บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีต่าง ๆ ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีบูตสแตรป (Bootstrap) วิธีบูตสแตรปที (Bootstrap-t) และ วิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับสัมประสิทธิ์การแปรผันควอร์ไทล์ด้วยวิธีของ Bonett (2006) รวมทั้งงานวิจัยที่เกี่ยวข้องที่ศึกษาเกี่ยวกับการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วง เมื่อข้อมูลของประชากรไม่มีการแจกแจงปรกติและการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีบูตสแตรป นอกจากนี้ยังอธิบายถึงหลักเกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของช่วงความเชื่อมั่น ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

การประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation)

การประมาณค่าแบบช่วงเป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ของประชากร θ ด้วยค่าจาก 2 ค่า ได้แก่ ค่าประมาณ a และค่าประมาณ b จากข้อมูลตัวอย่างสุ่มค่าที่ได้จะครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ด้วยความน่าจะเป็น $1-\alpha$ ดังนั้น

$$P(a<\theta<b)=1-\alpha$$

เมื่อ $0\leq\alpha\leq 1$ ดังนั้น α คือความน่าจะเป็นที่ช่วงความเชื่อมั่นที่ประมาณได้จะไม่ครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ θ ที่ต้องการประมาณ ช่วง (a,b) เรียกว่า ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ θ ค่าของ a และ b เรียกว่าขีดจำกัดความเชื่อมั่นด้านล่าง (Lower Confidence Limit) และขีดจำกัดความเชื่อมั่นด้านบน (Upper Confidence Limit) ตามลำดับ และ $1-\alpha$ คือ สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (Confidence Coefficint) ค่าประมาณ a และค่าประมาณ b ที่ได้ขึ้นอยู่กับการแจกแจงของตัวประมาณค่าแบบจุดของพารามิเตอร์ θ เช่น การประมาณค่าแบบช่วงของพารามิเตอร์ μ ด้วยค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง $(\bar{x})$ ที่มีการแจกแจงปรกติ เป็นต้น ในกรณีที่ไม่ทราบลักษณะการแจกแจงของตัวประมาณค่าแบบจุดของพารามิเตอร์ θ การประมาณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์โดยใช้การแจกแจงปรกตินั้นไม่มีความเหมาะสม ซึ่งวิธีบูตสแตรปทีที่เสนอโดย Efron and Tibshirani (1994) เป็นวิธีหนึ่งที่นิยมนำมาใช้ในการหาลักษณะการแจกแจงของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์

แบบจุดของพารามิเตอร์ θ ซึ่งใช้ในการประมาณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ θ ที่ต้องการประมาณ

สัมประสิทธิ์การแปรผันควอร์ไทล์ (Coefficient of Quartile Variation หรือ CQV)

สัมประสิทธิ์การแปรผันควอร์ไทล์คือค่าวัดการกระจายที่ใช้เปรียบเทียบการกระจายของข้อมูลตั้งแต่สองชุดขึ้นไปหากข้อมูลชุดใดมีค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันควอร์ไทล์สูงกว่าแสดงว่าข้อมูลชุดนั้นมีการกระจายมากกว่า สัมประสิทธิ์การแปรผันควอร์ไทล์คำนวณได้ ดังนี้

$$CQV = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \qquad (1)$$

เมื่อ

Q_1 คือ ควอร์ไทล์ที่ 1 หรือ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 ของข้อมูลประชากร

Q_3 คือ ควอร์ไทล์ที่ 3 หรือ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75 ของข้อมูลประชากร

การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วง

1. วิธีบูตสแตรปเปอร์เซ็นต์ไทล์

Efron and Tibshirani (1994) ได้เสนอวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่เรียกว่า วิธีบูตสแตรป ซึ่งวิธีบูตสแตรปเป็นวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับข้อมูลเชิงปริมาณ โดยใช้การสุ่มตัวอย่างซ้ำซึ่งเป็นการสร้างตัวอย่างสุ่มชุดใหม่จากตัวอย่างสุ่มที่มีเพียงชุดเดียวด้วยการสุ่มแบบคืนที่ ในกรณีที่ไม่ทราบลักษณะการแจกแจงของประชากรหรือประชากรไม่มีการแจกแจงปรกติ วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีบูตแสตรปมีความเหมาะสมเนื่องจากวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีบูตแสตรป เป็นวิธีการหาตัวประมาณค่าด้วยวิธีสถิติศาสตร์ไม่อิงพารามิเตอร์ (Nonparammatric Statistics) ที่ไม่มีข้อจำกัดเกี่ยวกับลักษณะการแจกแจงของประชากร โดยวิธีดำเนินการเป็นดังนี้

กำหนดให้ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n ที่เป็นอิสระกันจากประชากรที่มีการแจกแจง $f(y;\theta)$ และให้ θ เป็นพารามิเตอร์ที่ต้องการประมาณค่าและ $\hat{\theta}_B$ เป็นตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ θ ด้วยวิธีบูตสแตรป ซึ่งหาได้จากการสุ่มตัวอย่างครั้งละ 1 หน่วยตัวอย่าง จำนวน n ครั้ง จากชุดตัวอย่าง $y_1, y_2, \ldots, y_n$ โดยค่าที่ได้จะคืนกลับไปในชุดตัวอย่างก่อนที่จะสุ่มครั้งต่อไป ให้ $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*$ เป็นชุดตัวอย่างขนาด n ที่ได้จากวิธีบูตสแตรป

