการประยุกต์ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ เพื่อนำผลที่ได้มาใช้ในการปรับปรุงการเรียนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้มีประสิทธิภาพดียิ่งขึ้น ตลอดจนการให้คะแนนแบบรูบริคยังเป็นเครื่องมือช่วยให้นักเรียนประเมินผลระดับความสามารถด้านคณิตศาสตร์ของตนเองแล้วนำผลที่ได้มาปรับปรุงและพัฒนาความสามารถด้านคณิตศาสตร์ของตนเองให้ดียิ่งขึ้นด้วย

เวชฤทธิ์ อังคนะภัทรขจร (2555, หน้า 184-185) กล่าวถึง ประเภทของเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริค ซึ่งมี 2 รูปแบบ ดังนี้

1. การให้คะแนนแบบภาพรวม (Holistic scoring) เป็นการให้คะแนนที่ประเมินความรู้ และผลงานของนักเรียน โดยกำหนดระดับคะแนน พร้อมบรรยายละเอียดของผลงานหรือพฤติกรรม ของนักเรียนเป็นภาพรวม โดยไม่มีการแยกเป็นด้าน ๆ การให้คะแนนลักษณะนี้มักใช้ในการตัดสิน หรือสรุปผลการเรียนของนักเรียน

2. การให้คะแนนแบบแยกองค์ประกอบ (Analytic scoring) เป็นการให้คะแนนตาม องค์ประกอบของสิ่งที่ต้องการประเมิน เช่น เมื่อประเมินความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การวิเคราะห์ข้อมูล อาจแยกพิจารณาเป็นด้านการเก็บรวบรวมข้อมูล ด้านการนำเสนอข้อมูล และ ด้านการอ่าน เปรียบเทียบ และวิเคราะห์แนวโน้มของข้อมูล การให้คะแนนลักษณะนี้มักใช้ในการ ประเมินผลการเรียนรู้ที่มีจุดประสงค์เพื่อ วินิจฉัยหาจุดเด่นหรือจุดด้อยของนักเรียนในแต่ละด้าน จากเกณฑ์การให้คะแนนแบบบูรณาการดังกล่าวผู้วิจัยใช้รูปแบบการให้คะแนนแบบภาพรวม (Holistic scoring) ซึ่งมีผู้ให้เกณฑ์การประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ แบบบูรณาการ ประเภทการให้คะแนนแบบภาพรวมไว้ดังนี้

กระทรวงศึกษาธิการ (2546, หน้า 75) ได้กำหนดเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถ ในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์แสดงดังตารางที่ 5

ตารางที่ 5 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของ กระทรวงศึกษาธิการ

คะแนน/ ความหมาย	ผลการทำข้อสอบแบบอัตนัย	ความสามารถในการให้เหตุผล
4: ดีมาก	การแสดงวิธีทำชัดเจน สมบูรณ์ คำตอบ ถูกต้อง ครบถ้วน	มีการอ้างอิง เสนอแนวคิด ประกอบการตัดสินใจ อย่างสมเหตุสมผล
3: ดี	การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจนนัก แต่อยู่ใน แนวทางที่ถูกต้อง คำตอบถูกต้อง ครบถ้วน	มีการอ้างอิงที่ถูกต้องบางส่วน และ เสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจ
2: พอใช้	การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจน หรือไม่แสดง วิธีทำ คำตอบถูกต้อง ครบถ้วน หรือ การแสดงวิธีทำชัดเจน สมบูรณ์ แต่คำตอบ ไม่ถูกต้อง ขาดการตรวจสอบ	เสนอแนวคิดไม่สมเหตุสมผล ในการประกอบการตัดสินใจ
1: ควรแก้ไข	การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจนนัก แต่อยู่ใน แนวทางที่ถูกต้อง คำตอบไม่ถูกต้องหรือ	มีความพยายามเสนอแนวคิด ประกอบการตัดสินใจ

ตารางที่ 5 (ต่อ)

คะแนน/ ความหมาย	ผลการทำข้อสอบแบบอัตนัย	ความสามารถในการให้เหตุผล
	ไม่แสดงวิธีทำ และคำตอบที่ได้ไม่ถูกต้อง แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง	
0: ต้องปรับปรุง	ทำได้ไม่ถึงเกณฑ์	ไม่มีแนวคิดประกอบการตัดสินใจ

อลิสรา ชมชื่น (2550, หน้า 118) ได้กำหนดเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์แสดงดังตารางที่ 6

ตารางที่ 6 เกณฑ์การประเมินวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของอลิสรา ชมชื่น

คะแนน/ ความหมาย	ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ปรากฏให้เห็น
1/ ดี	- อ้างอิงเหตุผลถูกต้อง ครบถ้วน
0.5/ พอใช้	- อ้างอิงเหตุผลถูกต้องบางส่วน
0/ ไม่ดี	- อ้างอิงเหตุผลไม่ถูกต้อง หรือไม่มีการอ้างเหตุผล

จากเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริค โดยการให้คะแนนแบบภาพรวม (Holistic scoring) ดังกล่าวผู้วิจัยจึงนำมาปรับปรุงโดยกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังตารางที่ 7

ตารางที่ 7 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

คะแนน/ ความหมาย	ความสามารถในการให้เหตุผลที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 4 ดีมาก	อธิบายขั้นตอนในการหาคำตอบหรือการพิสูจน์ได้อย่างถูกต้องรวมทั้งแสดงเหตุผลสนับสนุนคำตอบ หรือยืนยันข้อสรุปนั้น มีการอ้างอิงหลักการ หรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องทุกส่วน ชัดเจน รัดกุม และสมเหตุสมผล
ระดับ 3 ดี	อธิบายขั้นตอนในการหาคำตอบหรือการพิสูจน์ได้อย่างถูกต้องแต่แสดงเหตุผลสนับสนุนคำตอบ หรือยืนยันข้อสรุป มีการอ้างอิงหลักการ หรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องเพียงบางส่วน
ระดับ 2 พอใช้	อธิบายขั้นตอนในการหาคำตอบหรือการพิสูจน์ไม่สมบูรณ์แต่มีการแสดงเหตุผลสนับสนุนคำตอบเหล่านั้น หรือยืนยันข้อสรุป มีการอ้างอิงหลักการ หรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง
ระดับ 1 ควรปรับปรุง	อธิบายขั้นตอนในการหาคำตอบหรือการพิสูจน์ไม่สมบูรณ์และแสดงเหตุผลสนับสนุนคำตอบ หรือยืนยันข้อสรุป มีการอ้างอิงหลักการ หรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องเพียงบางส่วน
ระดับ 0 ไม่มีความพยายาม	อธิบายขั้นตอนในการหาคำตอบหรือการพิสูจน์ไม่สมบูรณ์และแสดงเหตุผลสนับสนุนคำตอบ หรือยืนยันข้อสรุป มีการอ้างอิงหลักการ หรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ด้วยวิธีการที่ไม่ถูกต้อง หรือไม่ปรากฏร่องรอยการเขียนอธิบายเพื่อแสดงเหตุผลทางคณิตศาสตร์หรือไม่ได้ทำ

ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

1. ความหมายของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

อัมพร ม้าคอง (2547, หน้า 102-103, 2553, หน้า 56) กล่าวว่า การสื่อสารทางคณิตศาสตร์เป็นการสื่อสารและสื่อความหมายที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ระหว่างผู้ส่งสารกับผู้รับสารให้มีความเข้าใจตรงกัน โดยนักเรียนในฐานะผู้ส่งสารต้องมีความสามารถในการอธิบาย ชี้แจง แสดงความเข้าใจหรือ ความคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ของตนเองให้ผู้อื่นรับรู้ เช่น การใช้ภาษา และสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความหมาย การอธิบายลำดับขั้นตอนของการทำงาน การแสดงเหตุผลเพื่อสนับสนุนข้อสรุปที่ได้ การใช้ตาราง กราฟ หรือค่าสถิติ ในการอธิบายหรือการนำเสนอข้อมูล

สถาบันส่งเสริมการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2555 ข, หน้า 59) ระบุว่า การสื่อสารทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่จะช่วยให้นักเรียนสามารถถ่ายทอดความรู้ ความเข้าใจ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ หรือกระบวนการคิดของตนให้ผู้อื่นรับรู้ได้อย่างถูกต้องชัดเจน และมีประสิทธิภาพ

เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร (2555, หน้า 120) ได้กล่าวถึงความหมายของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ว่า การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถจัดระบบและอธิบายแนวคิดที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ของตนให้บุคคลอื่นรับรู้ได้อย่างถูกต้อง เหมาะสม และสมเหตุสมผล ซึ่งการอธิบายแนวคิดทางคณิตศาสตร์สามารถอธิบายได้โดยการพูด การเขียน และการนำเสนอแนวคิด นอกจากนี้การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ เป็นการสื่อสารที่ใช้ สัญลักษณ์ ตัวแปร กราฟ อสมการ ฟังก์ชัน และตัวแปรเชิงคณิตศาสตร์มาช่วยในการสื่อความหมาย และการนำเสนอ นอกเหนือไปจากการนำเสนอผ่านการพูดและการเขียน

จากแนวคิดดังกล่าวสรุปได้ว่า การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ หมายถึงการสื่อสารและสื่อความหมายที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์รวมทั้งการแสดง ความสามารถในการใช้ การคิด การเขียน การใช้ศัพท์ สัญลักษณ์ และ โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ในการสื่อความหมาย เพื่อนำเสนอแนวคิด อธิบายและแสดงความหมาย ความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ของคนให้ผู้อื่นเข้าใจอย่างถูกต้อง ชัดเจนและรัดกุม ซึ่งในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ เนื่องจากความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์เป็นทักษะหนึ่ง ที่ควรให้นักเรียนได้ฝึกการเขียนแสดงแนวคิดของตนเอง เพื่อให้นักเรียนได้เห็นว่า การเขียนเป็นส่วนสำคัญของการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ (Rowan & Morrow, 1993, pp. 9-11, 324) จึงขอสรุปความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้ ความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ คือ ความสามารถในการใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ในการเขียนแสดงขั้นตอนในการหาคำตอบหรือการพิสูจน์รวมทั้งการเขียนแสดงเหตุผลสนับสนุน คำตอบหรือขั้นตอนการพิสูจน์เหล่านั้น ได้อย่างถูกต้อง ครบถ้วน ตามหลักการทางคณิตศาสตร์

2. ความสำคัญของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

มัมมี และเซฟเพอร์ด (Mumme & Shepherd, 1993, pp. 7-9) ได้เสนอประโยชน์ในการเรียนคณิตศาสตร์ที่เกิดจากการส่งเสริมการสื่อสาร ดังนี้

1. การสื่อสารจะช่วยส่งเสริมความเข้าใจคณิตศาสตร์แก่นักเรียนโดยให้นักเรียนได้อธิบายความคิดของเขา มีความสนใจในการที่จะได้อภิปราย และการฟังก็จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจได้อย่างลึกซึ้ง การฟังจะช่วยให้นักเรียนได้พิจารณาความคิดของคนอื่นที่แตกต่างกันออกไปของ

นักเรียน แม้จะอยู่ในสถานการณ์เดียวกันก็ตาม การสื่อสารจะสนับสนุนการสร้างความรู้แก่นักเรียน โดยการใช้สื่อสารจะช่วยขยายความคิด

2. การสื่อสารจะช่วยให้เกิดการแลกเปลี่ยนความคิดทางคณิตศาสตร์แก่นักเรียน นักเรียน ส่วนมากมักจะล้มเหลวในการแสดงความคิดทางคณิตศาสตร์ เมื่อนักเรียนได้นำเสนอ กฎเกณฑ์และ กระบวนการต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์โดยการจำมากกว่าการคิดแบบค้นพบด้วยตนเอง และการแลกเปลี่ยนความคิดซึ่งกันและกัน ครูจำเป็นต้องให้เกิดการสื่อสารมากขึ้น เพื่อให้บุคคล หนึ่งได้เชื่อมต่อกับความคิดทางคณิตศาสตร์ไปยังอีกบุคคลหนึ่ง โดยการอภิปรายและการแลกเปลี่ยน ความคิดกัน ครูต้องให้นักเรียนมีการพัฒนาทางภาษาคณิตศาสตร์ในการทำความเข้าใจในบทบาท ของคำนิยามและกระบวนการในการอภิปรายและขยายสมมติฐานให้ชัดเจน

3. การสื่อสารจะช่วยเสริมสร้างให้นักเรียนเป็นนักเรียนรู้ เมื่อครูเปิดโอกาสให้นักเรียน ได้พูดหรือเขียนความคิดของนักเรียน เพื่อให้ครูแน่ใจในความสามารถทางการสื่อสารความคิดของ นักเรียนอย่างแท้จริง นักเรียนควรฝึกการใช้ศักยภาพและควบคุมการเรียนรู้ของพวกเขาให้มาก เพื่อที่นักเรียนจะได้กลายเป็นผู้เสริมสร้างความรู้ด้วยตนเอง

4. การสื่อสารเป็นการส่งเสริมสภาพแวดล้อมที่อำนวยความสะดวกในการเรียนรู้ การพูดและการฟังบุคคลอื่นในการทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มเล็ก ๆ เป็นวิธีการที่จะทำให้เราหลุดพ้น จากความวิตกกังวลในการแสดงความคิด การมีปฏิสัมพันธ์กับเพื่อนจะเป็นการให้ความสนุกสนาน ในการเรียนแก่นักเรียน การอำนวยความสะดวกและสังคมจะมีอิทธิพลต่อความเต็มใจที่จะพูด เพื่อเป็นการแลกเปลี่ยนความคิดของนักเรียน

5. การสื่อสารจะช่วยให้ครูผู้สอนได้รับประโยชน์ในการหยั่งรู้ถึงความคิดของนักเรียน ครูจะได้เรียนรู้เกี่ยวกับวิธีการคิดของนักเรียนเป็นอย่างมาก โดยการฟังการอธิบายและการให้ เหตุผลของนักเรียน ความสามารถที่เป็นทักษะการสื่อสารจะเป็นการอธิบายโดยใช้ภาษาคณิตศาสตร์ทั้งหมดอย่างคล่องแคล่ว โดยนักเรียนจะต้องนำไปใช้และมีการฝึกปฏิบัติบ่อย ๆ

เคนเนดี และทิปส์ (Kennedy & Tipps, 1994, p. 181) กล่าวว่า การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เป็นเป้าหมายที่สำคัญของการเรียนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ช่วยให้นักเรียนสร้าง ความเชื่อมโยงระหว่างข้อมูลความรู้ที่เป็นนามธรรม ไปสู่สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

อัมพร ม้าคนอง (2553, หน้า 57) ได้กล่าวถึงความสำคัญของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ว่าการสื่อสารทางคณิตศาสตร์มีความสำคัญในการทำให้เกิดความเข้าใจร่วมกันระหว่างผู้สื่อสารกับ ผู้รับสาร โดยในกระบวนการสื่อสาร ผู้สื่อสารจะต้องจัดระบบความคิดและสื่อเป็นภาษาพูดหรือ เขียนให้ผู้รับสารเข้าใจตรงกัน ในขณะเดียวกัน ผู้รับสารก็จะต้องทำความเข้าใจและติดตามในสิ่งที่ ผู้สื่อสารพูดหรือเขียน การสื่อสารทางคณิตศาสตร์จึงมีความสำคัญในการทำให้เกิดสิ่งต่อไปนี้

1. ก่อให้เกิดความเข้าใจร่วมกันระหว่างนักเรียน ทำให้เข้าใจงานที่ทำตรงกัน
2. ส่งเสริมบริบทของการเรียนรู้ที่เหมาะสม เนื่องจากเป็นบริบทของการพูดจากัน
3. เพิ่มความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ให้กับทั้งผู้ส่งสารและผู้รับสาร
4. ช่วยให้ผู้มองเห็นความเข้าใจของนักเรียนซึ่งจะทำให้วางแผนจัดการเรียนรู้ได้อย่างเหมาะสม

สถาบันส่งเสริมการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2555 ข, หน้า 59) ได้ให้ความสำคัญของการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอว่า การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอเป็นทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จะช่วยให้นักเรียนสามารถถ่ายทอดความรู้ความเข้าใจ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ หรือกระบวนการคิดของคนให้ผู้อื่น ได้อย่างถูกต้อง ชัดเจนและมีประสิทธิภาพ การที่นักเรียนมีส่วนร่วมในการอภิปรายหรือการเขียนแลกเปลี่ยนความรู้ความคิดเห็นถ่ายทอดประสบการณ์ซึ่งกันและกัน ขอมรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น จะช่วยให้นักเรียนเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้อย่างมีความหมาย เข้าใจได้อย่างกว้างขวางลึกซึ้งและ จดจำได้นานมากขึ้นอีกด้วย

จากการศึกษาความสำคัญของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ดังกล่าวสรุปได้ว่าการสื่อสารทางคณิตศาสตร์เป็นเป้าหมายที่สำคัญของการเรียนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เนื่องจาก การสื่อสารทางคณิตศาสตร์จะช่วยให้นักเรียนสามารถถ่ายทอดความรู้ความเข้าใจ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ ก่อให้เกิดการแลกเปลี่ยนความคิดทางคณิตศาสตร์หรือกระบวนการคิดของคนให้ผู้อื่น ได้อย่างถูกต้อง ชัดเจนและมีประสิทธิภาพในขณะเดียวกัน ผู้รับสารก็จะต้องทำความเข้าใจและคิดตามในสิ่งที่ผู้สื่อสารพูดหรือเขียน

3. แนวทางในการพัฒนาความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM, 2000, pp. 270-272) ได้กล่าวถึงบทบาทของครูในการส่งเสริมการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระดับเกรด 6-8 ว่า ครูจะต้องจัดสภาพห้องเรียนที่เอื้อต่อการส่งเสริมให้นักเรียนมีการอธิบาย การถกเถียง การอภิปราย และการใช้เหตุผลเป็นวิธีที่ทำให้นักเรียนได้มีปฏิสัมพันธ์กัน มีการแลกเปลี่ยนความคิดเห็น ค้นหาปัญหาร่วมกัน รวมถึงการให้คำแนะนำจากครู การให้คะแนนมีการอธิบาย การถกเถียง การอภิปราย และการใช้เหตุผล เป็นวิธีที่ทำให้นักเรียนได้มีการสื่อสารให้เกิดการเรียนรู้ โดยครูจะกำหนดชิ้นงาน (Tasks) ที่ประกอบไปด้วย

1. ความสัมพันธ์เกี่ยวกับความสำคัญของแนวคิดทางคณิตศาสตร์
2. มีแนวทางในการหาคำตอบได้หลายวิธี
3. อนุญาตให้นักเรียนแสดงการใช้ตัวแทน (Representations) ได้อย่างหลากหลาย

4. เปิดโอกาสให้นักเรียนได้อธิบายแสดงเหตุผล และการคาดเดาในการแก้ปัญหา การอำนวยความสะดวกในการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ครูจะมีหน้าที่ในการให้คำแนะนำ โดยที่ครูเดินไปตามกลุ่มและรับฟังคำตอบ ที่แตกต่างกันของนักเรียน การพูดและการเขียนเป็นการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญที่ช่วยให้นักเรียน

- 4.1 คิดวิธีการแก้ปัญหา
- 4.2 มีกฎเกณฑ์ในการอธิบาย
- 4.3 ทดสอบความสามารถของนักเรียนที่เกี่ยวกับคำศัพท์และสัญลักษณ์ใหม่ ๆ
- 4.4 ตรวจสอบรูปแบบของการให้เหตุผล
- 4.5 การให้เหตุผลของการคาดเดา
- 4.6 การวิเคราะห์ข้อแก้ตัว (Justifications)

อัมพร ม้าคนอง (2553, หน้า 58) กล่าวว่า การพัฒนาทักษะการสื่อสาร อาจเริ่มต้นจากสิ่งง่าย ๆ เช่น ฝึกให้นักเรียนแสดงความคิดทางคณิตศาสตร์โดยใช้ภาษาของตัวเอง ในลักษณะที่ไม่เป็นทางการ (Informal style) ซึ่งจะเป็นการแสดงความคิดที่เกิดขึ้นแรก ๆ (Initial thinking) หรือความรู้ที่ตนเพิ่งสร้างขึ้นหรือรับมา การฝึกในลักษณะนี้ ผู้สอนจะต้องมีความเข้าใจเกี่ยวกับภาษาทางคณิตศาสตร์และความหมายที่แตกต่างกันออกไปของคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ เนื่องจากคำบางคำ เมื่อไม่อยู่ในบริบทคณิตศาสตร์ เช่น คำว่า คู่ หักออก ผลที่ได้ เป็นต้น หลักจากฝึกการสื่อสารอย่างไม่เป็นทางการแล้ว ลำดับต่อไป ผู้สอนอาจฝึกให้นักเรียนสื่อสารอย่างเป็นทางการ (Formal style) ซึ่งเป็นภาษาที่ใช้เรียนหรือแสดงสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นสากล นักเรียนอาจต้องพยายามและใช้เวลามากขึ้นในการแสดงความเข้าใจ หรือสื่อสารอย่างเป็นทางการกับผู้สอน และเพื่อในชั้นเรียน อย่างไรก็ตาม ไม่ว่าจะเป็นการสื่อสารในลักษณะใด หากผู้สอนต้องการฝึกทักษะการสื่อสารให้กับนักเรียน ผู้สอนควรลดเวลาหรือปริมาณการพูดในห้องเรียนของตนให้น้อยลง นักเรียนจะได้สื่อสารกันมากขึ้น อันจะทำให้นักเรียนคุ้นเคยและสามารถพัฒนาทักษะการสื่อสารให้ดีขึ้นได้

เวชฤทธิ์ อังคนะภัทรขจร (2555, หน้า 131-132) กล่าวว่า กิจกรรมที่ส่งเสริมทักษะและกระบวนการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ การสืบสวน สอบสวน การเขียนอนุทิน การเขียนรายงานและ การเขียนโปสเตอร์ นอกจากนี้การพัฒนาทักษะการสื่อสาร ควรเริ่มจากการให้นักเรียนได้สำรวจและอธิบายแนวคิดทางคณิตศาสตร์ผ่านกระบวนการอ่าน การพูด การเขียน และการนำเสนอแนวคิดนอกจากนี้ผู้สอนควรให้นักเรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้และจัดบรรยากาศที่เอื้อต่อการอธิบาย

และแสดงเหตุผล เพื่อแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับผู้อื่น รวมทั้งผู้สอนควรลดปริมาณเวลาและปริมาณการพูดของตนเองให้น้อยลง เพื่อให้นักเรียนได้สื่อสารกันมากขึ้น

สถาบันส่งเสริมการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2555 ข, หน้า 63) ได้เสนอแนวทางในการส่งเสริมความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์โดยครูควรให้นักเรียนได้รับประสบการณ์ต่อไปนี้

1. มีส่วนร่วมอย่างกระฉับกระเฉง (Active participation) กล่าวคือ ให้นักเรียนซึ่งเป็นผู้รับสารมีโอกาสได้ซักถามหลังจากฟังคำอธิบาย มีโอกาสนำเสนอแนวคิดหรือเหตุผลที่ต่างออกไป หรือได้ลงมือปฏิบัติ

2. มีโอกาสทราบผลการกระทำทันที (Immediate feedback) กล่าวคือ ให้นักเรียนซึ่งเป็นผู้ส่งสารได้รับคำติชมวิพากษ์วิจารณ์ทันทีในโอกาสแรกที่เป็นไปได้ทั้งนี้เพื่อจะได้ทราบว่าผู้รับสามารถรับสารได้ดีเพียงใด

3. มีความรู้สึกภาคภูมิใจและประสบการณ์ที่เป็นความสำเร็จ (Success experience) กล่าวคือ มีการท้าทายให้นักเรียนซึ่งเป็นผู้รับสารได้คิดหรือได้ทำ ทั้งนี้เพราะเมื่อทำได้สำเร็จก็จะเกิดความภาคภูมิใจ

3. มีโอกาสได้รับสารทีละน้อยตามลำดับขั้น (Gradual approximation) กล่าวคือ ให้นักเรียนซึ่งเป็นผู้รับสารได้ใคร่ครวญตามทีละน้อยจากง่ายไปยาก จนเข้าใจในเนื้อหาของสารที่จะได้รับ

จากการศึกษาข้างต้นสรุปได้ว่า แนวทางในการพัฒนาความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ควรเริ่มจากการให้นักเรียนได้สำรวจและอธิบายแนวคิดทางคณิตศาสตร์ผ่านกระบวนการอ่าน การพูด การเขียน และการนำเสนอแนวคิดนอกจากนี้ผู้สอนควรให้นักเรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนรู้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้และจัดบรรยากาศที่เอื้อต่อการอธิบายและแสดงเหตุผล เพื่อแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับผู้อื่น นอกจากนี้ผู้สอนควรมีการเสริมแรงคือให้นักเรียนมีความรู้สึกภาคภูมิใจและได้รับประสบการณ์ที่เป็นความสำเร็จ (Success experience) ซึ่งจะก่อให้เกิดกำลังใจในการเรียนต่อไป นอกจากนี้ครูจะต้องจัดบรรยากาศในห้องเรียนให้เอื้อต่อกระบวนการเรียนรู้และการอำนวยความสะดวกในการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

4. การประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

4.1 แนวทางในการประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

สภาครุคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM, 1989, pp. 214-217) ได้ระบุว่าการประเมินผลความสามารถในการสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และนำเสนอของนักเรียนควรให้นักเรียนมีความสามารถดังต่อไปนี้

4.1.1 บรรยายความคิดทางคณิตศาสตร์โดยการพูด การเขียน สาสิตให้เห็นภาพได้

4.1.2 เข้าใจ แปลความหมาย และประเมินความคิดทางคณิตศาสตร์ จากข้อมูล ที่พบเห็น จากสิ่งที่นำเสนอในรูปแบบการเขียน หรือจากสิ่งที่มีการนำเสนอโดยรูปแบบปากเปล่าได้

4.1.3 ใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์ เครื่องหมาย สัญลักษณ์ในการนำเสนอความคิด ที่แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลได้

เลสเตอร์ และ โครลล์ (Lester & Kroll, 1991, pp. 278-282 อ้างถึงใน สมเดช บุญประจักษ์, 2540, หน้า 48-51) ได้เสนอเทคนิคการประเมินผลในชั้นเรียน ว่าสามารถประเมินได้จาก

1. การสังเกตและสอบถาม

การสังเกตและสอบถามนักเรียนขณะที่นักเรียนขณะที่นักเรียนกำลังทำกิจกรรม ทางคณิตศาสตร์จะทำให้ได้ข้อมูลเกี่ยวกับทักษะ กระบวนการคิด เจตคติและความเชื่อ ซึ่งการสังเกตสามารถทำได้ทั้งอย่างไม่เป็นทางการขณะที่เดินดูการปฏิบัติงานของนักเรียน และสังเกตอย่างเป็นทางการหรือจากการสัมภาษณ์

การเลือกคำถามที่จะถามในขณะที่ทำการสังเกตเป็นสิ่งที่สำคัญ ในชั้นเรียนปกติมีหลาย เหตุผลในการถามคำถาม เช่น ถามเพื่อกระตุ้นให้คิด ถามเพื่อชี้แนะ ถามเพื่อตรวจสอบความเข้าใจ หรือถามเพื่อให้นักเรียนรู้ว่าเพื่อนรู้อะไร

ครูควรบันทึกการสังเกต โดยอาจบันทึกลงในบัตรบันทึก หรือแบบสำรวจรายการหรือ แบบประมาณค่า หรือแบบบันทึกสำหรับบันทึกการสังเกต การสังเกตเป็นวิธีที่ดีที่สุดในการเก็บ ข้อมูลเกี่ยวกับการคิดและการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

2. การตรวจผลงาน

เป็นการพิจารณาถึงกระบวนการแก้ปัญหา โดยพิจารณาว่านักเรียนดำเนินการแก้ปัญหา อย่างไร ไม่ได้ให้ความสำคัญของผลลัพธ์ที่ได้เป็นหลัก มีวิธีการตรวจผลงานนักเรียนที่สำคัญ 2 วิธี คือ

2.1 การตรวจให้คะแนนแต่ละขั้นตอนของการแก้ปัญหา (Analytic scoring)

เป็นการตรวจให้คะแนนโดยกำหนดระดับหรือจุดการให้คะแนนแต่ละระดับพฤติกรรม ในแต่ละ ขั้นตอนของกระบวนการแก้ปัญหา

2.2 การตรวจให้คะแนนภาพรวม (Holistic scoring) เน้นการให้คะแนนภาพรวมของ ผลการแก้ปัญหา ให้คะแนนตามเกณฑ์ที่กำหนดที่สัมพันธ์กับกระบวนการคิดในการแก้ปัญหา ให้ค่าคะแนนหนึ่งสำหรับผลการแก้ปัญหาทั้งหมด ซึ่งต่างจากการให้คะแนนในแต่ละขั้นตอน ของการแก้ปัญหา

3. การประเมินผลจากการเขียน

การเขียนนับว่าเป็นส่วนสำคัญของการเรียนรู้คณิตศาสตร์ การประเมินผลจากการเขียนสามารถพิจารณาได้จาก 3 ลักษณะ คือ

3.1 การเขียนรายงานผลของตนเอง (Self-reports) เหมาะสมสำหรับใช้ประเมินความรู้สึกละและความเชื่อถือเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ มากกว่าที่จะใช้วัดพฤติกรรมการแสดงออก ควรใช้การเขียนรายงานของตนเองประกอบการประเมินแบบอื่น ๆ

3.2 การเขียนรายงานในชั้นเรียนหรือการบ้าน เหมาะสมที่จะใช้ประเมินความเข้าใจมโนคติทางคณิตศาสตร์ และใช้เป็นข้อมูลสำหรับครูในการวางแผนบทเรียนต่อไป

3.3 การเขียนในการสอบ ส่วนใหญ่แล้วการเขียนเกี่ยวกับคณิตศาสตร์มักจะเป็นการเขียนในการทดสอบ

4. ประเมินจากผลงานที่เก็บรวบรวม ไว้ในแฟ้มข้อมูลรายบุคคล โดยปกติแล้วแฟ้มรายบุคคลจะรวบรวมข้อมูลทั้งหมดจากข้อสอบ จากการบ้านและผลงานอื่น ๆ ที่เป็นจุดสำคัญที่จะนำมาประเมินผลรวมสุดท้ายเพื่อให้เกรด

5. การทดสอบ แบบทดสอบ โดยทั่วไปมักจะเน้นให้นักเรียนหาคำตอบที่ถูกต้องของปัญหา ไม่ได้เน้นถึงกระบวนการคิดแก้ปัญหา ดังนั้นในการสร้างแบบทดสอบเพื่อวัดและประเมินผลการเรียนรู้ของนักเรียน ควรที่จะกำหนดข้อคำถามที่มุ่งประเมินกระบวนการคิดแก้ปัญหาของนักเรียน

อัมพร ม้าคอง (2553, หน้า 179) กล่าวว่า การประเมินการสื่อสารในห้องเรียนมักเน้นที่การให้อธิบายวิธีการหรือเหตุผล โดยใช้คำพูดและการเขียนอธิบาย

จากการศึกษาแนวทางในการประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ สำหรับการวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ด้านการเขียน เนื่องจากการเขียนจะสะท้อนความเข้าใจของนักเรียนในการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างชัดเจน ซึ่งเหมาะกับเนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น โดยผู้วิจัยใช้แบบทดสอบแบบอัตนัยในการประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ด้านการเขียน

4.2 เกณฑ์การประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

เนื่องจากผู้วิจัยเลือกรูปแบบในการประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ด้านการเขียน ด้วยแบบทดสอบซึ่งในเกณฑ์การประเมินผู้วิจัยใช้เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริค โดยมีรายละเอียดดังหัวข้อเกณฑ์การประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้วิจัยใช้รูปแบบการให้คะแนนแบบองค์รวม (Holistic scoring) ซึ่งมีผู้ให้เกณฑ์

การประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ แบบรูบริก ประเภทการให้คะแนนแบบภาพรวมไว้ดังนี้

กระทรวงศึกษาธิการ (2546, หน้า 124) ได้กำหนดเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการสื่อสาร ทางคณิตศาสตร์ แสดงดังตารางที่ 8

ตารางที่ 8 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการสื่อสาร ทางคณิตศาสตร์ของกระทรวงศึกษาธิการ

ระดับคุณภาพ	เกณฑ์การพิจารณา
4 ดีมาก	ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง นำเสนอโดยใช้กราฟ แผนภูมิ หรือตารางแสดงข้อมูลประกอบตามลำดับขั้นตอน เป็นระบบ กระชับ ชัดเจน และมีรายละเอียดสมบูรณ์
3 ดี	ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง นำเสนอโดยใช้กราฟ แผนภูมิ หรือตารางแสดงข้อมูลประกอบตามลำดับขั้นตอนได้อย่างถูกต้อง ขาดรายละเอียดที่สมบูรณ์
2 พอใช้	ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์พยายามนำเสนอโดยใช้กราฟ แผนภูมิ หรือตาราง แสดงข้อมูลประกอบชัดเจนบางส่วน
1 ต้องปรับปรุง	ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ อย่างง่าย ๆ ไม่ได้ใช้กราฟ แผนภูมิ หรือตารางเลย และการนำเสนอข้อมูลไม่ชัดเจน
0 ไม่พยายาม	ไม่นำเสนอ

สถาบันส่งเสริมการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2555 ค, หน้า 178) ได้กำหนดเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการสื่อสาร ทางคณิตศาสตร์ ดังตารางที่ 9

ตารางที่ 9 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการสื่อสาร ทางคณิตศาสตร์ของสถาบันส่งเสริม
การจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ระดับคุณภาพ	เกณฑ์การพิจารณา
3	ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง นำเสนอโดยใช้กราฟ แผนภูมิ หรือตารางแสดงข้อมูลประกอบตามลำดับขั้นตอนชัดเจน และมีรายละเอียดสมบูรณ์
2	ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง นำเสนอโดยใช้กราฟ แผนภูมิ หรือตารางแสดงข้อมูลประกอบตามลำดับขั้นตอนได้ชัดเจน บางส่วนแต่รายละเอียดยังไม่สมบูรณ์
1	ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้อง ใช้กราฟ แผนภูมิ ตารางและการนำเสนอไม่ชัดเจน

จากเกณฑ์การให้คะแนนแบบบูรณาการ โดยการให้คะแนนแบบภาพรวม (Holistic scoring) ดังกล่าวผู้วิจัยจึงนำมาปรับปรุง โดยกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการสื่อสาร ทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน ดังตารางที่ 10

ตารางที่ 10 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์

คะแนน/ ความหมาย	ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 2 ดีมาก	ใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ ครบถ้วน
ระดับ 1 ดี	ใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ได้ถูกต้อง เพียงบางส่วน
ระดับ 0 ควรปรับปรุง	ใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ไม่ถูกต้อง หรือไม่ปรากฏร่องรอย การใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยต่างประเทศ

มัวร์ราด (Mourad, 2005, p. 75) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการให้เหตุผลแบบอุปนัยในคาบเรียน ฟิสิกส์คณิตศาสตร์เป็นการเปรียบเทียบผลของวิธีสอน 2 วิธี ในหน่วยการเรียนรู้ฟิสิกส์คณิต เรื่อง ฟังก์ชันเชิงเส้นของนักเรียนเกรด 8 วิธีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่นำมาใช้ในการทดสอบครั้งนี้ คือ การจัดกิจกรรมเกี่ยวกับการให้เหตุผลแบบอุปนัยการเป็นตัวแทนและแนวทางในการค้นพบใน ขณะที่วิธีสอนที่ควบคุมคือ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ จุดมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ คือ ต้องการปรับปรุงแก้ไขผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในเรื่อง ฟังก์ชันเชิงเส้น ของนักเรียนผู้วิจัยต้องการ พิสูจน์ความจริงที่สำคัญทางคณิตศาสตร์ 3 ข้อ คือ ข้อแรกเกี่ยวกับฟังก์ชันเชิงเส้นและอีกสองข้อ เกี่ยวกับความสามารถในการเป็นตัวแทนของการแปลง โดยจะนำมาใช้วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ของนักเรียนในการทดสอบประจำหน่วยซึ่งนักเรียนทั้งหมด 29 คน ที่เข้าร่วมนี้มีระดับของ ความคิดแตกต่างกันผลการเปรียบเทียบพบว่ากลุ่มทดลองให้ความร่วมมือและมีส่วนร่วมใน การสร้างความเข้าใจทางคณิตศาสตร์จากกิจกรรมการเรียนรู้มากกว่ากลุ่ม ที่ใช้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติดังนั้น วิธีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบนี้ดูเหมือนว่าจะ เป็นการสร้างความเชื่อมั่นเกี่ยวกับผลสำเร็จที่จะเกิดขึ้นในอนาคตได้โดยเฉพาะอย่างยิ่งเกี่ยวกับการปรับปรุงการเรียนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของตนเอง

คริสตู และปาปาจิออจิโอ (Christou; & Papageorgiou, 2006, pp. 55-56) ได้ศึกษาเรื่อง โครงสร้างของการให้เหตุผลเชิงอุปนัยทางคณิตศาสตร์ ได้กล่าวถึงพื้นฐานบวรธรรมในการให้ เหตุผลเชิงอุปนัย โดยได้ทำการศึกษาโครงสร้างสำหรับการแนะนำและการประเมินการให้เหตุผล เชิงอุปนัยทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระดับประถมศึกษาเป็นการชี้แจงและทำให้สมบูรณ์ ท่ามกลางคุณสมบัติและความสัมพันธ์ของความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ใช้ข้อมูลจากนักเรียน ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 135 คน ในประเทศไซปรัส ได้ให้ประโยชน์จากการวิเคราะห์ปัจจัย ที่นำมายืนยันและพิสูจน์ความสอดคล้องกับข้อมูลแล้วนำมาสรุปให้เป็นกระบวนการเฉพาะที่มุ่ง ตรวจสอบความเหมือนและแตกต่างในคุณสมบัติหรือและความสัมพันธ์ซึ่งเป็นการนำมาใช้สำหรับ ผลเฉลยของปัญหาคณิตศาสตร์เชิงอุปนัยที่ควบคุมด้วยคุณสมบัติหรือความสัมพันธ์ ผลจากการวิจัย โครงสร้างของการให้เหตุผลเชิงอุปนัยทางคณิตศาสตร์ได้ให้ประโยชน์ในการกำหนดพื้นฐาน ทางทฤษฎีสำหรับการออกแบบหลักสูตรและการกำหนด โปรแกรมในการให้เหตุผลเชิงอุปนัย ทางคณิตศาสตร์

โวลฟ์ (Wolf, 2009, p. 72) ได้ศึกษาความเข้าใจเชิงลึกในเรื่องเศษส่วนของนักเรียน ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนรู้โดยเน้นทักษะการสื่อสารทักษะการพูด การอภิปรายกับผู้อื่น

และการเขียนเพื่ออธิบายคำตอบในเรื่องปัญหาเศษส่วนที่ซับซ้อนจากการศึกษาพบว่านักเรียนมีความเข้าใจเศษส่วนอย่างลึกซึ้ง เมื่อเรียนรู้จบหน่วยแล้วนักเรียนมีความสามารถในการสื่อสารความคิดทางคณิตศาสตร์ได้ดีขึ้นกว่าก่อนเรียนทั้งการพูด การอภิปรายในชั้นเรียนและการเขียนมีผลทำให้นักเรียนรู้สึกมีความสุขในการเรียนและมีความมั่นใจเพิ่มมากขึ้นนับว่าการจัดการเรียนรู้ที่ส่งเสริมทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์นั้นประสบผลสำเร็จอย่างยอดเยี่ยมทางด้านความรู้ ทักษะการบวนการและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

งานวิจัยในประเทศ

ณยศ สงวนสิน (2547, หน้า 55) ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้และหลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ชุดกิจกรรมปฏิบัติการคณิตศาสตร์โดยเทคนิคการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย - นිරนัย เรื่อง พหุนาม พบว่าชุดกิจกรรมปฏิบัติการคณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย-นिरนัย มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 80/ 80

ชลาวย ชมดี (2551, หน้า 62-63) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการพัฒนาการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องการหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยวิธีสอนแบบอุปนัยหรือแบบนिरนัย ผลการศึกษาพบว่า แผนการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องการหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยใช้วิธีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยหรือแบบนिरนัย มีประสิทธิภาพ 81.43/ 79.49 ซึ่งเป็นเกณฑ์ที่ตั้งไว้ คือ 75/ 75 ค่าดัชนีประสิทธิผลของแผนการจัดการกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยใช้วิธีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยหรือแบบนिरนัยมีค่าเท่ากับ 0.6015 หรือคิดเป็นร้อยละ 60.15 นักเรียนที่เรียนตามแผนการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่อง การหาค่าเฉลี่ย เลขคณิตชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยใช้วิธีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยหรือแบบนिरนัยมีความพึงพอใจโดยรวมอยู่ในระดับมาก

นันทพร ระกาศดี (2551, หน้า 74) ได้ศึกษาเกี่ยวกับบทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดีย โดยเทคนิคการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย-นिरนัย เรื่อง ความคล้าย สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการศึกษา พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภายหลังจากที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดีย โดยเทคนิคการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย-นिरนัยสูงกว่าเกณฑ์มาตรฐานร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ธีธรรณต์ สังหรณ์ (2556, หน้า 127) ผลของการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัย-นिरนัยที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถ

ในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เรื่องสถิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัย - นิรนัย เรื่อง สถิติ สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัย-นิรนัย เรื่อง สถิติ สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ.01

วัชรระ น้อยมี (2551, หน้า 124) ได้ศึกษาการพัฒนาชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวน สอบสวน เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ผลการศึกษาพบว่า ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวน สอบสวน เรื่อง การใช้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีประสิทธิภาพสูงกว่าเกณฑ์ 80/ 80 โดยมีประสิทธิภาพ 84.80/ 87.20 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวน สอบสวน เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สูงกว่าก่อนได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จิตติมา ขอบเอียด (2551, หน้า 91) ได้ศึกษาการใช้ปัญหาปลายเปิดเพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ผลการศึกษาพบว่าทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 หลักการใช้ปัญหาปลายเปิดสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างที่นัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และ ทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 หลักการใช้ปัญหาปลายเปิดสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างที่นัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ปวีณกานท์ พันธุ์สุข (2552, หน้า 68) ได้ศึกษาผลการใช้กิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ที่เน้นกระบวนการให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัยเรื่องเส้นขนาน ที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลและแก้ปัญหา สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 พบว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัย ทำให้ความสามารถในการให้เหตุผลสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องพบว่าการจัดกระบวนการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ มีหลากหลายวิธี ซึ่งการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย-นิรนัย ก็เป็นกิจกรรมหนึ่งที่จะช่วยส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิดการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ให้ดียิ่งขึ้น

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยเรื่อง ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบอุปนัยและนิรนัยที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผล และความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งผู้วิจัยได้ดำเนินการดังต่อไปนี้

1. ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง
2. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
3. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
4. การดำเนินการวิจัย
5. การเก็บรวบรวมข้อมูล
6. การวิเคราะห์ข้อมูล
7. สถิติที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

1. ประชากร

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนคัคครุณี อำเภอเมือง จังหวัด ฉะเชิงเทรา จำนวน 4 ห้องเรียน รวมจำนวนนักเรียน 180 คน

2. กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/4 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2557 โรงเรียนคัคครุณี อำเภอเมือง จังหวัด ฉะเชิงเทรา จำนวน 44 คน ได้มาจากการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster random sampling) ซึ่งทางโรงเรียนจัดห้องเรียนแบบละความสามารถของนักเรียน คือมีทั้งนักเรียนที่มีความสามารถในการเรียนระดับ เก่ง ปานกลาง และอ่อน ในห้องเดียวกันใช้คะแนนจากการสอบคัดเลือกเข้าเรียนเป็นเกณฑ์

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ดังนี้

1. แผนการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติมเรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น เป็นแผนการจัดการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น จำนวน 7 แผน

2. แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เป็นแบบอัตนัย จำนวน 10 ข้อ

การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้สร้างเครื่องมือในการวิจัย ตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ขั้นตอนการสร้างแผนการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติมเรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น มีขั้นตอนการสร้างดังต่อไปนี้

1.1 ศึกษาหลักสูตรสถานศึกษาโรงเรียนดัดดรุณี อ.เมือง จ.ฉะเชิงเทรา คำอธิบายรายวิชา ผลการเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ และ เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติมเรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

1.2 ศึกษาการเขียนแผนการจัดการเรียนรู้ โดยจัดการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัย จากเอกสาร ตำรา งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยเพื่อนำมาใช้ในการเขียนแผนการจัดการเรียนรู้

1.3 เลือกเนื้อหาจากสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพื่อจัดทำแผนการจัดการเรียนรู้เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ให้สอดคล้องกับหลักสูตรสถานศึกษา โดยผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์ คำอธิบายรายวิชา ผลการเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ และ เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ซึ่งมีรายละเอียดของแผนการจัดการเรียนรู้ แสดงดังตารางที่ 11

ตารางที่ 11 การวิเคราะห์แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น

แผนที่	ผลการเรียนรู้	จุดประสงค์การเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	จำนวน คาบ
1. การหาร ลงตัว	1. เข้าใจสมบัติของ จำนวนเต็ม 2. นำสมบัติของ จำนวนเต็มไปใช้ใน การให้เหตุผล เกี่ยวกับการหารลง ตัวได้	1. สามารถบอก ความหมายของการหาร ลงตัวได้ 2. สามารถให้เหตุผล ประกอบการพิสูจน์ ข้อความเกี่ยวกับทฤษฎี การหารลงตัวที่ กำหนดให้ได้ 3. สามารถสื่อสาร โดยการเขียนอธิบาย การพิสูจน์ข้อความ เกี่ยวกับทฤษฎีการหาร ลงตัวที่กำหนดให้ได้ 4. สามารถนำความรู้ เกี่ยวกับทฤษฎีการหาร ลงตัวไปใช้แก้โจทย์ ปัญหาและให้เหตุผล ประกอบแต่ละขั้นตอน ของวิธีการทำโดยการ สื่อสารผ่านการเขียนได้	การหารลงตัว	2
2. จำนวน เฉพาะ	1. เข้าใจสมบัติของ จำนวนเต็ม 2. นำสมบัติของ จำนวนเต็มไปใช้ใน การให้เหตุผล เกี่ยวกับการหาร	1. สามารถบอก ความหมายของจำนวน เฉพาะได้ 2. สามารถสื่อสารผ่าน การเขียนจำนวนเต็ม บวกใด ๆ ในรูปผลคูณ	จำนวนเฉพาะ	1

ตารางที่ 11 (ต่อ)

แผนที่	ผลการเรียนรู้	จุดประสงค์การเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	จำนวน คาบ
	ลงตัวได้	ของจำนวนเฉพาะได้ 3. สามารถนำความรู้ เกี่ยวกับจำนวนเฉพาะ ไปใช้แก้โจทย์ปัญหา และให้เหตุผลประกอบ แต่ละขั้นตอนของ วิธีการทำโดยการ สื่อสารผ่านการเขียนได้		
3. ขั้นตอน วิธีการหาร	1. เข้าใจสมบัติของ จำนวนเต็ม 2. นำสมบัติของ จำนวนเต็มไปใช้ในการ ให้เหตุผล เกี่ยวกับการหารลง ตัวได้	1. สามารถนำความรู้ เกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ หารไปใช้แก้โจทย์ ปัญหาและให้เหตุผล ประกอบแต่ละขั้นตอน ของวิธีการทำโดยการ สื่อสารผ่านการเขียนได้	ขั้นตอนวิธีการหาร	1
4. จำนวนคู่ และจำนวนคี่	1. เข้าใจสมบัติของ จำนวนเต็ม 2. นำสมบัติของ จำนวนเต็มไปใช้ในการ ให้เหตุผล เกี่ยวกับการหารลง ตัวได้	1. สามารถบอก ความหมายของจำนวน คู่และจำนวนคี่ได้ 2. สามารถให้เหตุผล ประกอบการพิสูจน์ ข้อความเกี่ยวกับสมบัติ ของจำนวนคู่และ จำนวนคี่ที่กำหนดให้ได้ 3. สามารถสื่อสาร โดยการเขียนอธิบาย การพิสูจน์ข้อความ	จำนวนคู่และ จำนวนคี่	2

ตารางที่ 11 (ต่อ)

แผนที่	ผลการเรียนรู้	จุดประสงค์การเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	จำนวน คาบ
		เกี่ยวกับสมบัติของ จำนวนคู่และจำนวนคี่ ที่กำหนดให้ได้ 4. สามารถนำความรู้ เกี่ยวกับจำนวนคู่และ จำนวนคี่ไปใช้แก้โจทย์ ปัญหาและให้เหตุผล ประกอบแต่ละขั้นตอน ของวิธีการทำ โดยการสื่อสาร ผ่านการเขียนได้		
5. ตัวหารร่วม มาก	1. เข้าใจสมบัติของ จำนวนเต็ม 2. นำสมบัติของ จำนวนเต็มไปใช้ใน การให้เหตุผล เกี่ยวกับการหารลงตัว ตัวได้	1. สามารถบอก ความหมายของตัวหาร ร่วมมากได้ 2. สามารถสื่อสารผ่าน การเขียนโดยแสดง ขั้นตอนวิธีของยูคลิด ในการหา ห.ร.ม. ของ จำนวนที่กำหนดให้ได้ 3. สามารถนำความรู้ เรื่อง ห.ร.ม. ไปใช้ แก้โจทย์ปัญหาและ ให้เหตุผลประกอบ แต่ละขั้นตอนวิธีการทำ โดยการสื่อสาร ผ่านการเขียนได้	ตัวหารร่วมมาก	3

ตารางที่ 11 (ต่อ)

แผนที่	ผลการเรียนรู้	จุดประสงค์การเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	จำนวน คาบ
6. จำนวน เฉพาะสัมพัทธ์	1. เข้าใจสมบัติของ จำนวนเต็ม 2. นำสมบัติของ จำนวนเต็มไปใช้ใน การให้เหตุผล เกี่ยวกับการหารลงตัว ตัวได้	1. สามารถบอก ความหมายของจำนวน เฉพาะสัมพัทธ์ได้ 2. สามารถให้เหตุผล ประกอบการพิสูจน์ ข้อความเกี่ยวกับจำนวน เฉพาะสัมพัทธ์ที่ กำหนดให้ได้ 3. สามารถสื่อสาร โดยการเขียนอธิบาย การพิสูจน์ข้อความ เกี่ยวกับจำนวนเฉพาะ สัมพัทธ์ที่กำหนดให้ได้ 4. สามารถนำความรู้ เกี่ยวกับจำนวนเฉพาะ สัมพัทธ์ไปใช้แก้โจทย์ ปัญหาและให้เหตุผล ประกอบแต่ละขั้นตอน วิธีการทำ โดยการสื่อสาร ผ่านการเขียนได้	จำนวนเฉพาะ สัมพัทธ์	2
7. ตัว คูณร่วมน้อย	1. เข้าใจสมบัติ ของจำนวนเต็ม	1. ไม่สามารถบอก ความหมายของตัว คูณร่วมน้อย	ตัวคูณร่วมน้อย	2

ตารางที่ 11 (ต่อ)

แผนที่	ผลการเรียนรู้	จุดประสงค์การเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	จำนวน คาบ
	2. นำสมบัติของ จำนวนเต็ม ไปใช้ ในการให้เหตุผล เกี่ยวกับการหาร ลงตัวได้	2. ของจำนวนที่ กำหนดให้ได้ 3. สามารถนำความรู้ เกี่ยวกับ ค.ร.น. ไปใช้ แก้โจทย์ปัญหาและให้ เหตุผลประกอบแต่ละ ขั้นตอนวิธีการทำ โดยการสื่อสารผ่าน การเขียนได้ 4. สามารถนำ ความสัมพันธ์ของ ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ไป ใช้ในการแก้ปัญหาและ ให้เหตุผลประกอบแต่ ละขั้นตอนวิธีการทำ โดยการสื่อสารผ่าน การเขียนได้		
		รวม		13

1.4 จัดทำแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น โดยจัดกระบวนการ
เรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัย จำนวน 7 แผน เวลา 13 คาบ โดยมี 5 ขั้นตอน ดังนี้

1.4.1 ขั้นเตรียม: ผู้สอนทบทวนความรู้เดิมให้นักเรียน โดยการใช้คำถาม
นำในการเสนอปัญหาที่เกี่ยวข้อง เพื่อให้ให้นักเรียนเกิดความสนใจที่จะหาคำตอบ จากนั้นผู้สอนแจ้ง
จุดประสงค์ของการเรียนในหัวข้อนั้น ๆ

1.4.2 **ขั้นเสนอตัวอย่าง:** ผู้สอนเสนอตัวอย่างต่าง ๆ อย่างหลากหลายเพื่อให้ นักเรียนแต่ละคนได้วิเคราะห์ สังเกตพิจารณาและหาความสัมพันธ์จากตัวอย่างนั้น ๆ ด้วยตัวของ นักเรียนเอง

2. **ขั้นสังเคราะห์:** ผู้สอนเปิดโอกาสให้นักเรียนแต่ละคน/กลุ่ม ได้คิด วิเคราะห์ สังเคราะห์ เพื่อหาคำสรุปประกอบร่วม ซึ่งพิจารณาถึงความเหมือนหรือความต่างจากกรณีตัวอย่างที่ผู้สอนยกเป็น กรณีศึกษาโดยผู้สอนจะใช้คำถามนำเพื่อให้นักเรียน เกิดกระบวนการคิด อันนำมาซึ่งข้อคาดการณ์ หรือข้อค้นพบด้วยตัวนักเรียนเอง

3. **ขั้นตรวจสอบและสรุป:** ผู้สอนและนักเรียนร่วมกัน อธิบายหรือพิสูจน์ ข้อสรุป หลักการ ทฤษฎีบท กฎ สูตร เหล่านี้ใหม่อีกครั้งหนึ่งเพื่อให้นักเรียน ได้เกิดการเรียนรู้ โดยผู้สอน จะใช้คำถามนำแต่ละขั้นตอนของการพิสูจน์ เพื่อให้ผู้เรียนเห็นภาพในแต่ละขั้นตอนการนำไปใช้ ในการพิสูจน์

4. **ขั้นนำไปใช้:** ให้นักเรียนเลือกนำข้อสรุป หลักการ ทฤษฎีบท กฎ สูตร มาใช้ในการ แก้ปัญหาอย่างเหมาะสมเพื่อให้นักเรียนเข้าใจในสิ่งที่ตนเองสรุปมาได้ อย่างลึกซึ้งและชัดเจน มากขึ้นรวมทั้งการนำความรู้มาประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ใหม่ๆที่หลากหลายได้อีกด้วย โดยองค์ประกอบของแผนการจัดการเรียนรู้ดังกล่าว ประกอบด้วย 1. ชื่อแผนการจัดการเรียนรู้ 2. ผลการเรียนรู้ 3. จุดประสงค์การเรียนรู้ 4. สาระสำคัญ 5. สารการเรียนรู้ 6. กิจกรรมการเรียนรู้ 7. สื่อ อุปกรณ์ และแหล่งเรียนรู้ 8. การวัดและประเมินผล

4.1 นำแผนการจัดการเรียนรู้เสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์เพื่อตรวจสอบ ความถูกต้องและความสอดคล้องระหว่างผลการเรียนรู้ สารการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระสำคัญ สารการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ สื่อ อุปกรณ์ และแหล่งเรียนรู้ การวัดและ ประเมินผล และ เนื้อหา รวมทั้งภาษาที่ถูกต้อง และนำข้อเสนอแนะที่ได้มาปรับปรุง

4.2 นำแผนการจัดการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นและปรับปรุงตามคำแนะนำของอาจารย์ ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์แล้วเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์จำนวน 5 คนเพื่อตรวจสอบ ความสอดคล้องขององค์ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ซึ่งประกอบด้วย ผลการเรียนรู้ จุดประสงค์ การเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ สื่อ และแหล่งเรียนรู้ การวัดและประเมินผล ตลอดจนภาษาที่ถูกต้อง โดยการหาค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC: Index of item objective congruence) ค่าดัชนี ความสอดคล้องที่ยอมรับได้มีค่าตั้งแต่ 0.50 ขึ้นไป โดยใช้เกณฑ์การให้คะแนนดังนี้

- +1 หมายถึง แน่ใจว่าองค์ประกอบของแผนการจัดการเรียนรู้ สอดคล้องกัน
- 0 หมายถึง ไม่แน่ใจว่าองค์ประกอบของแผนการจัดการเรียนรู้ สอดคล้องกัน
- 1 หมายถึง แน่ใจว่าองค์ประกอบของแผนการจัดการเรียนรู้ไม่ สอดคล้องกัน

ซึ่งได้ค่าดัชนีความสอดคล้องขององค์ประกอบของแผนการจัดการเรียนรู้ (IOC) เท่ากับ 1.00 (รายละเอียดดังภาคผนวก ก) โดยผู้เชี่ยวชาญให้แก้ไขในเรื่อง ดังต่อไปนี้

4.3 ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้ควรมีความเหมาะสมกับเวลาให้สามารถจัดกิจกรรมการเรียนรู้ได้จริง ซึ่งผู้วิจัยได้แก้ไขกระบวนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้มีความเหมาะสมกับเวลาตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ

4.4 ความถูกต้องในเชิงเนื้อหาของแต่ละใบกิจกรรม รวมทั้งการใช้คำในการตั้งคำถามของแต่ละใบกิจกรรมควรมีความถูกต้องและเหมาะสม ซึ่งผู้วิจัยได้แก้ไขความถูกต้อง ความเหมาะสมในการตั้งคำถามตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ จากนั้นเสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

4.5 นำแผนการจัดการเรียนรู้ไปทดลองใช้ (Try out) กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา ปีที่ 4/3 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 45 คน ของโรงเรียนดัดดรุณี อ.เมือง จ.ฉะเชิงเทรา ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2557 ซึ่งผลการใช้พบว่า เมื่อนักเรียนเข้าสู่กระบวนการของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยตามแผนการจัดการเรียนรู้ นักเรียนมีความเข้าใจในเนื้อหา สามารถสังเคราะห์ข้อความรู้ ทฤษฎีบท กฎ สูตรได้แต่ยังมีบางแผนการจัดการเรียนรู้ที่ยังมีตัวอย่างซึ่งไม่สอดคล้อง ไม่นำไปสู่ตัวทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยามได้ ดังนั้นผู้วิจัยจึงนำผลการทดลองดังกล่าวมาปรับปรุงแก้ไขโจทย์ตัวอย่างต่าง ๆ ให้มีความเหมาะสมและสอดคล้องอันนำไปสู่ข้อค้นพบ ทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยามของแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น โดยวิธีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยเรียบร้อยแล้ว

4.6 นำแผนการจัดการเรียนรู้ที่ปรับปรุงแล้วไปใช้กับกลุ่มตัวอย่าง

4.7 แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสาร ด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เป็นแบบอัตนัย จำนวน 10 ข้อ มีขั้นตอนการสร้างดังนี้

4.7.1 ศึกษาเนื้อหาตามหลักสูตรสถานศึกษา และมาตรฐานการเรียนรู้/ตัวชี้วัด ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

4.7.2 ศึกษาแบบเรียน คู่มือครู หลักการ วิธีการสร้างแบบทดสอบและแนวทางการวัดและการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์จากเอกสารและตำราเอกสารที่เกี่ยวข้อง

4.7.3 วิเคราะห์สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพื่อจัดทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ให้สอดคล้องกับ ผลการเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น โดยมีรายละเอียดของแบบทดสอบ แสดงดังตารางที่ 12

ตารางที่ 12 การวิเคราะห์แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น

ผลการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	จุดประสงค์การเรียนรู้	จำนวนข้อสอบที่ออกทั้งหมด	จำนวนข้อสอบที่ต้องการจริง
1. เข้าใจสมบัติของจำนวนเต็ม	1. การหารลงตัว	1. สามารถให้เหตุผลประกอบการพิสูจน์และสามารถสื่อสาร โดยการเขียนอธิบายการพิสูจน์ข้อความนั้นเกี่ยวกับทฤษฎีการหารลงตัวที่กำหนดให้ได้	2	1
2. นำสมบัติของจำนวนเต็มไปใช้ในการให้เหตุผลเกี่ยวกับ การหารลงตัวได้		2. สามารถนำความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีการหารลงตัวไปใช้แก้โจทย์ปัญหาและให้เหตุผลประกอบแต่ละขั้นตอนวิธีการทำโดยการสื่อสารผ่านการเขียนได้	2	1
1. เข้าใจสมบัติของจำนวนเต็ม	2. ชั้นตอน	1. สามารถนำความรู้เกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการหาร ไปใช้แก้โจทย์ปัญหาและให้เหตุผลประกอบแต่ละขั้นตอนวิธีการ	2	1
2. นำสมบัติของจำนวนเต็มไปใช้ในการให้เหตุผลเกี่ยวกับ การหารลงตัวได้	วิธีการหาร	ทำโดยการสื่อสารผ่านการเขียนได้		

ตารางที่ 12 (ต่อ)

ผลการเรียนรู้	สาระ การเรียนรู้	จุดประสงค์การเรียนรู้	จำนวน ข้อสอบที่ ออกทั้งหมด	จำนวน ข้อสอบที่ ต้องการจริง
1. เข้าใจสมบัติ ของจำนวนเต็ม 2. นำสมบัติของ จำนวนเต็มไปใช้ ในการให้เหตุผล เกี่ยวกับ การหารลงตัวได้	3. จำนวนคู่ และจำนวน คี่	1. สามารถให้เหตุผลประกอบการ พิสูจน์และสามารถสื่อสาร โดยการเขียน อธิบายการพิสูจน์ข้อความนั้นเกี่ยวกับ สมบัติของจำนวนคู่และจำนวนคี่ที่ กำหนดให้ได้	2	1
		2. สามารถนำความรู้เกี่ยวกับจำนวนคู่ และจำนวนคี่ไปใช้แก้โจทย์ปัญหาและ ให้เหตุผลประกอบแต่ละขั้นตอนวิธีการ ทำโดยการสื่อสารผ่านการเขียนได้	2	1
1. เข้าใจสมบัติ ของจำนวนเต็ม 2. นำสมบัติของ จำนวนเต็มไปใช้ ในการให้เหตุผล เกี่ยวกับ การหารลงตัวได้	4. ตัวหาร ร่วมมาก	1. สามารถนำความรู้เรื่อง ห.ร.ม. ไปใช้ แก้โจทย์ปัญหาและให้เหตุผลประกอบ แต่ละขั้นตอนวิธีการทำโดยการสื่อสาร ผ่านการเขียนได้	2	1
		1. สามารถให้เหตุผลประกอบการ พิสูจน์และสามารถสื่อสาร โดยการเขียน อธิบายการพิสูจน์ข้อความนั้นเกี่ยวกับ จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ที่กำหนดให้ ได้	2	1
1. เข้าใจสมบัติ ของจำนวนเต็ม 2. นำสมบัติของ จำนวนเต็มไปใช้ ในการให้เหตุผล เกี่ยวกับ การหารลงตัวได้ ในการให้เหตุผล เกี่ยวกับ การหารลงตัวได้	6. จำนวน เฉพาะ สัมพัทธ์	2. สามารถนำความรู้เรื่อง จำนวนเฉพาะ สัมพัทธ์ไปใช้แก้โจทย์ปัญหาและให้ เหตุผลประกอบแต่ละขั้นตอนวิธีการทำ โดยการสื่อสารผ่านการเขียนได้	2	1

ตารางที่ 12 (ต่อ)

ผลการเรียนรู้	สาระ การเรียนรู้	จุดประสงค์การเรียนรู้	จำนวน ข้อสอบที่ ออกทั้งหมด	จำนวน ข้อสอบที่ ต้องการจริง
1. เข้าใจสมบัติ ของจำนวนเต็ม	7. ตัวคูณ ร่วมน้อย	1. สามารถนำความรู้เกี่ยวกับ ค.ร.น. ไปใช้แก้โจทย์ปัญหาและให้เหตุผล ประกอบแต่ละขั้นตอนวิธีการทำโดย การสื่อสารผ่านการเขียนได้	2	1
2. นำสมบัติของ จำนวนเต็มไปใช้ ในการให้เหตุผล เกี่ยวกับ การหารลงตัวได้		2. สามารถนำความสัมพันธ์ของ ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา และให้เหตุผลประกอบแต่ละขั้นตอน วิธีการทำโดยการสื่อสารผ่านการเขียน ได้	2	1
		รวม	20	10

4.7.3 สร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ โดยสร้างแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 20 ข้อ

4.7.4 กำหนดเกณฑ์การให้คะแนนแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ โดยกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริก (Rubric assessment) แบบองค์รวม (Holistic scoring)

4.7.5 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้น จำนวน 20 ข้อ พร้อมเกณฑ์การให้คะแนนเสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ เพื่อตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสม ความสอดคล้องกับเนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้ และนำข้อเสนอแนะที่ได้มาปรับปรุง

4.7.6 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ จำนวน 20 ข้อ พร้อมเกณฑ์การให้คะแนนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นและปรับปรุงตามคำแนะนำของอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์แล้วเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์จำนวน 5 คนเพื่อตรวจสอบความตรงเชิงเนื้อหาให้มีความสอดคล้องตามจุดประสงค์การเรียนรู้โดยการหาค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC: Index of item objective

congruence) ค่าดัชนีความสอดคล้องที่ยอมรับได้มีค่าตั้งแต่ 0.50 ขึ้นไป โดยใช้เกณฑ์การให้คะแนน ดังนี้

- | | | |
|----|---------|--|
| +1 | หมายถึง | แน่ใจว่าข้อสอบข้อนั้นวัดตรงตามจุดประสงค์การเรียนรู้ |
| 0 | หมายถึง | ไม่แน่ใจว่าข้อสอบข้อนั้นวัดตรงตามจุดประสงค์การเรียนรู้ |
| -1 | หมายถึง | แน่ใจว่าข้อสอบข้อนั้นไม่วัดตรงตามจุดประสงค์การเรียนรู้ |

ซึ่งได้ค่าดัชนีความสอดคล้องของข้อสอบมีค่าเท่ากับ 1.00 ซึ่งผู้เชี่ยวชาญมีข้อเสนอแนะดังต่อไปนี้

4.7.6.1 การใช้คำในการตั้งคำถามของแต่ละข้อของแบบทดสอบวัด

ความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ ควรมีความถูกต้องและชัดเจน ไม่ก่อให้เกิดความสับสน ซึ่งผู้วิจัยได้แก้ไขลักษณะของการตั้งคำถามตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ

4.7.6.2 คำถามบางข้อไม่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ เช่น

เมื่อจุดประสงค์การเรียนรู้ต้องการวัดกระบวนการในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ แต่ลักษณะคำถาม ถามว่า “มีเศษเหลือเท่าใด หรือมีค่าเท่ากับเท่าใด” จะเห็นว่าลักษณะการตั้งคำถามดังกล่าว ไม่ก่อให้เกิดกระบวนการในการให้เหตุผล ลักษณะของคำถามต้องการเพียงคำตอบเท่านั้น เป็นต้น ซึ่งผู้วิจัยได้แก้ไขการใช้คำในการตั้งคำถามตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ จากนั้นเสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

4.7.7 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถ

ในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ที่ผ่านการปรับปรุงแล้ว ไปทดลองใช้ (Try out) กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/3 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 45 คน ของโรงเรียนตติศรณี อ.เมือง จ.ฉะเชิงเทรา ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2557 แล้วนำมาตรวจให้คะแนน โดยใช้เกณฑ์ในการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น จากนั้นนำคะแนนของแต่ละข้อมารวมกันแล้วจึงนำผลมาวิเคราะห์คุณภาพของแบบทดสอบ ดังนี้

1. หาค่าความยากง่าย (P) ของแบบทดสอบรายข้อ แล้วคัดเลือกแบบทดสอบที่มีค่าความยากง่ายตั้งแต่ 0.2-0.8
2. หาค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบเป็นรายข้อ แล้วคัดเลือกแบบทดสอบที่มีค่าอำนาจจำแนกที่มีคุณภาพตามเกณฑ์ตั้งแต่ 0.2 ขึ้นไป

4.7.8 คัดเลือกข้อสอบที่มีความยากง่ายและค่าอำนาจจำแนกที่ผ่านเกณฑ์ตรงตามจุดประสงค์การเรียนรู้ จำนวน 10 ข้อ ที่มีค่าความยากง่าย (P) เท่ากับ 0.33-0.78 และค่าอำนาจจำแนกเท่ากับ 0.32-0.85 (รายละเอียดดังภาคผนวก ค) จากนั้นหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ (Reliability) โดยใช้สูตรการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α -Coefficient) ของครอนบัท ซึ่งมีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.84

4.7.9 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ที่ผ่านการตรวจสอบคุณภาพแล้วไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

การดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยกึ่งทดลองโดยใช้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบอุปนัยและนิรนัย เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และมีการวัดผลหลังทดลองอย่างเดียว (One-group posttest-only design) (องอาจ นัยพัฒน์, 2551, หน้า 270) ซึ่งมีแบบแผนการวิจัยดังตารางที่ 13

ตารางที่ 13 แบบแผนการวิจัย

กลุ่ม	ทดลอง	สอบหลังการทดลอง
E	X	O

สัญลักษณ์ที่ใช้ในแบบแผนการวิจัย

เมื่อ E แทน กลุ่มทดลอง

X แทน การจัดการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัย

O แทน การสอบหลังการทดลอง (Post-test)

การเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ขอความร่วมมือกับโรงเรียนคัคครุณี อำเภอเมือง จังหวัด ฉะเชิงเทรา ซึ่งเป็นกลุ่มตัวอย่างในงานวิจัยครั้งนี้ โดยผู้วิจัยดำเนินการสอนด้วยตนเองด้วยการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัย เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/ 4

2. ผู้วิจัยดำเนินการทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/4 เรื่อง จำนวนจริง ก่อนการดำเนินการทดลองด้วยการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัย พบว่า ผลการทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ มีคะแนนเฉลี่ยร้อยละ 6.36 และผลการทดสอบความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ มีคะแนนเฉลี่ยร้อยละ 23.18 ซึ่งเป็นคะแนนเฉลี่ยที่ต่ำกว่าเกณฑ์ตามที่ กระทรวงศึกษาธิการได้กำหนดไว้

3. ดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัย เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ซึ่งใช้เวลาในการสอน 13 คาบ

4. เมื่อดำเนินการสอนครบตามแผนเรียบร้อยแล้ว ผู้วิจัยทำการวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ แล้วบันทึกผลการทดสอบเป็นคะแนนหลังเรียน โดยใช้เวลาในการดำเนินการทดสอบการวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ จำนวน 2 คาบ

5. ตรวจสอบให้คะแนนแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ โดยใช้เกณฑ์การให้คะแนนดังนี้

5.1 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังตารางที่ 14

ตารางที่ 14 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

คะแนน/ ความหมาย	ความสามารถในการให้เหตุผลที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 4 ดีมาก	อธิบายขั้นตอนในการหาคำตอบหรือการพิสูจน์ได้อย่างถูกต้องรวมทั้งแสดงเหตุผลสนับสนุนคำตอบ หรือยืนยันข้อสรุปนั้น มีการอ้างอิงหลักการ หรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องทุกส่วน ชัดเจน รัดกุม และสมเหตุสมผล
ระดับ 3 ดี	อธิบายขั้นตอนในการหาคำตอบหรือการพิสูจน์ได้อย่างถูกต้องแต่แสดงเหตุผลสนับสนุนคำตอบ หรือยืนยันข้อสรุป มีการอ้างอิงหลักการ หรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องเพียงบางส่วน
ระดับ 2 พอใช้	อธิบายขั้นตอนในการหาคำตอบหรือการพิสูจน์ไม่สมบูรณ์แต่มีการแสดงเหตุผลสนับสนุนคำตอบเหล่านั้น หรือยืนยันข้อสรุป มีการอ้างอิงหลักการ หรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง

ตารางที่ 14 (ต่อ)

คะแนน/ ความหมาย	ความสามารถในการให้เหตุผลที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 1 ควรปรับปรุง	อธิบายขั้นตอนในการหาคำตอบหรือการพิสูจน์ไม่สมบูรณ์และยังแสดงเหตุผลสนับสนุนคำตอบ หรือยืนยันข้อสรุป มีการอ้างอิงหลักการ หรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ ที่ถูกต้องเพียงบางส่วน
ระดับ 0 ไม่มีความ พยายาม	อธิบายขั้นตอนในการหาคำตอบหรือการพิสูจน์ไม่สมบูรณ์และยังแสดงเหตุผลสนับสนุนคำตอบ หรือยืนยันข้อสรุป มีการอ้างอิงหลักการ หรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ ด้วยวิธีการที่ไม่ถูกต้อง หรือไม่ปรากฏร่องรอยการเขียนอธิบายเพื่อแสดงเหตุผลทางคณิตศาสตร์หรือไม่ได้ทำ

5.2 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์
ดังตารางที่ 15

ตารางที่ 15 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์

คะแนน/ ความหมาย	ความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 2 ดีมาก	ใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ ครบถ้วน
ระดับ 1 ดี	ใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ได้ถูกต้อง เพียงบางส่วน
ระดับ 0 ควรปรับปรุง	ใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ไม่ถูกต้อง หรือไม่ปรากฏร่องรอยการใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

5.3 ผู้วิจัยนำคะแนนที่ได้ไปวิเคราะห์ผลและแปลผลข้อมูลต่อไป

การวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้แบ่งการวิเคราะห์ข้อมูล ดังต่อไปนี้

1. การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ

ผู้วิจัยได้นำคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผล และความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น มาวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

1.1 เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัย เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นกับเกณฑ์ร้อยละ 70 โดยใช้สถิติ *t-test for one sample*

1.2 เปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัย เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นกับเกณฑ์ร้อยละ 70 โดยใช้สถิติ *t-test for one sample*

2. การวิเคราะห์เชิงคุณภาพ

ผู้วิจัยได้นำข้อมูลที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผล และความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น มาวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

2.1 นำข้อมูลที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น มาจำแนกเป็นกลุ่มตามเกณฑ์การประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น แล้วนำเสนอในรูปแบบความเรียง

2.2 นำข้อมูลที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น มาจำแนกเป็นกลุ่มตามเกณฑ์การให้คะแนนแบบวัดความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น แล้วนำเสนอในรูปแบบความเรียง

สถิติที่ใช้ในการวิจัย

ในการวิจัยใช้สถิติ ดังต่อไปนี้

1. สถิติพื้นฐาน

1.1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Mean) โดยคำนวณจากสูตรดังนี้ (ไชยยศ ไพวิทยศิริธรรม, 2555, หน้า 33)

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

เมื่อ \bar{x}	แทน	ค่าเฉลี่ยคะแนนของกลุ่มตัวอย่าง
$\sum x$	แทน	ผลรวมของคะแนนทั้งหมด
n	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

1.2 ค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐาน สามารถคำนวณได้จากสูตรดังนี้ (ไชยยศ ไพวิทยศิริ ธรรม, 2555, หน้า 50)

$$s = \sqrt{\frac{n \sum x^2 - (\sum x)^2}{n(n-1)}}$$

เมื่อ s	แทน	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง
$\sum x^2$	แทน	ผลรวมของกำลังสองของคะแนนแต่ละตัว
$(\sum x)^2$	แทน	ผลรวมของคะแนนทั้งหมดยกกำลังสอง
n	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

2. สถิติเพื่อหาคุณภาพเครื่องมือในการทำวิจัย

2.1 หากำดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนโดยคำนวณจากสูตร (เวชฤทธิ์ อังกะนัทรขจร, 2555, หน้า 160)

$$IOC = \frac{\sum R}{N}$$

เมื่อ IOC	แทน	ดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อมูลกับจุดประสงค์
$\sum R$	แทน	ผลรวมของคะแนนความสอดคล้องตามการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ
N	แทน	จำนวนผู้เชี่ยวชาญ

2.2 วิเคราะห์หาค่าความยากง่ายของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์โดยใช้การวิเคราะห์ข้อสอบแบบอัตนัย โดยใช้สูตรการคำนวณดังนี้ (เวชฤทธิ์ อังกะนัทรขจร, 2555, หน้า 163)

$$p = \frac{S_n + S_l - (n_l)(X_{\min})}{n_l(X_{\max} - X_{\min})}$$

เมื่อ	p	แทน	ค่าความยากง่ายของข้อสอบแต่ละข้อ
	S_h	แทน	ผลรวมของผลคูณของคะแนนแต่ละคะแนนกับจำนวนนักเรียน ที่ทำให้คะแนนเท่านั้น (fx) ในกลุ่มสูง
	S_l	แทน	ผลรวมของผลคูณของคะแนนแต่ละคะแนนกับจำนวนนักเรียน ที่ทำให้คะแนนเท่านั้น (fx) ในกลุ่มต่ำ
	n_i	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มสูงและกลุ่มต่ำรวมกัน
	X_{\max}	แทน	คะแนนสูงสุด
	X_{\min}	แทน	คะแนนต่ำสุด

2.3 วิเคราะห์หาค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์โดยใช้การวิเคราะห์ข้อสอบแบบอัตนัย โดยใช้สูตรการคำนวณดังนี้ (เวชฤทธิ์ อังกะภักทรขจร, 2555, หน้า 163)

$$r = \frac{S_h - S_l}{n(X_{\max} - X_{\min})}$$

เมื่อ	r	แทน	ค่าอำนาจจำแนกของข้อสอบแต่ละข้อ
	S_h	แทน	ผลรวมของผลคูณของคะแนนแต่ละคะแนนกับจำนวนนักเรียน ที่ทำให้คะแนนเท่านั้น (fx) ในกลุ่มสูง
	S_l	แทน	ผลรวมของผลคูณของคะแนนแต่ละคะแนนกับจำนวนนักเรียน ที่ทำให้คะแนนเท่านั้น (fx) ในกลุ่มต่ำ
	n	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มสูงหรือกลุ่มต่ำ
	X_{\max}	แทน	คะแนนสูงสุด
	X_{\min}	แทน	คะแนนต่ำสุด

2.4 วิเคราะห์หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์โดยใช้การวิเคราะห์ข้อสอบแบบอัตนัย โดยใช้สูตรการคำนวณดังนี้ (เวชฤทธิ์ อังกะภักทรขจร, 2555, หน้า 161)

$$\alpha = \frac{k}{k-1} \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^k S_i^2}{S_t^2} \right]$$

เมื่อ	α	แทน	ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ
	k	แทน	จำนวนข้อของแบบทดสอบ
	S_i^2	แทน	ความแปรปรวนของข้อสอบในแต่ละข้อ
	S_i^2	แทน	ความแปรปรวนของข้อสอบทั้งหมด

3. สถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐาน

เปรียบเทียบคะแนนจากแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์หลังได้รับการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยกับเกณฑ์ร้อยละ 70 โดยใช้สูตร t -test for one sample ดังนี้ (ไชยยศ ไพวิทยศิริธรรม, 2555, หน้า 86)

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}, df = n - 1$$

เมื่อ	t	แทน	ค่าสถิติที่ใช้พิจารณาใน t -distribution
	\bar{x}	แทน	ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง
	μ_0	แทน	ค่าเฉลี่ยที่ใช้เป็นเกณฑ์ (ร้อยละ 70)
	s	แทน	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง
	n	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

บทที่ 4

ผลการวิจัย

ในการวิจัยเรื่อง ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบอุปนัยและนิรนัย ที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผล และความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีการนำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลดังต่อไปนี้

1. สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล
2. ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

การเสนอผลการวิจัยเพื่อให้เกิดความเข้าใจตรงกัน ผู้วิจัยกำหนดสัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อการเสนอผลการวิจัย ดังนี้

n	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง
\bar{x}	แทน	ค่าเฉลี่ยคะแนนของกลุ่มตัวอย่าง
s	แทน	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง
t	แทน	ค่าสถิติที่ใช้พิจารณาใน t -distribution
p	แทน	ระดับนัยสำคัญทางสถิติ
μ	แทน	ค่าเฉลี่ยที่ใช้เป็นเกณฑ์ (ร้อยละ 70)
*	แทน	มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น

การศึกษาผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัย เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ผู้วิจัยได้ทำการวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/4 แล้วบันทึกผลการทดสอบเป็นคะแนนหลังเรียน โดยผู้วิจัยทำการตรวจให้คะแนนแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์โดยใช้เกณฑ์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นแล้ว นำมาวิเคราะห์โดยใช้สถิติ t -test for One Sample ซึ่งได้ผลปรากฏดังตารางที่ 16

ตารางที่ 16 การเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์กับเกณฑ์ ร้อยละ 70

การทดสอบ	n	μ (ร้อยละ 70)	\bar{X} (คะแนนเต็ม 40)	t	p
คะแนนทักษะการให้ เหตุผลทางคณิตศาสตร์	44	28	32.47	4.186*	.000

* $p < 0.01$

จากตารางที่ 16 พบว่าคะแนนเฉลี่ยของความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น มีค่าเท่ากับ 32.47 คะแนน โดยหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ แบบอุปนัยและนิรนัยคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ สูงกว่าเกณฑ์ ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

นอกจากนี้รายละเอียดของความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎี จำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จากการทำแบบทดสอบ เรื่องทฤษฎีจำนวน เบื้องต้นสามารถจำแนกนักเรียนตามเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผล ทางคณิตศาสตร์ได้ 5 กลุ่ม ดังต่อไปนี้

นักเรียนในกลุ่มที่ 1 ได้คะแนน 0 คะแนน คือ นักเรียนที่อธิบายขั้นตอนในการหาคำตอบ หรือการพิสูจน์ไม่สมบูรณ์และยังแสดงเหตุผลสนับสนุนคำตอบ หรือยื่นยื่นข้อสรุป มีการอ้างอิง หลักการ หรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ด้วยวิธีการที่ไม่ถูกต้อง หรือไม่ปรากฏร่องรอยการเขียน อธิบายเพื่อแสดงเหตุผลทางคณิตศาสตร์หรือไม่ได้ทำโดยมีตัวอย่างลักษณะของคำตอบ จากตัวอย่าง โจทย์ “จงหาจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดที่หาร 56 และ 94 แล้วมีเศษเหลือเท่ากัน” พบว่านักเรียนในกลุ่มนี้อธิบายขั้นตอนในการหาคำตอบไม่สมบูรณ์และไม่ครบถ้วน รวมทั้ง ไม่มีความถูกต้องอาจพิจารณาได้จากข้อความที่นักเรียนเขียนแสดงคือ “จาก 56 หาร x จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $56|(x+1)$ ” ซึ่งเป็นการแสดงวิธีการทำที่ไม่ถูกต้องตามหลัก การทางคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ จากขั้นตอนวิธีการทำดังกล่าวยังไม่พบร่องรอยการให้เหตุผล ประกอบคำตอบนั้น แสดงดังภาพประกอบที่ 2

Proof: ให้ x เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดที่หาร 56 และ 94
 ให้ x หาร 56 ลงตัว
 ทน 56 ทน x ได้ว่า $56 = xk$ ทำให้
 $56 | (x+1)$

ภาพที่ 2 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 1 ด้านความสามารถในการให้เหตุผล
 ทางคณิตศาสตร์

นักเรียนในกลุ่มที่ 2 ได้คะแนน 1 คะแนน คือ นักเรียนที่อธิบายขั้นตอนในการหาคำตอบ
 หรือการพิสูจน์ได้ไม่สมบูรณ์และยังแสดงเหตุผลสนับสนุนคำตอบ หรือยืนยันข้อสรุป มีการอ้างอิง
 หลักการ หรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องได้เพียงบางส่วน โดยมีตัวอย่างลักษณะของคำตอบ
 จากตัวอย่างโจทย์ “จงหาจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดที่หาร 56 และ 94 แล้วมีเศษเหลือเท่ากัน”
 พบว่า นักเรียนแสดงขั้นตอนในการพิสูจน์ไม่สมบูรณ์ และยังมีบางขั้นตอนที่นักเรียนไม่แสดง
 เหตุผลประกอบในขั้นตอนนี้ เช่น ในขั้นตอน $38 = x(1-k)$ ซึ่งนักเรียนต้องให้เหตุผลประกอบ
 คือ สมบัติการแจกแจง เป็นต้น แสดงดังภาพประกอบที่ 3

Proof: ให้ x เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดที่หาร 56 และ 94 และมีจำนวน r
 ทำให้ 56 หาร xk ลงตัว $56 = xk + r$ (ในกรณีนี้ $r=0$)
 และ 94 หาร xl ลงตัว $94 = xl + r$ (ในกรณีนี้ $r=0$)
 $(1)-(2)$, $14-56 = xl - xk$
 $-42 = x(l-k)$

ภาพที่ 3 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 2 ด้านความสามารถในการให้เหตุผล
 ทางคณิตศาสตร์

นักเรียนในกลุ่มที่ 3 ได้คะแนน 2 คะแนน คือ นักเรียนที่อธิบายขั้นตอนในการหาคำตอบ
 หรือการพิสูจน์ได้ไม่สมบูรณ์แต่มีการแสดงเหตุผลสนับสนุนคำตอบเหล่านั้น หรือยืนยันข้อสรุป
 มีการอ้างอิงหลักการ หรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องสมบูรณ์ โดยมีตัวอย่างลักษณะของคำตอบ

จากตัวอย่างโจทย์ “ถ้า $a|c$ และ $b|c$ และ $(a,b) = 1$ จงแสดงว่า $ab|c$ ” พบว่า นักเรียนอธิบายขั้นตอนในการพิสูจน์ยังไม่สมบูรณ์แต่ทุก ๆ ขั้นตอนในการพิสูจน์ที่นักเรียนทำมานั้น มีเหตุผลประกอบที่ถูกต้อง หรือมีที่มาประกอบขั้นตอนนั้นอย่างชัดเจน แสดงดังภาพประกอบที่ 4

Proof ; ให้ $a|c, b|c$ และ $(a,b)=1$ [จากข้อที่ 1] $ab|c$

ทก $a|c$ วจได้ห มีจำนวนเต็ม k ทำให้ $c = ak$ — ① [สมการสมมติ]

ทก $b|c$ วจได้ห มีจำนวนเต็ม l ทำให้ $c = bl$ — ② [สมการสมมติ]

จาก $(a,b) = 1$ วจได้ห มีจำนวนเต็ม x และ y ทำให้ $ax + by = 1$ — ③ [สมการสมมติ]

ที่ c คูณสมการ (3) ; $axc + byc = c$ — ④

ทก (1), (2), (4) วจได้ห $ax(bl) + by(ak) = c$

ภาพที่ 4 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 3 ด้านความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

นักเรียนในกลุ่มที่ 4 ได้คะแนน 3 คะแนน คือ นักเรียนที่สามารถอธิบายขั้นตอนในการหาคำตอบหรือการพิสูจน์ได้อย่างถูกต้องแต่แสดงเหตุผลสนับสนุนคำตอบ หรือยืนยันข้อสรุป มีการอ้างอิงหลักการ หรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องเพียงบางส่วน โดยมีตัวอย่างลักษณะของคำตอบจาก ตัวอย่างโจทย์ “ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มใด ๆ และ $a \neq 0$ จงแสดงว่า ถ้า $a|(b+c)$ และ $a|b$ แล้ว $a|c$ ” พบว่า นักเรียนสามารถแสดงขั้นตอนในการพิสูจน์ได้ถูกต้องสมบูรณ์ แต่ยังมีบางขั้นตอนที่นักเรียนยังให้เหตุผลสนับสนุนคำตอบไม่ถูกต้อง เช่น ในขั้นตอน $c = a(k-l)$ เหตุผลคือ สมบัติการแจกแจง แต่นักให้เหตุผลคือ การกระจาย ซึ่งเป็นเหตุผลที่ไม่ถูกต้อง เป็นต้น แสดงดังภาพประกอบที่ 5

Proof ; ให้ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ และ $a \neq 0$, $a|(b+c)$ และ $a|b$ [สมมติให้ $a|b$]
 จาก $a|(b+c)$ มีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $b+c = ak$ [ใช้กฎการบวกสองตัว] -- (1)
 และจาก $a|b$ มีจำนวนเต็ม l ที่ทำให้ $b = al$ [ใช้กฎการบวกสองตัว] -- (2)
 (1)-(2) ; $b+c-b = ak-al$
 $c = a(k-l)$ [กฎการลบ]
 เนื่องจาก $k-l \in \mathbb{Z}$ [สมบัติปิดการลบ]
 $\therefore a|c$ [ใช้กฎการบวกสองตัว]

ภาพที่ 5 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 4 ด้านความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

นักเรียนในกลุ่มที่ 5 ได้คะแนน 4 คะแนน คือ นักเรียนที่สามารถอธิบายขั้นตอนในการหาคำตอบหรือการพิสูจน์ได้อย่างถูกต้องรวมทั้งแสดงเหตุผลสนับสนุนคำตอบ หรือยืนยันข้อสรุปนั้น มีการอ้างอิงหลักการ หรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องทุกส่วน ชัดเจน รัดกุม และสมเหตุสมผล โดยมีตัวอย่างลักษณะของคำตอบจากตัวอย่างโจทย์ "จงแสดงว่า ถ้า $a|(-4b+3c)$ และ $a|(3b-2c)$ แล้ว $a|b$ " พบว่า นักเรียนสามารถอธิบายขั้นตอนการพิสูจน์ได้ถูกต้องทุกขั้นตอน รวมทั้งมีการแสดงเหตุผลประกอบแต่ละขั้นตอนได้อย่างถูกต้อง แสดงดังภาพประกอบที่ 6

Proof ; ให้ $a|(-4b+3c)$ และ $a|(3b-2c)$ [สมมติให้ $a|b$]
 จาก $a|(-4b+3c)$ มีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $(-4b+3c) = ak$ -- (1) [ใช้กฎการบวกสองตัว]
 จาก $a|(3b-2c)$ มีจำนวนเต็ม l ที่ทำให้ $3b-2c = al$ -- (2) [ใช้กฎการบวกสองตัว]
 (1) $\times 2$; $-8b+6c = 2ak$ -- (3)
 (2) $\times 3$; $9b-6c = 3al$ -- (4)
 (3) + (4) ; $(-8b+6c) + (9b-6c) = 2ak + 3al$
 $b = a(2k+3l)$ [ใช้กฎการบวกและการลบ]
 $b = a(2k+3l)$ [สมบัติการคูณ]
 เนื่องจาก $2k+3l \in \mathbb{Z}$ [สมบัติปิดการบวก]
 $\therefore a|b$ [ใช้กฎการคูณ]

ภาพที่ 6 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 1 ด้านความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ตอนที่ 2 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์

เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น

การศึกษาผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัย เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ผู้วิจัยได้ทำการวัดความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/4 แล้วบันทึกผลการทดสอบเป็นคะแนนหลังเรียน โดยผู้วิจัยทำการตรวจให้คะแนนแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์โดยใช้เกณฑ์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นแล้วนำมาวิเคราะห์โดยใช้สถิติ *t-test* for one sample ซึ่งได้ผลปรากฏดังตารางที่ 17

ตารางที่ 17 การเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์กับเกณฑ์ร้อยละ 70

การทดสอบ	<i>n</i>	μ (ร้อยละ 70)	\bar{X} (คะแนนเต็ม 20)	<i>t</i>	<i>p</i>
คะแนนทักษะการสื่อสารด้านการเขียน	44	14	16.93	6.641*	.000

* $p < 0.01$

จากตารางที่ 17 พบว่าคะแนนเฉลี่ยของความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น มีค่าเท่ากับ 16.93 คะแนน โดยหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยคะแนนเฉลี่ยทักษะการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

นอกจากนี้รายละเอียดของความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จากการทำแบบทดสอบ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นสามารถจำแนกนักเรียนตามลักษณะของการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ได้ 3 กลุ่ม ดังต่อไปนี้

นักเรียนในกลุ่มที่ 1 ได้คะแนน 0 คะแนน คือ นักเรียนที่ใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ไม่ถูกต้องหรือไม่ปรากฏร่องรอยการใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ โดยมีตัวอย่างลักษณะของคำตอบจากตัวอย่าง โจทย์ “จงหาจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยที่สุดที่หารด้วย 3, 6 และ 9 แล้ว มีเศษเหลือเป็น 2, 5 และ 8 ตามลำดับ” พบว่า นักเรียนไม่สามารถ

ใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการอธิบายหรือในการสื่อสารผ่านการเขียนตามหลักการทางคณิตศาสตร์ได้ อาจพิจารณาจากข้อความ “3 หาร x แล้วเหลือเศษ $3|(x+1)$ ” ซึ่งสัญลักษณ์ “ $3|(x+1)$ ” ไม่สามารถเป็นเศษได้ หรืออาจมองอีกทางหนึ่งคือ การที่นักเรียนจะสรุปว่า $3|(x+1)$ นักเรียนจะต้องใช้สำนวนในการเขียนว่า “จาก 3 หาร x เหลือเศษ 2 จะได้ว่า $3|(x+1)$ ”
แสดงดังภาพประกอบที่ 7



ภาพที่ 7 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 1 ด้านความสามารถในการสื่อสาร
ด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์

นักเรียนในกลุ่มที่ 2 ได้คะแนน 1 คะแนน คือ นักเรียนที่ใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ได้ถูกต้อง เพียงบางส่วน โดยมีตัวอย่างลักษณะของคำตอบจากตัวอย่างโจทย์ “จงหาจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดที่หาร 56 และ 94 แล้วมีเศษเหลือเท่ากัน” พบว่า นักเรียนสามารถใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารผ่านการเขียนได้ถูกต้องเพียงบางส่วนเท่านั้น เช่น การใช้สัญลักษณ์สำหรับบางตัว (\exists) พบว่านักเรียนยังใช้สัญลักษณ์ดังกล่าวไม่ถูกต้อง ซึ่งนักเรียนได้เคยเรียนสัญลักษณ์นี้มาแล้วในเรื่องตรรกศาสตร์ เป็นต้น แสดงดังภาพประกอบที่ 8

ให้ x เป็นจำนวนเต็มบวกที่หาร 56, 94 แล้วมีเศษเหลือ r
 1) 56 หาร $xk+1$ $Ek \in \mathbb{Z}$ (เศษของ 56 หาร $xk+1$)
 2) 94 หาร $xl+1$ $El \in \mathbb{Z}$ (เศษของ 94 หาร $xl+1$)
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$: $94 - 56 = xk + xl$
 $38 = x(k+l)$ (สมการใหม่ 1) (ค.ร.น.)
 $38 \mid x(k+l)$ (นิยามของค.ร.น.)
 $\therefore x = 38$ (หมายเหตุ: $38 \mid 94$ และ $38 \mid 56$)

ภาพที่ 8 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 2 ด้านความสามารถในการสื่อสาร
ด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์

นักเรียนในกลุ่มที่ 3 ได้คะแนน 2 คะแนน คือ นักเรียนที่สามารถใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ ครบถ้วน โดยมีตัวอย่างลักษณะของคำตอบจากตัวอย่างโจทย์ “ถ้า $a|c$ และ $b|c$ และ $(a,b) = 1$ จงแสดงว่า $ab|c$ ” พบว่า นักเรียนสามารถใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ในการสื่อสารหรือสื่อความหมาย ได้อย่างถูกต้อง และชัดเจน แสดงดังภาพประกอบที่ 9

Proof : ให้ $a|c$, $b|c$ และ $(a,b) = 1$ [จากข้อที่ 1] $ab|c$

ท. $a|c$ มีจำนวนเต็ม k ทำให้ $c = ak$ —① [นิยามการหารลงตัว]

ท. $b|c$ มีจำนวนเต็ม l ทำให้ $c = bl$ —② [นิยามการหารลงตัว]

เนื่องจาก $(a,b) = 1$ จึงได้ มีจำนวนเต็ม x และ y ทำให้ $ax + by = 1$ —③ [สมการพีทาคอส]

ท. c หารผลคูณของจำนวน ③

$$axc - byc = c \text{ —④}$$

ท. ①, ②, ③ ทำให้ $ax(bl) - by(ak) = c$

$$(ab)(xl) - (ab)(ky) = c \text{ [คูณศัพท์ในแต่ละพจน์]}$$

$$ab(xl + ky) = c \text{ [คูณศัพท์ตรงกลาง]}$$

เพราะ $xl + ky \in \mathbb{Z}$ [ผลบวกของจำนวนเต็มเป็นจำนวนเต็ม]

$$ab|c \text{ [นิยามการหารลงตัว]}$$

ภาพที่ 9 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 3 ด้านความสามารถในการสื่อสาร
ด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์

บทที่ 5

สรุปผลและอภิปรายผล

การวิจัยเรื่องผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบอุปนัยและนิรนัย ที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผล และความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยกับเกณฑ์ร้อยละ 70 2) เปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยกับเกณฑ์ร้อยละ 70 ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนดัดดรุณี อำเภอเมือง จังหวัด ฉะเชิงเทรา จำนวน 4 ห้อง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/4 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2557 โรงเรียนดัดดรุณี อำเภอเมือง จังหวัด ฉะเชิงเทรา จำนวน 1 ห้องเรียน ได้มาจากการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster random sampling) ซึ่งทาง โรงเรียนจัดห้องเรียนแบบความสามารถของนักเรียน คือมีทั้งนักเรียนที่มีความสามารถในการเรียนระดับ เก่ง ปานกลาง และอ่อน ในห้องเดียวกัน โดยใช้คะแนนจากการสอบคัดเลือกเข้าเรียนเป็นเกณฑ์

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยได้แก่ 1) แผนการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติมเรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น เป็นแผนการจัดการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นจำนวน 7 แผน 2) แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เป็นแบบอัตนัย จำนวน 10 ข้อ มีค่าความยากง่ายตั้งแต่ 0.33-0.78 มีค่าอำนาจจำแนกที่มีคุณภาพตามเกณฑ์ตั้งแต่ 0.32-0.85 และ มีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.84

สรุปผลการวิจัย

ผลการวิจัยสรุปได้ดังนี้

1. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01
2. ความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

อภิปรายผล

ผู้วิจัยได้นำผลการวิจัยมาอภิปรายผล ตามลำดับดังนี้

1. ด้านความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ จากผลการวิจัยพบว่าความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 ซึ่งเป็นไปตามสมมุติฐานข้อที่ 1 ที่กำหนดไว้ ทั้งนี้ อาจเนื่องมาจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยเป็นการจัดการเรียนการสอนแบบหนึ่งที่สามารถพัฒนานักเรียนให้สามารถสร้างองค์ความรู้ได้ด้วยตนเอง โดยเน้นนักเรียนเป็นสำคัญ ซึ่งชมนาค เชื้อสุวรรณทวี (2542, หน้า 70) กล่าวว่า การสอนแบบอุปนัยเป็นการสอนที่เริ่มต้นด้วยการยกตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่างเพื่อให้นักเรียนเห็นรูปแบบ นักเรียนต้องใช้การสังเกต เปรียบเทียบรูปแบบที่เหมือนกัน มีลักษณะร่วมกันนำไปสู่ข้อสรุป ซึ่งเป็นการค้นพบด้วยการสังเกต ผึกสัมพันธ์ ผึกทักษะกระบวนการคิด การให้เหตุผล ช่างสังเกตและสามารถหาข้อสรุปได้ด้วย นอกจากนี้การสอนแบบอุปนัยยังเป็นวิธีพื้นฐานของการหาเหตุผลจากส่วนย่อยไปหาส่วนร่วม ซึ่งมีจุดมุ่งหมายเพื่อที่จะหาข้อเท็จจริงทั่ว ๆ ไปอีกด้วย (Sidhu, 1981, pp. 106-108) และการสอนแบบนิรนัยเป็นการสอนที่เน้นให้นักเรียนสามารถนำหลักการหรือทฤษฎีที่ค้นพบนั้น ไปใช้ในการแก้ปัญหา ทำความเข้าใจให้เกิดความคิดรวบยอดและส่งเสริมให้นักเรียนมีโอกาสได้ฝึกฝนการนำทฤษฎี/ หลักการ ไปใช้ในสถานการณ์ใหม่ (ทิสนา แคมมณี, 2556, หน้า 338) ซึ่งข้อดีของการสอนแบบนิรนัยจะช่วยให้นักเรียนเป็นคนมีเหตุผลไม่เชื่ออะไรง่าย ๆ โดยไม่มีการตรวจสอบหรือพิสูจน์ให้เห็นจริง (สิริพร ทิพย์คง, 2545, หน้า 148)

นอกจากนี้เมื่อพิจารณาขั้นของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยที่ผู้วิจัยสังเคราะห์ขึ้น พบว่า ขั้นที่ 2 ขั้นเสนอตัวอย่างซึ่งเป็นขั้นที่ ผู้สอนเสนอตัวอย่างต่าง ๆ อย่างหลากหลาย เพื่อให้ให้นักเรียนแต่ละคนได้วิเคราะห์ สังเกต พิจารณาและหาความสัมพันธ์จากตัวอย่างนั้น ๆ ด้วยตัวของนักเรียนเอง และในขั้นที่ 3 ขั้นสังเคราะห์ ซึ่งเป็นขั้นที่ ผู้สอนเปิดโอกาสให้นักเรียนแต่ละคน/ กลุ่ม ได้คิด วิเคราะห์ สังเคราะห์เพื่อหาองค์ประกอบร่วม ซึ่งพิจารณาถึงความเหมือนหรือความต่างจากกรณีตัวอย่างที่ผู้สอนยกเป็นกรณีศึกษาโดยผู้สอนจะใช้คำถามนำเพื่อให้นักเรียนเกิดกระบวนการคิด อันนำมาซึ่งข้อคาดการณ์หรือข้อค้นพบด้วยตัวนักเรียนเอง โดยทั้งขั้นที่ 2 และขั้นที่ 3 จะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนได้เกิดกระบวนการคิดการให้เหตุผลจากส่วนย่อยไปหาส่วนรวม อันนำมาซึ่งทฤษฎีบท กฎ สูตร ต่าง ๆ และนอกจากนี้เมื่อพิจารณาขั้นที่ 4 ขั้นตรวจสอบและสรุป ซึ่งเป็นขั้นที่ผู้สอนและนักเรียนร่วมกัน อธิบายหรือพิสูจน์ ข้อสรุป หลักการ ทฤษฎีบท กฎ สูตร เหล่านี้อีกครั้งหนึ่งเพื่อให้นักเรียนได้เกิดการเรียนรู้ โดยผู้สอนจะใช้คำถามนำแต่ละขั้นตอนของการอธิบายหรือการพิสูจน์ เพื่อให้ผู้เรียนเห็นภาพและเกิดความเข้าใจมากยิ่งขึ้น รวมทั้งขั้นที่ 5 ขั้นนำไปใช้เป็นขั้นที่ให้นักเรียนเลือกนำข้อสรุป หลักการ ทฤษฎีบท กฎ สูตร มาใช้ในการแก้ปัญหาอย่างเหมาะสมเพื่อให้นักเรียนเข้าใจในสิ่งที่ตนเองสรุปมาได้ อย่างลึกซึ้งและชัดเจนมากขึ้นรวมทั้งการนำความรู้มาประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ใหม่ ๆ ที่หลากหลายได้ ซึ่งทั้งขั้นที่ 4 และขั้นที่ 5 นี้ก็จะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนเกิดกระบวนการคิดการให้เหตุผล กล่าวคือ นักเรียนสามารถแสดงแนวคิดขั้นตอนในการหาคำตอบหรือการพิสูจน์ และสามารถแสดงเหตุผลสนับสนุนคำตอบหรือขั้นตอนการพิสูจน์เหล่านั้น เพื่อยืนยันข้อสรุป โดยการอ้างอิงหลักการและแนวคิด รวมทั้ง ทฤษฎีบท กฎ สูตร และนิยามต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้อง อย่างสมเหตุสมผล

ซึ่งจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบอุปนัยและนิรนัย พบว่า ในช่วงแรกนักเรียนไม่สามารถให้เหตุผลประกอบแต่ละขั้นตอนของการพิสูจน์หรือขั้นตอนของการแสดงวิธีการหาคำตอบได้เนื่องจากการเรียนการสอนที่ผ่านมานักเรียนไม่ได้ถูกฝึกให้เกิดกระบวนการในการให้เหตุผลเพื่อยืนยันข้อสรุปหรือการเขียนเหตุผลประกอบคำตอบขั้นตอนนั้น ๆ นอกจากนี้ผู้วิจัยพบว่านักเรียนมีความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ไม่เพียงพอจึงไม่สามารถให้เหตุผลประกอบแต่ละขั้นตอนของการพิสูจน์หรือขั้นตอนของการแสดงวิธีการหาคำตอบได้ ดังนั้นในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เริ่มแรกผู้สอนจะต้องใช้คำถามนำ เช่น ในการให้เหตุผลเพื่อสนับสนุนข้อความที่ว่า “สำหรับจำนวนเต็ม x และ y ใด ๆ จะได้ว่า $x + y$ เป็นจำนวนเต็ม” ซึ่งนักเรียนสามารถระบุได้เพียงว่า ถ้า x เป็นจำนวนเต็ม และ y เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $x + y$ เป็นจำนวนเต็มเท่านั้น แต่ไม่สามารถบอกได้ว่า ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น ดังนั้นผู้สอนจึงต้องใช้คำถามนำ ได้แก่ ถ้านักเรียนจะสรุปว่า $x + y$ เป็นจำนวนเต็ม แล้วนักเรียนจะต้องอ้างอิงสมบัติใด เพื่อให้ให้นักเรียนเกิดกระบวนการคิด

การวิเคราะห์เงินเกิดการเชื่อมโยงระหว่างขั้นตอนหรือคำตอบที่นักเรียนเขียนแสดงมานั้นกับการอ้างเหตุผลจากทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม เพื่อนำมาใช้ในการยืนยันข้อสรุปดังกล่าว ซึ่งเหตุการณ์ดังกล่าวจะเกิดขึ้นในช่วงแรกของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบอุปนัยและนิรนัย ในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 และ 2 เท่านั้นแต่เมื่อนักเรียนผ่านกระบวนการในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบอุปนัยและนิรนัยจนถึงแผนการจัดการเรียนรู้สุดท้ายแล้วพบว่า นักเรียนสามารถเขียนแสดงเหตุผลสนับสนุนคำตอบหรือขั้นตอนการพิสูจน์เหล่านั้น เพื่อยืนยันข้อสรุป โดยการอ้างอิงหลักการและแนวคิด รวมทั้ง ทฤษฎีบท กฎ สูตร และนิยามต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้องและสมเหตุสมผล

จากเหตุผลข้างต้น จึงอาจกล่าวได้ว่าการนำการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบอุปนัยและนิรนัย มาใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนนั้นส่งผลให้ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังการจัดกิจกรรม การเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของธีรรัตน์ สังหรณ์ (2556, หน้า 127) พบว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัย ทำให้ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ สูงกว่าก่อนเรียนและสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 และสอดคล้องกับผลการวิจัยของปวีกันท์ พันธุ์สุข (2552, หน้า 68) ที่พบว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัย ทำให้ความสามารถในการให้เหตุผลสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

2. ด้านความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ จากผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียน ทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 ซึ่งเป็นไปตามสมมุติฐานข้อที่ 2 ที่กำหนดไว้ ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยเป็นกิจกรรมการเรียนรู้ที่ฝึกฝนทักษะการเขียนของผู้เรียน โดยฝึกให้ผู้เรียนได้เขียนสื่อสารแนวคิดของตนเองไม่ว่าจะเป็นการเขียนสรุปสูตร กฎเกณฑ์ หลักการต่าง ๆ หรือเขียนเหตุผลประกอบการตัดสินใจจากการทำใบกิจกรรม และแบบฝึกหัดอย่างสม่ำเสมอและครูตรวจสอบความถูกต้องพร้อมกับให้ข้อมูลย้อนกลับทันที จะทำให้นักเรียนได้เรียนรู้ข้อดี และข้อบกพร่องของตนเอง จะช่วยให้นักเรียนสามารถแก้ไขข้อบกพร่องของตนเอง นอกจากนี้การเขียนสื่อสารแนวความคิดทำให้นักเรียนมีความคุ้นเคยในการเขียนสื่อสารแนวคิดทางคณิตศาสตร์ให้ผู้อื่นเข้าใจซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของ โรนาน

และมอร์โรว์ (Rowan & Morrow, 1993, pp. 9-11, 324) ที่ว่าการให้โอกาสนักเรียนได้เขียนสื่อสารแนวความคิด จะทำให้นักเรียนเห็นว่าการเขียนเป็นส่วนสำคัญของการดำเนินการทางคณิตศาสตร์

นอกจากนี้เมื่อพิจารณาขั้นของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยที่ผู้วิจัยสังเคราะห์ขึ้น ซึ่งมีกระบวนการในการจัดการเรียนรู้ 5 ขั้น ได้แก่ 1. ขั้นเตรียม 2. ขั้นเสนอตัวอย่าง 3. ขั้นสังเคราะห์ 4. ขั้นตรวจสอบและสรุป และ 5. ขั้นนำไปใช้ พบว่าขั้นที่ส่งเสริมความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ คือ ขั้นที่ 3 ขั้นที่ 4 และขั้นที่ 5 โดยขั้นที่ 3 เป็นขั้นที่ผู้สอนใช้คำถามกับนักเรียนเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนได้คิดและแสดงการตอบสนองออกมา อาจจะแสดงแนวคิดของตนเองออกมาทั้งทางด้านของการพูด หรือการเขียน เพื่อใช้ขยายความรู้ทางคณิตศาสตร์ให้กับครูและเพื่อน ๆ ได้เข้าใจ ซึ่งเป็นการส่งเสริมการสื่อสารโดยตรงประกอบกับการให้นักเรียนได้ปฏิบัติกิจกรรมกลุ่ม และมีสื่อในการจัดการเรียนการสอนเช่น ใบกิจกรรม แบบฝึกหัดต่าง ๆ ก็จะช่วยให้นักเรียนได้สื่อสารและอภิปรายแนวความคิดซึ่งกันและกัน โดยใช้ทักษะการสื่อสารการพูดและการเขียน ซึ่งกระบวนการดังกล่าวจะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนได้ฝึกกระบวนการในการเขียนสรุป การเรียบเรียงและการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการวิเคราะห์ สังเคราะห์และสร้างข้อสรุป ทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม ต่าง ๆ ที่เกิดจากการพิจารณาตัวอย่างในขั้นที่ 2 โดยพิจารณาความเหมือนและความต่างของตัวอย่างนั้น ๆ ได้เป็นอย่างดี สอดคล้องกับคำกล่าวของ มัมมี และ เชพเพอร์ด์ (Mumme & Sheperd, 1993, pp. 7-9) ที่ว่าการอภิปรายแลกเปลี่ยนความคิดเห็นของนักเรียนสามารถพัฒนาภาษาคณิตศาสตร์และความเข้าใจในกฎ และนิยามมากยิ่งขึ้น นอกจากนี้เมื่อพิจารณาขั้นที่ 4 และขั้นที่ 5 ซึ่งเป็นขั้นที่ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนเกิดกระบวนการในการนำข้อสรุปต่าง ๆ ที่ได้จากขั้นที่ 3 มาฝึกในการเขียนอธิบาย การอ้างเหตุผล และฝึกให้นักเรียนได้นำสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการเขียนอธิบายตามหลักและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

ซึ่งจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบอุปนัยและนิรนัย พบว่า ในช่วงแรกนักเรียนไม่สามารถเรียบเรียงและเขียนอธิบายข้อความรู้ หรือการเขียนโดยใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง เนื่องจากการเรียนการสอนที่ผ่านมา นักเรียนไม่ได้ถูกฝึกให้เขียนอธิบายหรือการเขียนในรูปแบบโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นอุปสรรคในการพัฒนาความสามารถในการใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นในช่วงแรกผู้สอนจึงต้องยกตัวอย่างที่หลากหลายประกอบกับการใช้คำถามนำ เช่น ถ้า a และ b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ต่อกัน แล้ว a และ b มีความสัมพันธ์กันอย่างไร และนักเรียนสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง a และ b ในรูปประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างไร เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนเกิดกระบวนการในการคิดวิเคราะห์ สังเคราะห์ และเห็นแนวโน้มในการเขียนสรุปหรือการเขียนอธิบาย

ได้ดียิ่งขึ้น ซึ่งผู้สอนได้ตรวจสอบข้อสรุปนั้นทุกครั้งโดยใช้คำถามนำหรือการยกตัวอย่างเพิ่มเติม นอกจากนี้ในช่วงแรกยังพบว่านักเรียนไม่สามารถเขียนอธิบายเหตุผลประกอบแต่ละขั้นตอนของการพิสูจน์หรือขั้นตอนของการแสดงวิธีการหาคำตอบได้เนื่องจากการเรียนการสอนที่ผ่านมา นักเรียนไม่ได้ถูกฝึกให้เกิดกระบวนการในการเขียนอธิบายการให้เหตุผลเพื่อยืนยันข้อสรุปหรือการเขียนเหตุผลประกอบคำตอบขั้นตอนนั้น ๆ ซึ่งเหตุการณ์ดังกล่าวจะเกิดขึ้นในช่วงแรกของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบอุปนัยและนิรนัยในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 และ 2 เท่านั้นแต่เมื่อนักเรียนผ่านกระบวนการในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบอุปนัยและนิรนัยจนถึงแผนการจัดการเรียนรู้สุดท้ายแล้วพบว่า นักเรียนสามารถเขียนสรุปหรือเขียนอธิบายได้อย่างถูกต้องและสมเหตุสมผลตามหลักการทางคณิตศาสตร์

จากเหตุผลข้างต้น จึงอาจกล่าวได้ว่าการนำการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบอุปนัยและนิรนัย มาใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนนั้นส่งผลให้ ความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของชิณรัตน์ สัทธรรม (2556, หน้า 127) พบว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัย ทำให้ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ สูงกว่าก่อนเรียนและสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ผู้สอนควรจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัย ซึ่งเป็นการจัดกิจกรรมที่ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนเกิดกระบวนการคิดวิเคราะห์ และสังเคราะห์และ จะทำให้นักเรียนเกิดการพัฒนาทักษะและกระบวนการในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ได้ดียิ่งขึ้น

1.2 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ผู้สอนควรจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัย ซึ่งเป็นการจัดกิจกรรมที่ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนเกิดการฝึกฝนการเขียนสรุป การเขียนอธิบาย รวมทั้งส่งผลให้นักเรียนเกิดการพัฒนาทักษะและกระบวนการในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ได้ดียิ่งขึ้น

1.3 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัย เป็นวิธีการสอนที่นักเรียนจะต้องคิดหาคำตอบด้วยตนเอง ดังนั้นถ้านักเรียนมีความรู้พื้นฐานไม่เพียงพอ อาจได้ข้อสรุปที่ไม่ถูกต้องหรือคลาดเคลื่อนได้ ดังนั้นผู้สอนควรตรวจสอบข้อสรุปนั้นทุกครั้งโดยใช้คำถามนำหรือการยกตัวอย่างเพิ่มเติม เป็นต้น

1.4 ผู้สอนควรใช้สถานการณ์ที่หลากหลายเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนเกิดกระบวนการในการคิดวิเคราะห์ สังเคราะห์ และเห็นแนวโน้มในการเขียนสรุปหรือการเขียนอธิบายได้ดียิ่งขึ้น นอกจากนี้ควรเปิดโอกาสให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นในเนื้อหาที่เรียน ให้นักเรียนอภิปรายและแสดงความคิดเห็นต่องานของตนเอง หรืองานของเพื่อนในชั้นเรียน

2. ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัยครั้งต่อไป

2.1 ควรนำรูปแบบการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยมาประยุกต์ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อส่งผลให้นักเรียนมีการพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ด้านอื่น ๆ เช่น ทักษะการแก้ปัญหา หรือการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ เป็นต้น

2.2 ควรมีการศึกษาผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัยในเนื้อหา คณิตศาสตร์อื่น ๆ เช่น ความน่าจะเป็น เลขยกกำลัง ตรรกศาสตร์ เป็นต้น

บรรณานุกรม

- กระทรวงศึกษาธิการ. (2546). *การจัดสาระการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1-6 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544.*
กรุงเทพฯ: องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์.
- กระทรวงศึกษาธิการ. (2552 ก). *เอกสารประกอบหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน
พุทธศักราช 2551: แนวปฏิบัติการวัดและประเมินผลการเรียนรู้.* กรุงเทพฯ: ชุมนุม
สหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
- กระทรวงศึกษาธิการ. (2552 ข). *หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.*
กรุงเทพฯ: ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
- กิดติ พัฒนตระกูลสุข. (2546). การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาของประเทศไทย
สัมพันธ์จริงหรือ. *วารสารคณิตศาสตร์*, 46(474-475), 54-58.
- กิติมา สุรสนธิ. (2548). *ความรู้ทางการสื่อสาร (Introduction to communication).* กรุงเทพฯ:
จามจุรีโปรดักท์.
- ฉันท ชาติทอง. (2551). *การออกแบบการสอนและบูรณาการ: ข้อมูลทางบรรณานุกรมหอสมุด
แห่งชาติ.* นครปฐม: เพชรเกษมการพิมพ์.
- จิตติมา ซอบเอียด. (2551). *การใช้ปัญหาปลายเปิดเพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและทักษะ
การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1.* ปรินญานิพนธ์
การศึกษามหาบัณฑิต, สาขาวิชาการมัธยมศึกษา, คณะศึกษาศาสตร์, มหาวิทยาลัย
ศรีนครินทรวิโรฒ.
- ชมนาด เชื้อสุวรรณทวี. (2542). *การสอนคณิตศาสตร์.* กรุงเทพฯ: ภาคหลักสูตรและการสอน
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ชลาวัณย์ ชมดี. (2551). *ผลการพัฒนาการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องการหาค่าเฉลี่ย
เลขคณิต ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยวิธีสอนแบบอุปนัยหรือแบบนิรนัย.* วิทยานิพนธ์
การศึกษามหาบัณฑิต, สาขาวิชาหลักสูตรการสอน, คณะศึกษาศาสตร์, มหาวิทยาลัย
มหาสารคาม.
- ชาญชัย อาจินสมาจาร. (2542). *หลักการสอนทั่วไป (General principles of teaching).* น.ป.ท.
- ไชยยศ ไพวิทยศิริธรรม. (2555). *เอกสารประกอบการสอน: สถิติเพื่อการวิจัยทางการศึกษา
(Statistics for educational research).* นครปฐม: มหาวิทยาลัยศิลปกร.
- ชวิทย์ เทศดี. (24, มีนาคม 2557). สัมภาษณ์โดย ไพศาล แผลงทับทอง. โรงเรียนดัดดรุณี
อำเภอเมือง จังหวัด ฉะเชิงเทรา.

- ชวสิทธิ์ เทศดี. (24, มีนาคม 2557). สัมภาษณ์โดย ไพศาล เมล่งทับทอง. โรงเรียนดัดดรุณี อำเภอเมือง จังหวัด ฉะเชิงเทรา.
- ณยศ สงวนสิน. (2547). ผลการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนได้รับการสอนและหลังได้รับการสอนโดยใช้ชุดกิจกรรมปฏิบัติการคณิตศาสตร์โดยเทคนิคการสอนแบบอุปนัย-นिरนัย เรื่อง พหุนาม. สารนิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต, สาขาวิชาการมัธยมศึกษา, คณะศึกษาศาสตร์, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ดวงเดือน อ่อนน่วม. (2547). ความรู้ความเข้าใจและมาตรฐานและสาระการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544. ใน พร้อมพรรณ อุคมสินและอัมพร ม้าคนอง, (บรรณาธิการ), *ประมวลบทความหลักการและแนวทางการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์* (หน้า 1-27). กรุงเทพฯ: บพิธการพิมพ์.
- ทิตนา แจมมณี. (2545). *กลุ่มสัมพันธ์เพื่อการทำงานและการจัดการเรียนการสอน*. กรุงเทพฯ: นิชินแอดเวอร์ไทซิง.
- ทิตนา แจมมณี. (2550). *14 วิธีสอนสำหรับครูมืออาชีพ* (พิมพ์ครั้งที่ 7). กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ทิตนา แจมมณี. (2556). *ศาสตร์การสอน: องค์ความรู้เพื่อการจัดกระบวนการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพ* (พิมพ์ครั้งที่ 17). กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ธีรรัตน์ สังห์รณ์. (2556). *ผลของการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัย-นिरนัย ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์เรื่อง สถิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3*. ปริญญาบัตรการศึกษามหาบัณฑิต, สาขาวิชาการมัธยมศึกษา, คณะศึกษาศาสตร์, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- นันทพร ระภักดี. (2551). *ผลการศึกษาเกี่ยวกับบทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดีย โดยเทคนิคการสอนแบบอุปนัย-นिरนัย เรื่อง ความคล้าย สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3*. สารนิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต, สาขาวิชาการมัธยมศึกษา, คณะศึกษาศาสตร์, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ปานทอง กุลนาถศิริ. (2543, มกราคม - มีนาคม). ความเคลื่อนไหวเกี่ยวกับ NCTM: PRINCIPLE AND STANDARDS FOR SCHOOL MATHEMATICS ในปี ค.ศ. 2000. *สสวท*, 28(108), 14-22.

- ปวีณกานท์ พันธุ์สุข. (2552). ผลการใช้กิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ที่เน้นกระบวนการให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัยเรื่องเส้นขนาน ที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลและแก้ปัญหา สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนอินทร์บุรี จังหวัดสิงห์บุรี วิทยานิพนธ์ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต, สาขาวิชาหลักสูตรและการสอน, มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.
- พรพิมล พรพิรชนม์. (2550). การจัดการกระบวนการเรียนรู้. สงขลา: เทมการพิมพ์สงขลา.
- พรรณทิพา พรหมรักษ์. (2552). การพัฒนากระบวนการเรียนการสอน โดยใช้กระบวนการวางนัยทั่วไปเพื่อส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลทางพีชคณิตและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. ปรินญาครุศาสตรดุษฎีบัณฑิต, สาขาวิชาหลักสูตรและการสอน, คณะครุศาสตร์, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- พรรณทิภา ทองนวล. (2554). ผลของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทนการใช้ตัวแทนที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. ปรินญาณิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต, สาขาวิชาการมัธยมศึกษา, คณะศึกษาศาสตร์, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 แก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ. 2545 และ (ฉบับที่ 3) พ.ศ. 2553. ราชกิจจานุเบกษา เล่ม 116, ตอนที่ 74 ก (19 สิงหาคม 2542) หน้า 1-19.
- มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช. (2549). คณิตศาสตร์-การศึกษาและการสอน. นนทบุรี: มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.
- วรรณศิริ หลงรัก. (2553). ผลของการพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้ด้านบริบท (Contextual learning) เรื่อง สถิติ ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ทักษะการเชื่อมโยงและทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. ปรินญาณิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต, สาขาวิชาการมัธยมศึกษา, คณะศึกษาศาสตร์, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- วัชระ น้อยมี. (2551). ผลการศึกษาการพัฒนาชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลของผู้เรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. ปรินญาณิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต, สาขาวิชาการมัธยมศึกษา, คณะศึกษาศาสตร์, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- วัชรวิ กาญจน์เกียรติ. (2554). การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์. เข้าถึงได้จาก <http://sci.pbru.ac.th/sci52/dmdocuments/E-Book/000-mhat001.pdf>

- วีณา ประชากุล และประสาธ เนืองเฉลิม. (2553). *รูปแบบการเรียนการสอน*. มหาสารคาม: มหาวิทยาลัยมหาสารคาม.
- เวชฤทธิ์ อังกณะภัทรขจร. (2555). *ครบเครื่องเรื่องควรรู้สำหรับครูคณิตศาสตร์: หลักสูตรการสอนและการวิจัย*. กรุงเทพฯ: จรัสสินทวงศ์การพิมพ์.
- สำนักงานคณะกรรมการพัฒนาการเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ. (2554). *แผนพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ ฉบับที่สิบเอ็ด พ.ศ. 2555-2559*. เข้าถึงได้จาก <http://www.nesdb.go.th/Portals/0/news/plan/pl11/plan11.pdf>
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2546). *คู่มือการวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: หน่วยการพิมพ์สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2547). *การให้เหตุผลในวิชาคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544*. กรุงเทพฯ: เอส.พี.เอ็น.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2555 ก). *ครูคณิตศาสตร์มืออาชีพ เส้นทางสู่ความสำเร็จ*. กรุงเทพฯ: 3-คิว มีเดีย.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2555 ข). *ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์. (พิมพ์ครั้งที่ 3)*. กรุงเทพฯ: 3-คิว มีเดีย.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2555 ค). *การวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: ซีเอ็ดยูเคชั่น
- สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน. (2551). *แนวปฏิบัติการวัดผลและประเมินผล การเรียนรู้ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพฯ: สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา
- สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา. (2551). *ตัวชี้วัดและสาระแกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
- สำนักคณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์. (2547). *สาระที่ควรเพิ่มและควรลดและข้อคิด การจัดกิจกรรมคณิตศาสตร์ในยุคปฏิรูป*. กรุงเทพฯ: รากขวัญ.
- สิริพร ทิพย์คง. (2545). *หลักสูตรและการสอนคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: สถาบันพัฒนาคุณภาพวิชาการ.

- สุกัญญา บุรณเดชาชัย. (2550). การสื่อสารมวลชนแนวคิด ทฤษฎีและสถานการณ์ในประเทศไทย. ชลบุรี: มนุษยศาสตร์และสังคมศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา.
- สุนีย์ คล้ายนิล. (2547). คณิตศาสตร์สำหรับโลกวันพรุ่งนี้. การศึกษาวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี, 32(131), 12-22.
- สมเดช บุญประจักษ์. (2540). การพัฒนาศักยภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้การเรียนแบบร่วมมือ. ปรินญาการศึกษาดุขฎีบัณฑิต, สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา, บัณฑิตวิทยาลัย, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- องอาจ นัยพัฒน์. (2551). วิธีวิทยาการวิจัยเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพทางพฤติกรรมศาสตร์และสังคมศาสตร์ (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: สามลดา.
- อ้อมฤดี แซ่มอุบล. (2553). ผลของการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนที่เน้นการใช้คำถาม หมวกความคิดหกในเรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวโดยที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการคิดวิเคราะห์และทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. ปรินญาบัณฑิตศึกษามหาบัณฑิต, สาขาวิชาการมัธยมศึกษา, คณะศึกษาศาสตร์, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- อัครยา สังข์จันทร์. (2543). การสอนเพื่อพัฒนาการใช้เหตุผล คู่มือการเรียนการสอนการคิด วิเคราะห์วิจารณ์ คณะกรรมการส่งเสริมการเรียนการสอนเน้นการพัฒนาความคิด วิเคราะห์วิจารณ์มหาวิทยาลัยขอนแก่น. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- อลิสรา ชมชื่น. (2550). การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนา ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสารและการให้เหตุผล เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพ ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น. ปรินญาครุศาสตร์ดุขฎีบัณฑิต, สาขาวิชาหลักสูตรและการสอน, คณะครุศาสตร์, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- อัมพร ม้าคอง. (2547). การพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ .ใน พร้อมพรรณ อุดมสินและอัมพร ม้าคอง, (บรรณาธิการ) ,ประมวลบทความหลักการและแนวทางการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (หน้า 21-24). กรุงเทพฯ: บพิธการพิมพ์.
- อัมพร ม้าคอง. (2553). ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์: การพัฒนาเพื่อพัฒนาการ (พิมพ์ครั้งที่ 2). กรุงเทพฯ: ศูนย์ตำราและเอกสารวิชาการ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

- Artzt, A. F., & Shirel, Y. F. (1999). Mathematics reasoning during small-Group problem solving. *In developing mathematical reasoning in grades K-12*. Stiff, Lee V. pp. 115-126. Reston, Virginia: National council of teachers of mathematics.
- Buschman. (1995). Communication in the language of mathematics. *Teaching Children Mathematics*, 1(6), 324-329.
- Christou, C., & Papageorgiou, E. (2006, February). A framework of mathematics inductive reasoning. *Learning and Instruction*, 17(1), 55-56. Retrieved from <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959475206001198>
- Fensell, A. & Rowan, B. (2001). Representation: an important process for teaching and learning mathematics. *Teaching Children Mathematics*, 7(5), 188-302.
- Godrich, H. (1997). Understanding rubrics. *Education Leadership (Teaching for Authentic Student Performance)*, 54(4), 14-17.
- Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1993). *Reasoning and problem solving: A handbook for elementary school teachers*. Massachusetts: Allyn and Bacon.
- Kennedy, L. M., & Tipps, S. (1994). *Guiding children's learning of mathematics 1994* (7th ed.). Belmont, California: Wadsworth.
- Lardizabal, A. S. (1970). *Methods and principles of teaching*. Quezon City: Alema- Phoenix.
- Lewis, M., Graves, I., & Sanchez, L. (2006). Enhancing mathematical discourse in elementary classrooms. *Journal of the ACM(JACM)*, 53(3), 954-955. Retrieved from <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1150196>
- Mumme, J., & Shepherd, N. (1993). Communication in mathematics. *In Implementing the K-8 curriculum and evaluation standards*. Virginia: The national council of teachers of mathematics.
- Mourad, N. M. (2005). Inductive reasoning in the algebra classroom. *Dissertation Abstracts International: San Jose State University*.
- The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and evaluation standards for school Mathematics*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics
- The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school Mathematics*. Reston, National Council of Teachers of Mathematics

- O'Daffer, P. G., & Thornquist, B. A. (1993). Critical thinking, mathematical reasoning and proof. In *research ideas for the classroom: High school mathematics*. Wilson, Patricia s. pp.39-56. New York: MacMillan.
- Prince, M. J., & Felder, R. M. (2006). Inductive Teaching and learning methods: Definitions, comparisons, and research bases. *Journal of Engineering Education*, 95(2), 123-138. Retrieved from <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.102/j.2168-9830.2006.tb00884.x/abstract>
- Russell, S. J. (1999). *Mathematical reasoning in the elementary grades*. In developing mathematical reasoning in K-12. Shiff, Lee V. pp. 1-12. Reston Virginia: The National Council of teachers of Mathematics.
- Riedesel, C. Alan. (1990). *Teaching elementary school mathematics* (5th ed.). Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.
- Rowan, T. E.; & Morrow, L. J. (1993). *Implementing K-8 curriculum and evaluation standards: reading from the arithmetic teacher*. Virginia: The National Council of teachers of Mathematics.
- Rubel, L. H. (2007). Middle school and high school students' probabilistic reasoning on coin tasks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(5), 531-556.
- Sternberg, R. (1999). The nature of mathematical in developing mathematical reasoning in K-12. Shiff, Lee V. pp. 37-43. Reston Virginia: The national council of teachers of mathematics.
- Sirvani, H. (2007). The effect of teacher communication with parents on student's mathematics achievement. *American Secondary Education*, 36(1), 41.
- Seiler, W. J., & Beall, M. L. (2000). *Communication: Marking connections* (6th ed.). Boston: Allyn & Bacon.
- Sidhu, Kulbir Singh. (1981). *The teaching of mathematics*. (Third Revised.). India: Serling Printers.
- Stiggins, Richard. (1997). *Student-centered classroom assessment* (2nd ed.). New Jersey: Prentice-Hall.
- Verderber, R. F. (1996). *Communicate* (8th ed.). Belmont: Wadsworth Publishing.

Walton, S. & Jeffrey, W. (1995). *Communication Principles: A modular approach*. Sydney: Prentice Hall.

Wolf, K. (2009). *Developing a deeper understanding of fraction through communication*.

Retrieved from [http://www.google.co.th/books?hl=th&lr=&id=wSf0-](http://www.google.co.th/books?hl=th&lr=&id=wSf0-NYCB6sC&oi=fnd&pg=PA1&dq=developing+a+deeper+understanding+of+Fraction+through+Communication.&ots=hM2KaQS7a&sig=ek6Vz54vDmG78F16EsEw_MJ224c&redir_esc=y#v=onepage&q=developing%20a%20deeper%20understanding%20of%20Fraction%20through%20Communication.&f=false)

[NYCB6sC&oi=fnd&pg=PA1&dq=developing+a+deeper+understanding+of+Fraction+through+Communication.&ots=hM2KaQS7a&sig=ek6Vz54vDmG78F16EsEw_MJ224c&redir_esc=y#v=onepage&q=developing%20a%20deeper%20understanding%20of%20Fraction%20through%20Communication.&f=false](http://www.google.co.th/books?hl=th&lr=&id=wSf0-NYCB6sC&oi=fnd&pg=PA1&dq=developing+a+deeper+understanding+of+Fraction+through+Communication.&ots=hM2KaQS7a&sig=ek6Vz54vDmG78F16EsEw_MJ224c&redir_esc=y#v=onepage&q=developing%20a%20deeper%20understanding%20of%20Fraction%20through%20Communication.&f=false)

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

- รายชื่อผู้เชี่ยวชาญ
- สำเนาหนังสือขอความอนุเคราะห์ในการตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมือ
เพื่อการทำวิจัย
- สำเนาหนังสือขอความอนุเคราะห์ในการเก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อหาคุณภาพของเครื่องมือ
การวิจัย
- สำเนาหนังสือขอความอนุเคราะห์ในการเก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อการวิจัย

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญ

1. ดร.สมคิด อินเทพ
 อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์
 ภาควิชาคณิตศาสตร์
 คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
2. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชานนท์ จันทรา
 อาจารย์ประจำสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์
 ภาควิชา
 คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
3. อาจารย์ชวิทธิ์ เทศดี
 ตำแหน่ง ครูชำนาญการพิเศษ
 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
 โรงเรียนดัดดรุณี จังหวัดฉะเชิงเทรา
4. อาจารย์ผ่องศรี น้อยปรีชา
 ตำแหน่ง ครูชำนาญการพิเศษ
 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
 โรงเรียนโสธรวรารามวรวิหาร
 จังหวัดฉะเชิงเทรา
5. อาจารย์เกียรติศักดิ์ หนั่นจิด
 ตำแหน่ง ครูชำนาญการพิเศษ
 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
 โรงเรียนเบญจมราชรังสฤษฎิ์
 จังหวัดฉะเชิงเทรา



ที่ ศธ ๖๖๒๑/ว. ๑๒๒๒

คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
๑๖๕ ถ.สงหวาดบางแสน ต.แสนสุข
อ.เมือง จ.ชลบุรี ๒๐๑๓๑

๒๗ มิถุนายน ๒๕๕๗

เรื่อง ขอบความอนุเคราะห์ในการตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมือเพื่อการวิจัย

เรียน นายชวิทย์ เทศดี

สิ่งที่ส่งมาด้วย เค้าโครงข้อวิทยานิพนธ์ และเครื่องมือเพื่อการวิจัย จำนวน ๑ ชุด

ด้วยนายไพศาล เมฆงทับทอง นิสิตระดับบัณฑิตศึกษา หลักสูตรการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ได้รับอนุมัติให้ทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง "ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบอุปนัยและนิรนัย ที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔" โดยอยู่ในความควบคุมดูแลของ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เวชฤทธิ์ อังกะนภัทรขจรประธานกรรมการ ขณะนี้อยู่ในขั้นตอนการสร้างเครื่องมือเพื่อการวิจัย ในการนี้คณะศึกษาศาสตร์ ได้พิจารณาแล้วเห็นว่าท่านเป็นผู้เชี่ยวชาญในเรื่องดังกล่าวเป็นอย่างดี จึงขอความอนุเคราะห์จากท่าน ในการตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมือเพื่อการวิจัยของนิสิตในครั้งนี้

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา หวังเป็นอย่างยิ่งว่าคงจะได้รับความอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี และขอขอบคุณอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิมลรัตน์ จตุรานนท์)

รองคณบดีฝ่ายวิชาการ ปฏิบัติการแทน

ผู้รักษาการแทนคณบดีคณะศึกษาศาสตร์

ผู้รักษาการแทนอธิการบดีมหาวิทยาลัยบูรพา

ภาควิชาการจัดการเรียนรู้

โทรศัพท์ ๐-๓๘๓๕-๓๔๘๖, ๐-๓๘๑๐-๒๐๖๕

โทรสาร ๐-๓๘๓๕-๓๔๘๕

ผู้วิจัย ๐๘๓-๒๖๖๐๕๔๖



ที่ ศบ ๖๖๒๑/จ. ๑๕๕๒

คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
๑๖๕ ถ.ลงหาดบางแสน ต.แสนสุข
อ.เมือง จ.ชลบุรี ๒๐๑๓๑

๒๗ มิถุนายน ๒๕๕๗

เรื่อง ขอบความอนุเคราะห์ในการตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมือเพื่อการวิจัย

เรียน นายเกียรติศักดิ์ มั่นจิตร

สิ่งที่ส่งมาด้วย เค้าโครงย่อวิทยานิพนธ์ และเครื่องมือเพื่อการวิจัย จำนวน ๑ ชุด

ด้วยนายไพศาล แผลงทับทอง นิสิตระดับบัณฑิตศึกษา หลักสูตรการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ได้รับอนุมัติให้ทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง "ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบอุปนัยและนิรนัย ที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔" โดยอยู่ในความควบคุมดูแลของ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เวรฤทธิ์ อังกะนัถร์ขจร ประธานกรรมการ ขณะนี้อยู่ในขั้นตอนการสร้างเครื่องมือเพื่อการวิจัย ในการนี้คณะศึกษาศาสตร์ ได้พิจารณาแล้วเห็นว่าท่านเป็นผู้เชี่ยวชาญในเรื่องดังกล่าวเป็นอย่างดี จึงขอความอนุเคราะห์จากท่าน ในการตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมือเพื่อการวิจัยของนิสิตในครั้งนี้

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา หวังเป็นอย่างยิ่งว่าจะได้รับความอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี และขอขอบคุณอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิมลรัตน์ จตุรานนท์)
รองคณบดีฝ่ายวิชาการ ปฏิบัติการแทน
ผู้อำนวยการแทนคณบดีคณะศึกษาศาสตร์
ผู้อำนวยการแทนอธิการบดีมหาวิทยาลัยบูรพา

ภาควิชาการจัดการเรียนรู้

โทรศัพท์ ๐-๓๘๓๕-๓๔๘๖, ๐-๓๘๑๐-๒๐๖๕

โทรสาร ๐-๓๘๓๕-๓๔๘๕

ผู้วิจัย ๐๘๓-๒๖๖๐๕๔๖



ที่ ศธ ๖๖๒๑/ว.๑๕๒๒

คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
๑๖๕ ถ.ลงหาดบางแสน ต.แสนสุข
อ.เมือง จ.ชลบุรี ๒๐๑๓๑

๒๕ มิถุนายน ๒๕๕๖

เรื่อง ขอบความอนุเคราะห์ในการตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมือเพื่อการวิจัย

เรียน นายผ่องศรี น้อยปรีชา

สิ่งที่ส่งมาด้วย เค้าโครงข้อวิทยานิพนธ์ และเครื่องมือเพื่อการวิจัย จำนวน ๑ ชุด

ช่วยนายไพศาล แมลงทับทอง นิสิตระดับบัณฑิตศึกษา หลักสูตรการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ได้รับอนุมัติให้ทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง “ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบอุปนัยและนิรนัย ที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔” โดยอยู่ในความควบคุมดูแลของ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วณิชฤทธิ์ อังกะนัทรขจร ประธานกรรมการ ขณะนี้อยู่ในขั้นตอนการสร้างเครื่องมือเพื่อการวิจัย ในการนี้คณะศึกษาศาสตร์ ได้พิจารณาแล้วเห็นว่าท่านเป็นผู้เชี่ยวชาญในเรื่องดังกล่าวเป็นอย่างดี จึงขอความอนุเคราะห์จากท่านในการตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมือเพื่อการวิจัยของนิสิตในครั้งนี้

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา หวังเป็นอย่างยิ่งว่าคงจะได้รับความอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี และขอขอบคุณอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วิมลรัตน์ จตุรานนท์)

รองคณบดีฝ่ายวิชาการ ปฏิบัติการแทน

ผู้รักษาการแทนคณบดีคณะศึกษาศาสตร์

ผู้รักษาการแทนอธิการบดีมหาวิทยาลัยบูรพา

ภาควิชาการจัดการเรียนรู้

โทรศัพท์ ๐-๓๘๓๕-๓๔๘๖, ๐-๓๘๑๐-๒๐๖๕

โทรสาร ๐-๓๘๓๕-๓๔๘๕

ผู้วิจัย ๐๘๓-๒๖๖๐๕๔๖



บันทึกข้อความ

ส่วนงาน คณะศึกษาศาสตร์ ภาควิชาการจัดการเรียนรู้ โทร ๒๐๒๕, ๒๐๖๕
 ที่ ศธ ๖๖๒๑/ ๓ ๖ ๕๕ วันที่ ๒๗ มิถุนายน พ.ศ. ๒๕๕๗
 เรื่อง ขอลความอนุเคราะห์ในการตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมือเพื่อการทำวิจัย
 เรียน คร.สมกิต อินเทพ

ด้วยนายไพศาล เมฆงทับทอง นิสิตระดับบัณฑิตศึกษา หลักสูตรการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ได้รับอนุมัติให้ทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง “ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบอุปนัยและนิรนัย ที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔” โดยอยู่ในความควบคุมดูแลของผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เวชฎหทัย อังกะภักทรจรรยา ประสานกรรมการ ขณะนี้อยู่ในขั้นตอนการสร้างเครื่องมือเพื่อการวิจัย ในการนี้คณะศึกษาศาสตร์ ได้พิจารณาแล้วเห็นว่าท่านเป็นผู้เชี่ยวชาญในเรื่องดังกล่าวเป็นอย่างดี จึงขอความอนุเคราะห์จากท่าน ในการตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมือเพื่อการวิจัยของนิสิตในครั้งนี

จึงเรียนมาเพื่อ โปรดพิจารณา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา หวังเป็นอย่างยิ่งว่าจะได้รับความอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี และขอขอบคุณอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิมลรัตน์ จตุรานนท์)
 รองคณบดีฝ่ายวิชาการ



ที่ ศร ๖๖๒๑/ว.๑/๒๒

คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
๑๖๕ ถ.กลางบางแสน ต.แสนสุข
อ.เมือง จ.ชลบุรี ๒๐๑๓๑

๒๗ มิถุนายน ๒๕๕๗

เรื่อง ขอลาอนุเคราะห์ในการตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมือเพื่อการวิจัย

เรียน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชานนท์ จันทร์ธา

สิ่งที่ส่งมาด้วย เค้าโครงข้อวิทยานิพนธ์ และเครื่องมือเพื่อการวิจัย จำนวน ๑ ชุด

ด้วยนายไพศาล เมล่งทับทอง นิสิตระดับบัณฑิตศึกษา หลักสูตรการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ได้รับอนุมัติให้ทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง "ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบอุปนัยและนิรนัย ที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔" โดยอยู่ในความควบคุมดูแลของผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เวชฤทธิ์ อังกะภักขจร ประธานกรรมการ ขณะนี้อยู่ในขั้นตอนการสร้างเครื่องมือเพื่อการวิจัย ในการนี้คณะศึกษาศาสตร์ ได้พิจารณาแล้วเห็นว่าท่านเป็นผู้เชี่ยวชาญในเรื่องดังกล่าวเป็นอย่างดี จึงขอความอนุเคราะห์จากท่าน ในการตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมือเพื่อการวิจัยของนิสิตในครั้งนี้

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา หวังเป็นอย่างยิ่งว่าคงจะได้รับความอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี และขอขอบคุณอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิมลรัตน์ จตุรานนท์)

รองคณบดีฝ่ายวิชาการ ปฏิบัติการแทน

ผู้รักษาการแทนคณบดีคณะศึกษาศาสตร์

ผู้รักษาการแทนอธิการบดีมหาวิทยาลัยบูรพา

ภาควิชาการจัดการเรียนรู้

โทรศัพท์ ๐-๓๘๓๕-๓๔๘๖, ๐-๓๘๓๐-๒๐๖๕

โทรสาร ๐-๓๘๓๕-๓๔๘๕

ผู้วิจัย ๐๘๓-๒๖๖๐๕๔๖

๑๕



๑๓๕๑
๑๓๕๑

ที่ ศธ ๖๖๒๑/๑ ๕๑๐

คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
๑๖๕ ถ.กลางบางแสน ต.แสนสุข
อ.เมือง จ.ชลบุรี ๒๐๑๓๑

๖ สิงหาคม ๒๕๕๗

เรื่อง ขอความอนุเคราะห์ในการเก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อหาคุณภาพของเครื่องมือการวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการ โรงเรียนคัคครุฑ

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือเพื่อการวิจัย จำนวน ๑ ชุด

ด้วยนายไพศาล แผลงทับทอง นิสิตระดับบัณฑิตศึกษา หลักสูตรการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ได้รับอนุมัติให้ทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง “ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบอุปนัยและนิรนัยที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔” ในความควบคุมดูแลของ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เวชฎุทธิ์ อังคนะภัทรขจร ประธานกรรมการ มีความประสงค์ ขออำนวยความสะดวกในการเก็บรวบรวมข้อมูลจากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔/๓ จำนวน ๔๕ คน แผนการเรียนวิทยาศาสตร์ - คณิตศาสตร์ โดยผู้วิจัยจะขออนุญาตเก็บรวบรวมข้อมูลด้วยตนเอง ระหว่างวันที่ ๑๔ สิงหาคม พ.ศ. ๒๕๕๗ - ๒๒ สิงหาคม พ.ศ. ๒๕๕๗ อนึ่ง โครงการวิจัยนี้ได้ผ่าน ขั้นตอนพิจารณาทางจริยธรรมการวิจัยของมหาวิทยาลัยบูรพาเรียบร้อยแล้ว

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา หวังเป็นอย่างยิ่งว่า จะได้รับความอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี และขอขอบคุณอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

เรียน ผู้อำนวยการ
ม. มรท ๗๐๐๓๓๓๓
โรงเรียนคัคครุฑ
กิโลเมตรที่ ๑๖ ทางหลวงหมายเลข ๓๖
อำเภอเมืองชลบุรี

ขอแสดงความนับถือ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วินรัตน์ จตุรานนท์)
รองคณบดีฝ่ายวิชาการ ปฏิบัติการแทน
คณบดีคณะศึกษาศาสตร์ ปฏิบัติการแทน

ภาควิชาการจัดการเรียนรู้
โทรศัพท์ ๐-๓๘๓๕-๓๔๘๖, ๐-๓๘๑๐-๒๐๖๕
โทรสาร ๐-๓๘๓๕-๓๔๘๕
ผู้วิจัยโทร ๐๘๓-๒๖๖๐๕๔๖

ผู้รักษาการแทนอธิการบดีมหาวิทยาลัยบูรพา
- [Signature]
- [Signature]
[Signature]
[Signature]
[Signature]



๑๖๕
๑๖๕ ค.ค.๑๖๕

ที่ ศธ ๖๖๒๑/ ๑๕๕ ๗

คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
๑๖๕ ถ.กลางบางแสน ค.แสนสุข
อ.เมือง จ.ชลบุรี ๒๐๑๓๑

๑๓ สิงหาคม ๒๕๕๗

เรื่อง ขอบความอนุเคราะห์ในการเก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อการวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนคัคครุณี

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือเพื่อการวิจัย จำนวน ๑ ชุด

ด้วยนายไพศาล แผลงทับทอง นิสิตระดับบัณฑิตศึกษา หลักสูตรการศึกษา
มหาบัณฑิต สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ได้รับอนุมัติให้ทำวิทยานิพนธ์เรื่อง
“ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบอุปนัยและนิรนัย ที่มีต่อความสามารถในการให้
เหตุผล และความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔” อยู่ในความควบคุมดูแลของ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เวชฎทธี
อังกนะภัทรขจร ประธานกรรมการ มีความประสงค์ขออำนวยความสะดวกในการเก็บรวบรวม
ข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่างคือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔/๔ จำนวน ๔๔ คน ขออนุญาตเก็บ
รวบรวมข้อมูลด้วยตนเอง ระหว่างวันที่ ๒๕ สิงหาคม พ.ศ. ๒๕๕๗ - ๑๒ กันยายน พ.ศ. ๒๕๕๗
อนึ่ง โครงการวิจัยนี้ได้ผ่านขั้นตอนการพิจารณาทางจริยธรรมการวิจัยของมหาวิทยาลัยบูรพา
เรียบร้อยแล้ว

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา หวังเป็นอย่างยิ่ง
ว่าคงจะได้รับความอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี และขอขอบคุณอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

ศาสตราจารย์ ดร. ไพศาล แผลงทับทอง
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เวชฎทธี อังกนะภัทรขจร
ประธานคณะกรรมการ

ขอแสดงความนับถือ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วิมลรัตน์ จตุรานนท์)
รองคณบดีฝ่ายวิชาการ ปฏิบัติการแทน
คณบดีคณะศึกษาศาสตร์ ปฏิบัติการแทน

ภาควิชาการจัดการเรียนรู้ ๐๗๒-๑๕๓
โทรศัพท์ ๐-๓๘๓๕-๓๔๘๖, ๐-๓๘๑๐-๒๐๖๕
โทรสาร ๐-๓๘๓๕-๓๔๘๕
ผู้วิจัยโทร ๐๘๓-๒๖๖๐๕๔๖

ผู้รักษาการแทนอธิการบดีมหาวิทยาลัยบูรพา
๑. น.ก.
๗ ก.ค. ๒๕๕๗

ภาคผนวก ข

- ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ที่พัฒนาความสามารถในการให้เหตุผล
และความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์
- เฉลยใบกิจกรรมที่ 1, ใบกิจกรรมที่ 2 และแบบฝึกหัดที่ 1 ในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1
เรื่องการหารลงตัว
- แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสาร
ด้านการเขียนคณิตศาสตร์
- เฉลยแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสาร
ด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

หน่วยการเรียนรู้ ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น	เรื่องการหารลงตัว
รหัสวิชา ค31201 รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 1	กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	เวลา 2 คาบ

ผลการเรียนรู้

1. เข้าใจสมบัติของจำนวนเต็ม
2. นำสมบัติของจำนวนเต็มไปใช้ในการให้เหตุผลเกี่ยวกับการหารลงตัวได้

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. ด้านความรู้ทางคณิตศาสตร์: เมื่อจบชั่วโมงเรียนแล้วนักเรียน
 - 1.1. สามารถบอกนิยามของการหารลงตัวได้
2. ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์: เมื่อจบชั่วโมงเรียนแล้วนักเรียน
 - 2.1 สามารถให้เหตุผลประกอบการพิสูจน์ข้อความเกี่ยวกับทฤษฎีการหารลงตัวที่กำหนดให้ได้
 - 2.2 สามารถสื่อสาร โดยการเขียนอธิบายการพิสูจน์ข้อความเกี่ยวกับทฤษฎีการหารลงตัวที่กำหนดให้ได้
 - 2.3 สามารถนำความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีการหารลงตัวไปใช้แก้โจทย์ปัญหาและให้เหตุผลประกอบแต่ละขั้นตอนของวิธีการทำโดยการสื่อสารผ่านการเขียนได้
3. ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์: เมื่อจบชั่วโมงเรียนแล้วนักเรียน
 - 3.1 มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย

สาระสำคัญ

นิยาม ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $b \neq 0$ ถ้า b หาร a ลงตัว ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม c ที่ทำให้ $a = bc$ ใช้สัญลักษณ์ $b|a$ แทน b หาร a ลงตัว เรียก b ว่าตัวหาร (*divisor*) ของ a , เรียก a ว่าเป็น พหุคูณ (*multiple*) ของ b และเรียก c ว่าผลหาร (*quotient*)

สาระการเรียนรู้

การหารลงตัว

กิจกรรมการเรียนรู้

คาบ 1

ขั้นที่ 1 ขั้นเตรียม

1.1 ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนเกี่ยวกับสมบัติเบื้องต้นของจำนวนเต็มให้นักเรียนทราบก่อน โดยครูใช้คำถามนำคือ เซตของจำนวนเต็มประกอบด้วยอะไรบ้าง เราใช้สัญลักษณ์ใดแทนจำนวนเต็ม และเซตของจำนวนเต็มมีสมบัติปิดการบวกหรือไม่ เพราะเหตุใด เป็นต้น

1.2 ครูทบทวนเรื่องการหารลงตัวเบื้องต้นที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้วดังนี้

1.2.1 ครูถามนักเรียนว่าเศษที่ได้จากการหาร 4 ด้วย 2 มีค่าเท่ากับเท่าใดและนักเรียนตอบได้หรือไม่ว่าพหุคูณของ 2 มีอะไรบ้าง ดังนั้น 2 หาร 4 ลงตัวหรือไม่ เพราะเหตุใด จากนั้นครูจึงอธิบายว่า การเขียน 2 หาร 4 ลงตัวในทางคณิตศาสตร์เราจะใช้สัญลักษณ์ $2/4$ อ่านว่า 2 หาร 4 ลงตัว และจะเรียก 2 ว่าเป็นตัวหาร (divisor) ของ 4, เรียก 4 ว่าเป็นพหุคูณ (multiple) ของ 2 และเรียก 2 ว่าเป็นผลหาร (quotient)

1.2.2 ครูถามนักเรียนต่อว่าเศษที่ได้จากการหาร 4 ด้วย 3 มีค่าเท่ากับเท่าใด และนักเรียนตอบได้หรือไม่ว่าพหุคูณของ 3 มีอะไรบ้าง ดังนั้น 3 หาร 4 ลงตัวหรือไม่ เพราะเหตุใด จากนั้นครูจึงอธิบายว่าการเขียน 3 หาร 4 ไม่ลงตัว ในทางคณิตศาสตร์เราจะใช้สัญลักษณ์ $3/4$ แทน 3 หาร 4 ไม่ลงตัว จากนั้นครูแจกใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง การหารลงตัว และบอกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

ขั้นที่ 2 ขั้นเสนอตัวอย่าง

2.1 ครูให้นักเรียนศึกษาและทำใบกิจกรรมที่ 1 โดยครูใช้คำถามนำ คือ นักเรียนคิดว่า 2 หาร 6 ลงตัวหรือไม่ เพราะเหตุใด (เป็นการนำเข้าสู่การตอบคำถามตามตารางในใบกิจกรรมที่ 1) ถ้า 2 หาร 6 ลงตัว แล้ว นักเรียนสามารถเขียน 6 ในรูปผลคูณของตัวหารกับจำนวนเต็มใด ๆ ได้หรือไม่ เป็นต้น โดยนักเรียนจะต้องตอบคำถามลงในใบกิจกรรมที่ 1

ขั้นที่ 3 ขั้นสังเคราะห์

3.1 เมื่อนักเรียนตอบคำถามในใบกิจกรรมที่ 1 เสร็จเรียบร้อยแล้ว ครูให้นักเรียนจับกลุ่มกลุ่มละ 4-6 คน เพื่อให้แต่ละคนภายในกลุ่มได้เกิดการแลกเปลี่ยนเรียนรู้และช่วยกันหาข้อเปรียบเทียบความสัมพันธ์และข้อคาดการณ์ของแต่ละคนว่ามีความเหมือนความแตกต่างกันอย่างไร โดยครูใช้คำถามนำเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนได้เกิดกระบวนการคิดการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ ได้แก่ ความสัมพันธ์และข้อคาดการณ์ของสมาชิกในแต่ละกลุ่มเหมือนหรือแตกต่างกันอย่างไร เหตุใดจึงเป็นเช่นนั้น เป็นต้น จากนั้นครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มออกมานำเสนอข้อคาดการณ์ต่าง ๆ หน้าชั้นเรียนหลังจากที่นักเรียนได้มีการแลกเปลี่ยนเรียนรู้กันภายในกลุ่มเรียบร้อยแล้ว

3.2 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปข้อคาดการณ์ โดยครูใช้คำถามนำ ได้แก่ ข้อคาดการณ์ที่นักเรียนได้มานั้น ได้มาได้อย่างไร เหตุใดจึงเป็นเช่นนั้น ข้อคาดการณ์ที่ได้ของแต่ละกลุ่มมีความเหมือนหรือความต่างกันอย่างไร เพื่อให้ให้นักเรียนได้เกิดการเปรียบเทียบความเหมือนความต่างของข้อคาดการณ์แต่ละกลุ่ม จนนักเรียนเห็นความสัมพันธ์และสามารถสร้างข้อคาดการณ์ได้ว่า a หหาร b ลงตัว ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม c ที่ทำให้ $b = ac$ เรียก a ว่าตัวหาร (*divisor*) ของ b , เรียก b ว่าเป็น พหุคูณ (*multiple*) ของ a และเรียก c ว่าผลหาร (*quotient*) จากนั้นครูจึงอธิบายว่า ข้อความดังกล่าวนี้ คือ นิยามของการหารลงตัว

คาบ 2

ขั้นที่ 4 ขั้นตรวจสอบ

4.1 ครูทบทวนข้อคาดการณ์ที่นักเรียนสังเคราะห์ขึ้นมาได้โดยใช้คำถามนำ เช่น จากใบกิจกรรมที่ 1 นักเรียนสร้างข้อคาดการณ์ได้อย่างไร (a หหาร b ลงตัว ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม c ที่ทำให้ $b = ac$)

4.2 ครูอธิบายว่าข้อคาดการณ์ที่นักเรียนสังเคราะห์ขึ้นมาได้นั้นเป็นนิยามของการหารลงตัว ซึ่งในทางคณิตศาสตร์เราจะไม่มีการพิสูจน์นิยามดังนั้นจะขอละการพิสูจน์ไว้ (แต่นักเรียนจะได้ฝึกการพิสูจน์โดยการนำนิยามนี้ไปใช้

4.3 ครูร่วมกับนักเรียนสรุปนิยามอีกครั้งหนึ่งโดยครูใช้คำถามนำ เช่น a จะหาร b ลงตัวได้จะต้องมีลักษณะอย่างไร (a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $b \neq 0$ จะได้ว่า b หหาร a ลงตัว ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม c ที่ทำให้ $a = bc$)

ขั้นที่ 5 ขั้นนำไปใช้

5.1 ครูและนักเรียนร่วมกันทบทวนข้อความรู้ต่าง ๆ ทั้ง นิยามและทฤษฎีบทที่สรุปได้ในคาบที่ 2 อีกครั้งหนึ่งโดยครูใช้คำถามนำ เช่น จากการเรียนที่ผ่านมา นักเรียนสามารถสรุปความสัมพันธ์ของ a และ b เมื่อ a หหาร b ลงตัวได้หรือไม่อย่างไร สำหรับความสัมพันธ์หารลงตัวที่นักเรียนได้ศึกษานั้นมีทฤษฎีที่สำคัญที่เกี่ยวข้องอะไรบ้าง เป็นต้น

5.2 ครูและนักเรียนร่วมกันทำใบกิจกรรมที่ 2 เพื่อให้ให้นักเรียนได้ฝึกนำข้อความรู้ดังกล่าวไปประยุกต์ใช้ในการให้เหตุผลประกอบการพิสูจน์ข้อความต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการหารลงตัวได้อย่างเหมาะสม

5.3 ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 1 เป็นการบ้านเพื่อให้นักเรียนได้เกิดความเข้าใจมากยิ่งขึ้นในการนำข้อความรู้ดังกล่าวไปประยุกต์ใช้ในการให้เหตุผลประกอบการพิสูจน์ข้อความต่าง ๆ

ที่เกี่ยวข้องกับการหารลงตัว รวมทั้งการแก้โจทย์ปัญหาต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม เช่น การนำความรู้เรื่องการหารลงตัวไปใช้ในการพิสูจน์ว่า ถ้า a หาร $2x-3y$ ลงตัวและ a หาร $4x-5y$ ลงตัว แล้ว a หาร y ลงตัว กล่าวคือเมื่อนักเรียนเข้าใจนิยามของการหารลงตัวนักเรียนจะสามารถอธิบายได้ว่า a หาร $2x-3y$ ลงตัว หมายความว่าอย่างไร (จาก $a|(2x-3y)$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $2x-3y=ak$) a หาร $4x-5y$ ลงตัว หมายความว่าอย่างไร (จาก $a|(4x-5y)$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม l ที่ทำให้ $4x-5y=al$) เป็นต้น

สื่อ อุปกรณ์ และแหล่งเรียนรู้

1. ใบกิจกรรมที่ 1 บทนิยามของการหารลงตัว
2. ใบกิจกรรมที่ 2 การพิสูจน์ทฤษฎีบทของการหารลงตัว
3. แบบฝึกหัดที่ 1 เรื่องการหารลงตัว

การวัดและการประเมินการเรียนรู้

สิ่งที่ต้องการวัด	วิธีการวัด	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน
1. สามารถบอกนิยามของการหารลงตัวได้	การตรวจแบบฝึกหัดและการตรวจใบกิจกรรม	แบบฝึกหัดที่ 1 ใบกิจกรรมที่ 1	1. ทำแบบฝึกหัดที่ 1 ข้อ 1 ได้ไม่ต่ำกว่า 6 ข้อ 2. ทำใบกิจกรรมที่ 1 ข้อ 1-3 ได้ถูกต้องทั้งหมด
2. สามารถให้เหตุผลประกอบการพิสูจน์ข้อความเกี่ยวกับทฤษฎีการหารลงตัวที่กำหนดให้ได้	การสังเกตการให้เหตุผลจากการตรวจแบบฝึกหัดและการตรวจใบกิจกรรม	แบบฝึกหัดที่ 1 ใบกิจกรรมที่ 2	1. ทำแบบฝึกหัดที่ 1 ข้อ 2 ได้ถูกต้องทุกส่วน 2. ทำใบกิจกรรมที่ 2 ข้อ 1-3 ได้ถูกต้องทั้งหมด
3. สามารถสื่อสารโดยการเขียนอธิบายการพิสูจน์ข้อความเกี่ยวกับทฤษฎีการหารลงตัวที่กำหนดให้ได้	การสังเกตการเขียนจากการตรวจแบบฝึกหัดและการตรวจใบกิจกรรม	แบบฝึกหัดที่ 1 ใบกิจกรรมที่ 2	1. ทำแบบฝึกหัดที่ 1 ข้อ 2 ได้ถูกต้องทุกส่วน 2. ทำใบกิจกรรมที่ 2 ข้อ 1-3 ได้ถูกต้องทั้งหมด

4. สามารถนำความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีการหารลงตัวไปใช้แก้โจทย์ปัญหาและให้เหตุผลประกอบแต่ละขั้นตอนของวิธีการทำโดยการสื่อสารผ่านการเขียนได้	การตรวจแบบฝึกหัด	แบบฝึกหัดที่ 1	1. ทำแบบฝึกหัดที่ 1 ข้อ 3 ได้ถูกต้องทุกส่วน
5. นักเรียนมีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย	การสังเกต พฤติกรรมการส่งใบกิจกรรมและการส่งบ้าน	แบบประเมิน พฤติกรรมการส่งบ้านและการส่งใบกิจกรรมของนักเรียน	เกณฑ์ประเมินอยู่ในระดับดีขึ้นไป

9. บันทึกหลังการสอน

ในระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้พบว่าในช่วงแรกนักเรียนมีความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ไม่เพียงพอจึงไม่สามารถให้เหตุผลประกอบแต่ละขั้นตอนของการพิสูจน์หรือขั้นตอนของการแสดงวิธีการหาคำตอบได้ และพบว่านักเรียนไม่สามารถเรียบเรียงและเขียนอธิบายข้อความรู้ หรือ ไม่สามารถเขียน โดยการใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง ดังนั้นในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เริ่มแรกผู้สอนจึงใช้คำถามนำให้มากขึ้น และทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนเพื่อเตรียมความพร้อมในการศึกษาเนื้อหาใหม่ ทั้งนี้เพื่อให้นักเรียนเกิดแนวคิดและสามารถถ่ายทอดกระบวนการคิดของตนเองผ่านการเขียนได้อย่างถูกต้องและเกิดความเข้าใจในเนื้อหาสามารถให้เหตุผลประกอบแต่ละขั้นตอนของการพิสูจน์หรือขั้นตอนของการแสดงวิธีการหาคำตอบได้อย่างถูกต้อง

ไพศาล แมลงทับทอง

ใบกิจกรรมที่ 1

“เรื่อง บทนิยามของการหารลงตัว”

ชื่อ.....นามสกุล.....ชั้น ม.4/.....เลขที่.....

คำชี้แจง: จงพิจารณาคำสั่งในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) จากตารางจงพิจารณาว่า a หาร b ลงตัวหรือไม่ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบ

ข้อ	a	b	$a b$	แสดงเหตุผลประกอบ
1	2	6	✓	เนื่องจากมี 3 ซึ่งเป็นจำนวนเต็ม ($3 \in \mathbb{Z}$) ที่ทำให้ $6 = 2(3)$
2	4	15	✗	เนื่องจากไม่มีจำนวนเต็มใดๆ คูณกับ 4 แล้วเท่ากับ 15
3	7	-28		
4	12	-60		
5	-5	-75		
6	-8	56		
7	-6	-54		
8	9	46		
9	12	-110		
10	4	-37		
11	-5	-127		
12	-9	55		

จากตารางในข้อ 1 เมื่อนักเรียนพิจารณาการแสดงผลประกอบของแต่ละข้อแล้ว นักเรียนจงสร้างข้อคาดการณ์เพื่อสรุปความสัมพันธ์ของจำนวนเต็ม a และ b ที่หารลงตัวกัน

.....

.....

ใบกิจกรรมที่ 2

“เรื่อง การพิสูจน์ทฤษฎีบทของการหารลงตัว”

ชื่อ.....นามสกุล.....ชั้น ม.4/.....เลขที่.....

คำชี้แจง: จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

1. สำหรับจำนวนเต็มบวก a และ b ใดๆ ถ้า $a|b$ แล้ว $a \leq b$

พิสูจน์ ให้ [จะต้องแสดงให้ได้ว่า]

จาก $a|b$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม x ที่ทำให้ (.....)

เนื่องจาก a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น x เป็นจำนวนเต็มบวก ฉะนั้น $x \geq 1$

จะได้ (.....)

ดังนั้น (.....)

2. สำหรับจำนวนเต็ม a, b และ c ใดๆ โดยที่ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ ถ้า $a|b$ และ $b|c$ แล้ว $a|c$

พิสูจน์ ให้ [จะต้องแสดงให้ได้ว่า]

จาก $a|b$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม x ที่ทำให้ (1)

(จากนิยามของการหารลงตัว)

จาก $b|c$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม y ที่ทำให้ (2)

(จากนิยามของการหารลงตัว)

แทน (1) ใน (2) จะได้

..... (.....)

..... (.....)

ดังนั้น (.....)

3. สำหรับจำนวนเต็มบวก a, b และ c ใดๆ โดยที่ $a \neq 0$ ถ้า $a|b$ และ $a|c$ แล้ว $a|(b+c)$

พิสูจน์ ให้ [จะต้องแสดงให้ได้ว่า.....]

จาก $a|b$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม x ที่ทำให้ (1)
(.....)

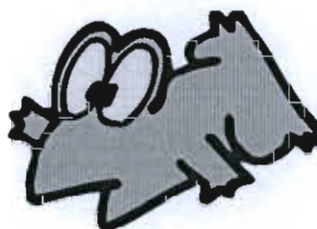
จาก $a|c$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม y ที่ทำให้ (2)
(.....)

นำ จะได้ (.....)

..... (.....)

..... (.....)

ดังนั้น (.....)



แบบฝึกหัดที่ 1

เรื่อง การหารลงตัว

ชื่อ.....นามสกุล.....ชั้น ม.4/.....เลขที่.....

1. คำชี้แจง: จากบทนิยามการหารลงตัว จงให้เหตุผลเพื่อสนับสนุนคำกล่าวต่อไปนี้

1. 8 หาร 48 ลงตัวหรือไม่ เพราะเหตุใด

.....

2. 12 หาร 121 ลงตัวหรือไม่ เพราะเหตุใด

.....

3. -7 หาร 231 ลงตัวหรือไม่ เพราะเหตุใด

.....

4. 5 หาร -125 ลงตัวหรือไม่ เพราะเหตุใด

.....

5. -13 หาร 167 ลงตัวหรือไม่ เพราะเหตุใด

.....

6. 9 หาร 83 ลงตัวหรือไม่ เพราะเหตุใด

.....

7. 18 หาร 72 ลงตัวหรือไม่ เพราะเหตุใด

.....

2. คำชี้แจง: กำหนดให้ a, b, c, x และ y เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

1. จงพิสูจน์ว่า ถ้า a หาร b ลงตัว และ a หาร c ลงตัว แล้ว a หาร $b-c$ ลงตัว

พิสูจน์ ให้ $a|b$ และ $a|c$ [จะต้องแสดงให้ได้ว่า]]

จาก $a|b$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม ที่ทำให้ (1)

(.....)

จาก $a|c$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม ที่ทำให้ (2)

(.....)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ดังนั้น (.....)

3.จงพิสูจน์ว่า ถ้า a หาร $2x-3y$ ลงตัวและ a หาร $4x-5y$ ลงตัวแล้ว a หาร y ลงตัว

พิสูจน์

.....

.....

.....

.....

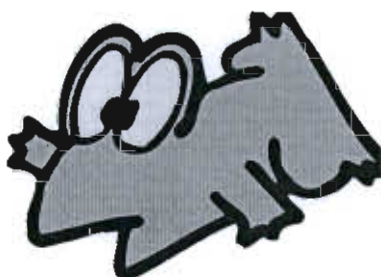
.....

.....

.....

.....

ดังนั้น (.....)



แบบประเมินพฤติกรรมการส่งการบ้านและไปกิจกรรมของนักเรียน

ที่	ชื่อ-นามสกุล	รายการประเมิน		
		ความรับผิดชอบ		
		2	1	0
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				

เกณฑ์การให้คะแนนคุณลักษณะ

คะแนน/ ความหมาย	คุณลักษณะที่ปรากฏให้เห็น
2/ ดี	ส่งงานก่อนหรือส่งตรงตามกำหนดเวลานัดหมาย
1/ พอใช้	ส่งงานช้ากว่ากำหนด
0/ ควรปรับปรุง	ไม่ส่งงาน

เฉลยใบกิจกรรมที่ 1, ใบกิจกรรมที่ 2 และแบบฝึกหัดที่ 1
ในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง การหารลงตัว

ใบกิจกรรมที่ 1

“เรื่อง บทนิยามของการหารลงตัว”

ชื่อ.....นามสกุล.....ชั้น ม.4/.....เลขที่.....

คำชี้แจง: จงพิจารณาคำสั่งในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) จากตารางจงพิจารณาว่า a หาร b ลงตัวหรือไม่ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบ

ข้อ	a	b	$a b$	แสดงเหตุผลประกอบ
1	2	6	✓	เนื่องจากมี 3 ซึ่งเป็นจำนวนเต็ม ($3 \in \mathbb{Z}$) ที่ทำให้ $6 = 2(3)$
2	4	15	✗	เนื่องจากไม่มีจำนวนเต็มใด ๆ คูณกับ 4 แล้วเท่ากับ 15
3	7	-28	✓	เนื่องจากมี -4 ซึ่งเป็นจำนวนเต็ม ($-4 \in \mathbb{Z}$) ที่ทำให้ $-28 = 7(-4)$
4	12	-60	✓	เนื่องจากมี -5 ซึ่งเป็นจำนวนเต็ม ($-5 \in \mathbb{Z}$) ที่ทำให้ $-60 = 12(-5)$
5	-5	-75	✓	เนื่องจากมี -15 ซึ่งเป็นจำนวนเต็ม ($-15 \in \mathbb{Z}$) ที่ทำให้ $-75 = 5(-15)$
6	-8	56	✓	เนื่องจากมี -7 ซึ่งเป็นจำนวนเต็ม ($-7 \in \mathbb{Z}$) ที่ทำให้ $56 = -8(-3)$
7	-6	-54	✓	เนื่องจากมี 9 ซึ่งเป็นจำนวนเต็ม ($9 \in \mathbb{Z}$) ที่ทำให้ $-54 = -6(9)$
8	9	46	✗	เนื่องจากไม่มีจำนวนเต็มใด ๆ คูณกับ 9 แล้วเท่ากับ 46
9	12	-110	✗	เนื่องจากไม่มีจำนวนเต็มใด ๆ คูณกับ 12 แล้วเท่ากับ -110
10	4	-37	✗	เนื่องจากไม่มีจำนวนเต็มใด ๆ คูณกับ 4 แล้วเท่ากับ -37
11	-5	-127	✗	เนื่องจากไม่มีจำนวนเต็มใด ๆ คูณกับ -5 แล้วเท่ากับ -27
12	-9	55	✗	เนื่องจากไม่มีจำนวนเต็มใด ๆ คูณกับ -9 แล้วเท่ากับ 55

จากตารางในข้อ 1 เมื่อนักเรียนพิจารณาการแสดงผลประกอบของแต่ละข้อแล้ว นักเรียนจงสร้างข้อคาดการณ์เพื่อสรุปความสัมพันธ์ของจำนวนเต็ม a และ b ที่หารลงตัวกัน

.....
ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ โดยที่ $b \neq 0$ จะได้ว่า b หาร a ลงตัว ก็ต่อเมื่อ มี
.....
จำนวนเต็ม c ที่ทำให้ $a = bc$ ใช้สัญลักษณ์ $b|a$ เรียกข้อความดังกล่าวว่า “นิยามการหารลงตัว”
.....

ใบกิจกรรมที่ 2

“เรื่อง การพิสูจน์ทฤษฎีบทของการหารลงตัว”

ชื่อ.....นามสกุล.....ชั้น ม.4/.....เลขที่.....

คำชี้แจง: จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

1. สำหรับจำนวนเต็มบวก a และ b ใดๆ ถ้า $a|b$ แล้ว $a \leq b$

พิสูจน์ ให้ $a, b \in \mathbb{Z}^+$ และ $a|b$ [จะต้องแสดงให้ได้ว่า $a \leq b$ ]

จาก $a|b$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม x ที่ทำให้ $b = ax$ (นิยามการหารลงตัว)

เนื่องจาก a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น x เป็นจำนวนเต็มบวก ฉะนั้น $x \geq 1$

จะได้ $ax \geq a$ (คูณด้วยจำนวนที่เท่ากันที่มากกว่าศูนย์)

ดังนั้น $b \geq a$ ($b = ax$ ))

2. สำหรับจำนวนเต็ม a, b และ c ใดๆ โดยที่ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ ถ้า $a|b$ และ $b|c$ แล้ว $a|c$

พิสูจน์ ให้ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $a|b$ และ $b|c$ จะต้องแสดงให้ได้ว่า $a|c$

จาก $a|b$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม x ที่ทำให้ $b = ax$ (1)

(จากนิยามของการหารลงตัว)

จาก $b|c$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม y ที่ทำให้ $c = by$ (2)

(จากนิยามของการหารลงตัว)

แทน (1) ใน (2) จะได้ $c = (ax)y$

$c = a(xy)$ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการคูณ
(.....)

เนื่องจาก $xy \in \mathbb{Z}$ (สมบัติปิดการคูณ)

ดังนั้น $a|c$ (นิยามการหารลงตัว)

3. สำหรับจำนวนเต็มบวก a, b และ c ใดๆ โดยที่ $a \neq 0$ ถ้า $a|b$ และ $a|c$ แล้ว

$$a|(b+c)$$

$a, b, c \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $a \neq 0$ ถ้า $a|b$ และ $a|c$
พิสูจน์ ให้ [จะต้องแสดงให้ได้ว่า $a|(b+c)$]

จาก $a|b$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม x ที่ทำให้ $b = ax$ (1)
(.....นियมการหารลงตัว.....)

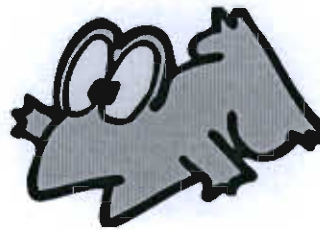
จาก $a|c$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม y ที่ทำให้ $c = ay$ (2)
(.....นियมการหารลงตัว.....)

นำ $(1)+(2)$ จะได้ $b+c = ax+ay$

$b+c = a(x+y)$ (.....สมบัติการแจกแจง.....)

เนื่องจาก $x+y \in \mathbb{Z}$ (.....สมบัติปิดการบวก.....)

ดังนั้น $a|(b+c)$ (.....นियมการหารลงตัว.....)



แบบฝึกหัดที่ 1

เรื่อง การหารลงตัว

ชื่อ.....นามสกุล.....ชั้น ม.4/.....เลขที่.....

1. คำชี้แจง: จากบทนิยามการหารลงตัว จงให้เหตุผลเพื่อสนับสนุนคำกล่าวต่อไปนี้

1. 8 หาร 48 ลงตัวหรือไม่ เพราะเหตุใด
 ลงตัว เพราะ เนื่องจากมี $6 \in z$ ที่ทำให้ $48 = 8(6)$

2. 12 หาร 121 ลงตัวหรือไม่ เพราะเหตุใด
 ไม่ลงตัว เนื่องจากไม่มีจำนวนเต็มใด ๆ คูณกับ 12 แล้วเท่ากับ 121

3. -7 หาร 231 ลงตัวหรือไม่ เพราะเหตุใด
 ลงตัว เพราะ เนื่องจากมี $-33 \in z$ ที่ทำให้ $231 = -7(-33)$

4. 5 หาร -125 ลงตัวหรือไม่ เพราะเหตุใด
 ลงตัว เพราะ เนื่องจากมี $-25 \in z$ ที่ทำให้ $-125 = 5(-25)$

5. -13 หาร 167 ลงตัวหรือไม่ เพราะเหตุใด
 ไม่ลงตัว เนื่องจากไม่มีจำนวนเต็มใด ๆ คูณกับ -13 แล้วเท่ากับ 167

6. 9 หาร 83 ลงตัวหรือไม่ เพราะเหตุใด
 ไม่ลงตัว เนื่องจากไม่มีจำนวนเต็มใด ๆ คูณกับ 9 แล้วเท่ากับ 83

7. 18 หาร 72 ลงตัวหรือไม่ เพราะเหตุใด
 ลงตัว เพราะ เนื่องจากมี $4 \in z$ ที่ทำให้ $72 = 4(18)$

2. คำชี้แจง: กำหนดให้ a, b, c, x และ y เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

1. จงพิสูจน์ว่า ถ้า a หาร b ลงตัว และ a หาร c ลงตัว แล้ว a หาร $b-c$ ลงตัว

พิสูจน์ ให้ $a|b$ และ $a|c$ [จะต้องแสดงให้ได้ว่า $a|(b-c)$]

จาก $a|b$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม x ที่ทำให้ $b = ax$ ----- (1)

(นิยามการหารลงตัว)

$$y \quad c = ay$$

จาก $a|c$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม ที่ทำให้ (2)
 (..... นียามการหารลงตัว.....)

นำ (1)+(2) จะได้ : $b+c = ax+ay$

$$b+c = a(x+y) \quad \text{สมบัติการแจกแจง}$$

เนื่องจาก $x+y \in \square$ สมบัติปิดการบวก

ดังนั้น $a|(b+c)$ (..... นียามการหารลงตัว.....)

3.จงพิสูจน์ว่า ถ้า a หาร $2x-3y$ ลงตัวและ a หาร $4x-5y$ ลงตัว แล้ว a หาร y ลงตัว

พิสูจน์ ให้ $a|(2x-3y)$ และ $a|(4x-5y)$ [จะแสดงให้ได้ว่า $a|y$]

จาก $a|(2x-3y)$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $2x-3y=ak$ (1) [นียามการหารลงตัว]

และ จาก $a|(4x-5y)$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม l ที่ทำให้ $4x-5y=al$ (2) [นียามการหารลงตัว]

$$\text{นำ } 2 \times (1); 4x-6y=2ak \quad \text{.....(3)}$$

$$\text{นำ } (3)-(2); 4x-6y-(4x-5y)=2ak-al \quad \text{.....(4)}$$

$$4x-6y-4x+5y = a(2k-l) \quad \text{สมบัติการแจกแจง}$$

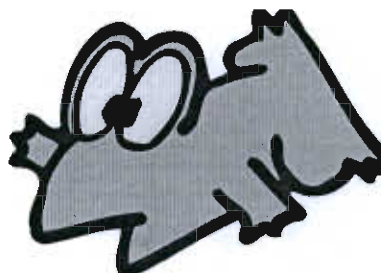
$$-y = a(2k-l) \quad \text{อินเวอร์สการบวก, สมบัติการบวกกลับจำนวนเต็ม}$$

นำ -1 คูณทั้งสองข้างของสมการ

$$\text{จะได้ } y = a(l-2k)$$

เนื่องจาก $l-2k \in \square$

ดังนั้น $a|(b-c)$ (..... นียามการหารลงตัว.....)



เฉลยแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสาร

ด้านการเขียนทางชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น

1. ให้ a , b และ c เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงแสดงว่า ถ้า $a|(b+c)$ และ $a|b$ แล้ว $a|c$

Proof: ให้ $a|(b+c)$ และ $a|b$ โดยที่ a , b และ c เป็นจำนวนเต็มใด ๆ [จะแสดงให้ได้ว่า $a|c$]

$$\text{จาก } a|(b+c) \text{ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม } k \text{ ที่ทำให้ } b+c = ak \quad \dots\dots\dots(1)$$

(นิยามการหารลงตัว)

$$\text{และจาก } a|b \text{ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม } l \text{ ที่ทำให้ } b = al \quad \dots\dots\dots(2)$$

(นิยามการหารลงตัว)

$$(1)-(2); \quad b+c-b = ak-al$$

$$c = ak-al \quad (\text{สมบัติการมีอินเวอร์สของการบวก})$$

$$c = a(k-l) \quad (\text{สมบัติการแจกแจง})$$

เนื่องจาก $k-l \in Z$ (สมบัติปิดการบวก)

ดังนั้น $a|c$ (นิยามการหารลงตัว)

2. ให้ a , b และ c เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงแสดงว่า ถ้า $a|(-4b+3c)$ และ $a|(3b-2c)$

แล้ว $a|b$

Proof: ให้ $a|(-4b+3c)$ และ $a|(3b-2c)$ โดยที่ a , b และ c เป็นจำนวนเต็มใด ๆ [จะแสดงให้ได้ว่า $a|b$]

$$\text{จาก } a|(-4b+3c) \text{ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม } k \text{ ที่ทำให้ } -4b+3c = ak \quad \dots\dots\dots(1)$$

(นิยามการหารลงตัว)

$$\text{และจาก } a|(3b-2c) \text{ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม } l \text{ ที่ทำให้ } 3b-2c = al \quad \dots\dots\dots(2)$$

(นิยามการหารลงตัว)

$$2 \times (1); \quad -8b + 6c = 2ak \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$3 \times (2); \quad 9b - 6c = 3al \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$(4) + (3); \quad (9b - 6c) + (-8b + 6c) = 3al + 2ak \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$9b - 6c - 8b + 6c = a(3l + 2k) \quad (\text{สมบัติการแจกแจง})$$

$$9b - 8b = a(3l + 2k) \quad (\text{สมบัติการมีอินเวอร์สของการบวก})$$

$$(9 - 8)b = a(3l + 2k) \quad (\text{สมบัติการแจกแจง})$$

$$b = a(3l + 2k) \quad (\text{การบวกลบจำนวนเต็ม})$$

เนื่องจาก $3l + 2k \in Z$ (สมบัติปิดการบวก)

ดังนั้น $a|b$ (นัยามการหารลงตัว)

3. ให้ b_1 และ b_2 เป็นจำนวนเต็มใดๆ ถ้า 5 หาร b_1 เหลือเศษ 4 และ 5 หาร b_2 เหลือเศษ 2

แล้ว 5 หาร $b_1 + b_2$ มีเศษเหลือเท่าใด

วิธีทำ ให้ 5 หาร b_1 เหลือเศษ 4 และ 5 หาร b_2 เหลือเศษ 2 โดยที่ b_1 และ b_2 เป็นจำนวนเต็มใดๆ

$$\text{จาก 5 หาร } b_1 \text{ เหลือเศษ 4 จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม } k \text{ ที่ทำให้ } b_1 = 5k + 4 \quad \dots\dots\dots(1)$$

(ขั้นตอนวิธีการหาร)

$$\text{จาก 5 หาร } b_2 \text{ เหลือเศษ 2 จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม } l \text{ ที่ทำให้ } b_2 = 5l + 2 \quad \dots\dots\dots(2)$$

(ขั้นตอนวิธีการหาร)

$$(1) + (2); \quad b_1 + b_2 = (5k + 4) + (5l + 2)$$

$$b_1 + b_2 = (5k + 5l) + (4 + 2) \quad (\text{สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการบวก})$$

$$b_1 + b_2 = (5k + 5l) + 6 \quad (\text{การบวกลบจำนวนเต็ม})$$

$$b_1 + b_2 = (5k + 5l) + (5 + 1) \quad (\text{สมบัติการเท่ากัน})$$

$$b_1 + b_2 = (5k + 5l + 5) + 1 \quad (\text{สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการบวก})$$

$$b_1 + b_2 = 5(k+l+1)+1 \quad (\text{สมบัติการแจกแจง})$$

เนื่องจาก $k+l+1 \in Z$ (สมบัติปิดการบวก)

ดังนั้น 5 หาร $b_1 + b_2$ มีเศษเหลือเท่ากับ 1 (ขั้นตอนวิธีการหาร)

4. จงพิสูจน์ว่าผลต่างของจำนวนคู่และจำนวนคู่เป็นจำนวนคู่

Proof: กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนคู่ใด ๆ [จะแสดงให้เห็นได้ว่า $a-b$ เป็นจำนวนคู่]

$$\text{จาก } a \text{ เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม } k \text{ ที่ทำให้ } a=2k \quad \dots\dots\dots(1)$$

(นิยามจำนวนคู่)

$$\text{จาก } b \text{ เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม } l \text{ ที่ทำให้ } b=2l \quad \dots\dots\dots(2)$$

(นิยามจำนวนคู่)

$$(1)-(2); \quad a-b = 2k - 2l$$

$$a-b = 2(k-l) \quad (\text{สมบัติการแจกแจง})$$

เนื่องจาก $k-l \in Z$ (สมบัติปิดการบวก)

ดังนั้น $a-b$ เป็นจำนวนคู่ (นิยามจำนวนคู่)

5. กำหนดให้ a เป็นจำนวนคู่ จงแสดงว่า $2|(a^3 - a)$

Proof: กำหนดให้ a เป็นจำนวนคู่ใด ๆ [จะแสดงให้เห็นได้ว่า $2|(a^3 - a)$]

$$\text{จาก } a \text{ เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม } k \text{ ที่ทำให้ } a=2k$$

$$\text{พิจารณา } a^3 - a = (2k)^3 - 2k \quad (\text{เพราะ } a=2k)$$

$$a^3 - a = 8k^3 - 2k \quad (\text{สมบัติของเลขยกกำลัง})$$

$$a^3 - a = 2(4k^3 - k) \quad (\text{สมบัติการแจกแจง})$$

เนื่องจาก $4k^3 - k \in Z$ (สมบัติปิดการบวก, สมบัติปิดการคูณ)

ดังนั้น $2|(a^3 - a)$ (นิยามการหารลงตัว)

6. จงหาจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดที่หาร 56 และ 94 แล้วมีเศษเหลือเท่ากัน

วิธีทำ ให้ x เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดที่หาร 56 และ 94 แล้วมีเศษเหลือ r

$$\text{จาก } x \text{ หาร } 56 \text{ เหลือเศษ } r \text{ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม } k \text{ ที่ทำให้ } 56 = xk + r \quad \dots\dots(1)$$

(นิยามขั้นตอนวิธีการหาร)

$$\text{จาก } x \text{ หาร } 94 \text{ เหลือเศษ } r \text{ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม } l \text{ ที่ทำให้ } 94 = xl + r \quad \dots\dots(2)$$

(นิยามขั้นตอนวิธีการหาร)

$$(2) - (1); \quad 94 - 56 = xk - xl$$

$$38 = x(k-l) \quad (\text{สมบัติการแจกแจง})$$

เนื่องจาก $k-l \in Z$ (สมบัติปิดการบวก)

$$\therefore x | 38 \text{ (นियามการหารลงตัว)}$$

$$\text{ดังนั้น } x = 38 \quad (\text{เนื่องจาก } x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุด})$$

7. ถ้า $a|c$ และ $b|c$ และ $(a,b)=1$ จงแสดงว่า $ab|c$

Proof: กำหนดให้ $a|c, b|c$ และ $(a,b)=1$ [จะแสดงให้ได้ว่า $ab|c$]

$$\text{จาก } a|c \text{ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม } k \text{ ที่ทำให้ } c = ak \quad \dots\dots(1)$$

(นิยามการหารลงตัว)

$$\text{จาก } b|c \text{ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม } l \text{ ที่ทำให้ } c = bl \quad \dots\dots(2)$$

(นิยามการหารลงตัว)

$$\text{จาก } (a,b)=1 \text{ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม } x \text{ และ } y \text{ ที่ทำให้ } ax + by = 1 \quad \dots\dots(3)$$

(นิยามจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์)

$$(1) \times c; \quad axc + byc = c \quad \dots\dots(4)$$

$$\text{จาก (1), (2) และ (4) จะได้ } ax(bl) + by(ak) = c$$

$$ab(xl) + ab(yk) = c \quad (\text{สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการคูณ})$$

$$ab(xl + yk) = c \quad (\text{สมบัติการแจกแจง})$$

เนื่องจาก $xl + yk \in Z$ (สมบัติปิดการบวก, สมบัติปิดการคูณ)

ดังนั้น $ab | c$ (นियามการหารลงตัว)

8. ให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงแสดงว่า $2a$ และ $2a+1$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

Proof: กำหนดให้ $d = (2a, 2a+1)$ [จะแสดงให้ได้ว่า $d = 1$]

จาก $d = (2a, 2a+1)$ จะได้ว่า $d | 2a$ และ $d | 2a+1$ (นิยามของตัวหารร่วมมาก)

จากทฤษฎีบทจะได้ $d | 2a+1 - 2a$

ดังนั้น $d | 1$

นั่นคือ $d = 1$ (เนื่องจาก d เป็นจำนวนเต็มบวก)

9. จงหาจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยที่สุดที่หารด้วย 3, 6 และ 9 แล้ว มีเศษเหลือเป็น 2, 5 และ 8 ตามลำดับ

วิธีทำ ให้ x เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยที่สุดที่หารด้วย 3, 6 และ 9 แล้ว มีเศษเหลือเป็น 2, 5 และ 8 ตามลำดับ

จาก x หารด้วย 3 เหลือเศษ 2 จะได้ว่า $3 | x+1$ (1) (นियามการหารลงตัว)

จาก x หารด้วย 6 เหลือเศษ 5 จะได้ว่า $6 | x+1$ (2) (นियามการหารลงตัว)

และ x หารด้วย 9 เหลือเศษ 8 จะได้ว่า $9 | x+1$ (3) (นियามการหารลงตัว)

จาก (1), (2) และ (3) จะได้ว่า $x+1$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยที่สุดที่หารด้วย 3, 6 และ 9 ลงตัว

เนื่องจาก จำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยที่สุดที่หารด้วย 3, 6 และ 9 ลงตัว คือ 18

จะได้ว่า $x+1 = 18$

ดังนั้น $x+1+(-1)=18+(-1)$ (สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน)

$$x = 17 \quad (\text{สมบัติอินเวอร์สการบวก, การบวกจำนวนเต็ม})$$

\therefore จำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยที่สุดที่หารด้วย 3, 6 และ 9 แล้ว มีเศษเหลือเป็น 2, 5 และ 8 ตามลำดับ คือ 17

10. จงหา $[a, 60]$ เมื่อ $(a, 28) = 4$ และ $[a, 28] = 140$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว $ab = (a, b)[a, b]$

$$\text{จะได้ว่า } a \times 28 = 4 \times 140$$

$$a \times 28 \times \frac{1}{28} = 4 \times 140 \times \frac{1}{28} \quad (\text{สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน})$$

$$a = 20 \quad (\text{สมบัติอินเวอร์สการคูณ, การคูณและการหารจำนวนเต็ม})$$

$$\text{พิจารณา } [a, 60] = [20, 60] = 60$$

$$\text{ดังนั้น } [a, 60] = 60$$

ภาคผนวก ค

- ค่าดัชนีความสอดคล้องของแผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์
- ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผล และสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์
- ความยากง่าย ค่าอำนาจจำแนก และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนคณิตศาสตร์
- คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
- คะแนนความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนคณิตศาสตร์

ตารางที่ 18 ค่าดัชนีความสอดคล้องของแผนการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัย
 วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

แผนที่	คะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ					IOC
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	คนที่ 4	คนที่ 5	
1	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
2	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
3	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
4	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
5	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
6	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
7	+1	+1	+1	+1	+1	1.00

ตารางที่ 19 ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถ
 ในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ด้านการเขียน เรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ของนักเรียน
 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยและนิรนัย

ข้อที่	คะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ					IOC
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	คนที่ 4	คนที่ 5	
1	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
2	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
3	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
4	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
5	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
6	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
7	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
8	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
9	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
10	+1	+1	+1	+1	+1	1.00

ตารางที่ 20 ค่าความยากง่าย ค่าอำนาจจำแนก และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนเรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ข้อที่	ค่าความยากง่าย	ค่าอำนาจจำแนก
1	0.78	0.38
2	0.63	0.53
3	0.61	0.32
4	0.49	0.65
5	0.75	0.32
6	0.47	0.70
7	0.48	0.76
8	0.48	0.62
9	0.33	0.58
10	0.55	0.85
ความเชื่อมั่นของข้อสอบ 0.84		

ตารางที่ 21 คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนเรื่อง ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

คนที่	คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ (คะแนนเต็ม 40 คะแนน)	คะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน (คะแนนเต็ม 20 คะแนน)	รวม
1	25	16	41
2	36	19	55
3	30	17	47
4	39	19	58
5	36	17	53
6	8	7	15

ตารางที่ 21 (ต่อ)

คนที่	คะแนนความสามารถในการให้ เหตุผลทางคณิตศาสตร์ (คะแนนเต็ม 40 คะแนน)	คะแนนความสามารถในการสื่อสาร ทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน (คะแนนเต็ม 20 คะแนน)	รวม
7	37	18	55
8	39	20	59
9	38	18	56
10	38	19	57
11	27	14	41
12	35	19	54
13	35	18	53
14	24	15	39
15	38	20	58
16	38	18	56
17	40	20	60
18	39	20	59
19	37	19	56
20	30	16	46
21	31	15	46
22	38	20	58
23	33	17	50
24	30	17	47
25	37	19	56
26	39	19	58
27	32	16	48
28	29	16	45
29	38	19	57
30	30	19	49

ตารางที่ 21 (ต่อ)

คนที่	คะแนนความสามารถในการให้ เหตุผลทางคณิตศาสตร์ (คะแนนเต็ม 40 คะแนน)	คะแนนความสามารถในการสื่อสาร ทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน (คะแนนเต็ม 20 คะแนน)	รวม
31	19	11	30
32	30	16	46
33	35	17	52
34	39	20	59
35	18	12	30
36	24	15	39
37	30	17	47
38	39	20	59
39	35	16	51
40	19	11	30
41	27	12	39
42	31	14	45
43	39	19	58
44	38	19	57
รวม	1429	745	2174
คะแนน เฉลี่ย	32.45	16.93	49.40
ร้อยละ	81.19	84.65	82.34

ภาคผนวก ง

- ผลการวิเคราะห์ข้อมูลของการวิจัยโดยใช้โปรแกรม spss

1. ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการให้เหตุผล ทางคณิตศาสตร์จากการทำแบบทดสอบ

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Reasoning	44	32.4773	7.09565	1.06971

One-Sample Test

	Test Value = 28					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
Reasoning	4.186	43	.000	4.47727	2.3200	6.6345

2. ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการสื่อสารด้านการเขียนทางคณิตศาสตร์จากการทำแบบทดสอบ

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Communication	44	16.9318	2.92859	.44150

One-Sample Test

	Test Value = 14					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
Communication	6.641	43	.000	2.93182	2.0414	3.8222

ภาคผนวก ง

- ตัวอย่างการทำใบกิจกรรมและการทำแบบฝึกหัดของนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

ใบกิจกรรมที่ 1

“เรื่อง บทนิยามของการหารลงตัว”

ชื่อ น.ส. อรุณรัตน์ นามสกุล ชัยศิริ ชั้น ม.4/ A เลขที่ ๖A

คำชี้แจง: จงพิจารณาคำสั่งในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) จากตารางพิจารณาว่า a หาร b ลงตัวหรือไม่ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบ
(a หาร b ลงตัว)

ข้อ	a	b	$a b$	แสดงเหตุผลประกอบ
1	2	6	✓	เนื่องจากมี $3 \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $6 = 2(3)$
2	4	15	✗	เนื่องจากไม่มีจำนวนเต็มใด ๆ คูณกับ 4 แล้วเท่ากับ 15
3	7	-28	/	ห้ยกทำให้ $-4 \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $-28 = 7(-4)$
4	12	-60	/	ห้ยกทำให้ $-5 \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $-60 = 12(-5)$
5	-5	-75	/	ห้ยกทำให้ $15 \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $-75 = 5(-15)$
6	-8	56	/	ห้ยกทำให้ $-7 \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $56 = -8(-7)$
7	-6	-54	/	ห้ยกทำให้ $9 \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $-54 = -6(9)$
8	9	46	X	ห้ยกทำให้ไม่มีจำนวนเต็มใด ๆ คูณกับ 9 แล้วเท่ากับ 46
9	12	-110	X	ห้ยกทำให้ไม่มีจำนวนเต็มใด ๆ คูณกับ 12 แล้วเท่ากับ -110
10	4	-37	X	ห้ยกทำให้ไม่มีจำนวนเต็มใด ๆ คูณกับ 4 แล้วเท่ากับ -37
11	-5	-127	X	ห้ยกทำให้ไม่มีจำนวนเต็มใด ๆ คูณกับ -5 แล้วเท่ากับ -127
12	-9	55	X	ห้ยกทำให้ไม่มีจำนวนเต็มใด ๆ คูณกับ -9 แล้วเท่ากับ 55

จากตารางในข้อ 1 เมื่อนักเรียนพิจารณาการแสดงเหตุผลประกอบของแต่ละข้อแล้ว นักเรียนจงสร้างข้อคาดการณ์เพื่อสรุปความสัมพันธ์ของการหารลงตัว

ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม a หาร b ลงตัว ($a|b$) ให้ c เป็นจำนวนเต็ม
~~ห้ยกทำให้ b หาร a ลงตัว~~

ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ $a|b$ ถ้า c เป็นจำนวนเต็ม C
 ห้ยกทำให้ $b \cdot ac$ (ให้ยกจากกรณีตัวอย่าง ข้ามมากรณีอื่น)

ใบกิจกรรมที่ 2

“เรื่อง การพิสูจน์ทฤษฎีบทของการหารลงตัว”

ชื่อ...ห.ศ. ศศิภา.....นามสกุล...ทับไทร.....ชั้น...ม.4/4.....เลขที่...93.....

คำชี้แจง: จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

1. สำหรับจำนวนเต็มบวก a และ b ใดๆ ถ้า $a|b$ แล้ว $a \leq b$ (p → q)

พิสูจน์ ให้ $a, b \in \mathbb{Z}^+$ และ $a|b$ [จะต้องแสดงให้ได้ว่า $a \leq b$]

จาก $a|b$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม x ที่ทำให้ $b = ax$ (นิยามของการหาร)

เนื่องจาก a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น x เป็นจำนวนเต็มบวก ฉะนั้น $x \geq 1$ จำนวนเต็มบวก

จะได้ $ax \geq a$ (..... $a \in \mathbb{Z}^+$)

ดังนั้น $b \geq a$ (..... $b = ax$)

2. สำหรับจำนวนเต็ม a, b และ c ใดๆ โดยที่ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ ถ้า $a|b$ และ $b|c$ แล้ว $a|c$

พิสูจน์ ให้ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $a|b$ และ $b|c$ จะต้องแสดงให้ได้ว่า $a|c$ = $c = \square a$

จาก $a|b$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม x ที่ทำให้ $b = ax$ (นิยามของการหาร) (1)

(จากนิยามของการหารลงตัว)

จาก $b|c$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม y ที่ทำให้ $c = by$ (2) เหมือนกัน

(จากนิยามของการหารลงตัว)

$c = by = ax \cdot y = a(xy)$

(แทน หค)
 แทน (1) ใน (2) จะได้ $b = ax$
 $c = (ax)y$ (..... X)
 $c = a(xy)$ (เป็นผลคูณสามคน)
 เนื่องจาก $xy \in \mathbb{Z}$ (สมบัติปิดการคูณ)
 ดังนั้น $a|c$ (นิยามการหารลงตัว)

3. สำหรับจำนวนเต็มบวก a, b และ c ใดๆ โดยที่ $a \neq 0$ ถ้า $a|b$ และ $a|c$ แล้ว
 $a|(b+c)$ $b+c \cdot \square^e a^e$
 พิสูจน์ ให้ $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ โดยที่ $a \neq 0$ กก. $a|b$ กก. $a|c$ [จะต้องแสดงให้ได้ว่า $a|(b+c)$]

จาก $a|b$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม x ที่ทำให้ $b = ax$ (1)
 (...นิยามการหารลงตัว...)

จาก $a|c$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม y ที่ทำให้ $c = ay$ (2)
 (...นิยามการหารลงตัว...)

นำ (1) + (2) จะได้ $b+c = ax + ay$ (..... X)
 $b+c = a(x+y)$ (สมบัติการแจกแจง)
 เนื่องจาก $x+y \in \mathbb{Z}$ (สมบัติปิดการบวก)

ดังนั้น $a|(b+c)$ (นิยามการหารลงตัว)



แบบฝึกหัดที่ 1

เรื่อง การหารลงตัว

ชื่อ...หิสาภรณ์.....นามสกุล...หิมส์ดี.....ชั้น ม.4/ 4 เลขที่...13.....

1. คำชี้แจง: จากบทนิยามการหารลงตัว จงให้เหตุผลเพื่อสนับสนุนคำกล่าวต่อไปนี้

1. 8 หาร 48 ลงตัวหรือไม่เพราะเหตุใด
 ลงตัว เพราะ: $48 \div 8 = 6$ ที่ทำให้ $48 = 8(6)$
2. 12 หาร 121 ลงตัวหรือไม่เพราะเหตุใด
 ไม่ลงตัว เพราะ: เมื่อหารไม่ลงตัวลงตัวลงตัวลงตัว...ลงตัว 12 แต่ลงตัว 121.....
3. -7 หาร 231 ลงตัวหรือไม่เพราะเหตุใด
 ลงตัว เพราะ: $231 \div (-7) = -33$ ที่ทำให้ $231 = -7(-33)$
4. 5 หาร -125 ลงตัวหรือไม่เพราะเหตุใด
 ลงตัว เพราะ: $-125 \div 5 = -25$ ที่ทำให้ $-125 = 5(-25)$
5. -13 หาร 167 ลงตัวหรือไม่เพราะเหตุใด
 ไม่ลงตัว เพราะ: เมื่อหารไม่ลงตัวลงตัวลงตัว...ลงตัว -13 แต่ลงตัว 167.....
6. 9 หาร 83 ลงตัวหรือไม่เพราะเหตุใด
 ไม่ลงตัว เพราะ: เมื่อหารไม่ลงตัวลงตัวลงตัว...ลงตัว 9 แต่ลงตัว 83.....
7. 18 หาร 72 ลงตัวหรือไม่เพราะเหตุใด
 ลงตัว เพราะ: $72 \div 18 = 4$ ที่ทำให้ $72 = 18(4)$

2. คำชี้แจง: กำหนดให้ a, b, c, x และ y เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

1. จงพิสูจน์ว่า ถ้า a หาร b ลงตัว และ a หาร c ลงตัว แล้ว a หาร $b-c$ ลงตัว

พิสูจน์ ให้ $a|b$ และ $a|c$ [จะต้องแสดงให้ได้ว่า $a|(b-c)$]

จาก $a|b$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม x ... ที่ทำให้ $b = ax$ (1)
(ให้ช้ชามการนวลเลขตัว.....)

จาก $a|c$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม y ... ที่ทำให้ $c = ay$ (2)
(ให้ช้ชามการนวลเลขตัว.....)

ช้ว่า (1)-(2) จะได้ ; $b-c = ax - ay$
 $= a(x-y)$ (สมบ้กคทแหกนวล)
 ให้งวาก $x-y$ e z (สมบ้กบ้ดกานนวล)

ค้งน้ัน $a|(b-c)$ (ให้ช้ชามการนวลเลขตัว.....)

3. จงพิสูจน์ว่า ถ้า a หาร $2x-3y$ ลงตัว และ a หาร $4x-5y$ ลงตัว แล้ว a หาร y ลงตัว

พิสูจน์ ให้ $a \mid (2x-3y)$ และ $a \mid (4x-5y)$ [จะแสดงให้ได้ว่า $a \mid y$]

1) $a \mid (2x-3y)$ จะได้มีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $(2x-3y) = ak$ - ① (สมมติการหารลงตัว)

2) $a \mid (4x-5y)$ จะได้มีจำนวนเต็ม l ที่ทำให้ $(4x-5y) = al$ - ② (สมมติการหารลงตัว)

2x ①: $4x-6y = 2ak$ - ③ (คูณทั้ง 2 ด้านด้วย 2)

③ - ②: $(4x-6y) - (4x-5y) = 2ak - al$

$$4x-6y-4x+5y = a(2k-l) \quad (\text{สมมติการหารลงตัว})$$

$$-y = a(2k-l) \quad (\text{สมมติการหารลงตัว, การแบ่งสมการใหม่})$$

ห้ $y = a(2k-l)$

$$y = a(2k-l)$$

เนื่องจาก $2k-l \in \mathbb{Z}$ (สมมติการหารลงตัว)

$\therefore a \mid y$ (สมมติการหารลงตัว)

ดังนั้น $a \mid y$ (สมมติการหารลงตัว)