ซึ่งค่าประมาณของพารามิเตอร์ด้วยวิธีบูตสแตรป หาได้จากการสุ่มตัวอย่างดังกล่าวซ้ำจำนวน B ครั้ง ได้ค่าประมาณของ θ จำนวน B ค่า คือ $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \ldots, \hat{\theta}_B^*$ ให้ $\hat{\theta}_B$ เป็นตัวประมาณค่าแบบจุดของพารามิเตอร์ θ ดังนี้

$$\hat{\theta}_B = \frac{\sum_{i=1}^{B} \hat{\theta}_i^*}{B}$$

ในการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ θ ด้วยวิธีบูตสแตรปเปอร์เซ็นต์ไทล์ เมื่อสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นเท่ากับ $1-\alpha$ ทำได้โดย นำค่า $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \ldots, \hat{\theta}_B^*$ มาเรียงลำดับจากน้อยไปหามาก จากนั้นหาค่าควอนไทล์ที่ $\alpha/2$ และ $1-\alpha/2$ ของ $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \ldots, \hat{\theta}_B^*$ ที่เรียงลำดับแล้ว กำหนดให้เป็น $\hat{\theta}_{Bl}$ และ $\hat{\theta}_{BU}$ ตามลำดับ

ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ สำหรับพารามิเตอร์ θ ที่ประมาณด้วยวิธีบูตสแตรปเปอร์เซ็นต์ไทล์ คือ

$$(\hat{\theta}_{BL}, \hat{\theta}_{BU})$$

โดยที่ $\hat{\theta}_{Bl}$ คือ ขีดจำกัดความเชื่อมั่นด้านล่าง

$\hat{\theta}_{Bl}$ คือ ขีดจำเกัดความเชื่อมั่นด้านบน

2. วิธีบูตสแตรป Z

Efron and Tibshirani (1994)ได้เสนอวิธีบูตสแตรป Z ซึ่งคือวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ θ ที่ได้พัฒนาจากวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ θ แบบช่วงด้วยวิธีบูตสแตรปเปอร์เซ็นต์ไทล์ โดยการประมาณค่าคลาดเคลื่อนมาตรฐานของตัวประมาณค่าแบบจุดของพารามิเตอร์ θ โดยมีข้อสมมุติว่าตัวประมาณค่าแบบจุดของพารามิเตอร์ θ ด้วยวิธีบูตสแตรป $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \ldots, \hat{\theta}_B^*$ จะมีการแจกแจงปรกติ เมื่อมีการสุ่มซ้ำหลาย ๆ ครั้ง หรือ B มีขนาดใหญ่

เมื่อทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีบูตสแตรปจำนวน B ครั้ง จะประมาณค่าคลาดเคลื่อนมาตรฐานของตัวประมาณค่าแบบจุดของพารามิเตอร์ θ ได้ดังนี้

$$\hat{\theta}_B = \frac{\sum_{i=1}^{B} \hat{\theta}_i^*}{B}, \quad S(\hat{\theta}^*) = \sqrt{\frac{1}{B-1}\sum_{i=1}^{B} (\hat{\theta}_i^* - \hat{\theta}_B)^2}$$

โดยที่ $\hat{\theta}_i^*$ คือ ค่าประมาณของพารามิเตอร์ θ ที่ได้จากตัวอย่างบูตสแตรป ในการสุ่มครั้งที่ i โดย $i = 1, 2, \ldots, B$

$\hat{\theta}_B$ คือ ค่าประมาณของพารามิเตอร์ θ ด้วยวิธีบูตสแตรป

$S(\hat{\theta}^*)$ คือ ค่าประมาณค่าคลาดเคลื่อนมาตรฐานของตัวอย่างบูตสแตรป

ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ θ ด้วยวิธีบูตสแตรป Z คือ

$$(\hat{\theta}_B - z_{1-\frac{\alpha}{2}} S(\hat{\theta}^*), \hat{\theta}_B + z_{1-\frac{\alpha}{2}} S(\hat{\theta}^*)) \tag{2}$$

โดยที่ $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ คือ ค่าควอนไทล์ที่ $1-\alpha/2$ ของการแจกแจงปรกติมาตรฐาน

3. วิธีบูตสแตรปที

Efron and Tibshirani (1994) ได้เสนอวิธีบูตสแตรปทีซึ่งวิธีดังกล่าวนี้คือวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ θ ที่ได้พัฒนาจากวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ θ แบบช่วงด้วยวิธีบูตสแตรป Z จากสมมติฐานที่ว่าเมื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ θ แบบจุดด้วยวิธีบูตสแตรปหลาย ๆ ครั้งตัวประมาณค่าแบบจุดของพารามิเตอร์ θ ด้วยวิธีบูตสแตรป จะมีการแจกแจงปรกติ แต่ถ้าตัวประมาณค่าแบบจุดของพารามิเตอร์ θ ด้วยวิธีบูตสแตรป ไม่มีการแจกแจงปรกติ จะประมาณการแจกแจงตัวประมาณค่าแบบจุดของพารามิเตอร์ θ ด้วยวิธีบูตสแตรปโดยประมาณตัวสถิติ t_i^* ดังนี้

เมื่อทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีบูตสแตรปจำนวน B ครั้ง หาตัวสถิติทีด้วยวิธีบูตสแตรป คือ

$$t_i^* = \frac{\hat{\theta}_i^* - \hat{\theta}_B}{S(\hat{\theta}^*)} \tag{3}$$

โดยที่ $$\hat{\theta}_B = \frac{\sum_{i=1}^{B} \hat{\theta}_i^*}{B}, \quad S(\hat{\theta}^*) = \sqrt{\frac{1}{B-1}\sum_{i=1}^{B} (\hat{\theta}_i^* - \hat{\theta}_B)^2}$$

โดยที่ t_i^* คือ ตัวสถิติทีของตัวอย่างบูตสแตรปในการสุ่มครั้งที่ i โดย $i = 1, 2, \ldots, B$

$\hat{\theta}_i^*$ คือ ค่าประมาณของพารามิเตอร์ θ ที่ได้จากตัวอย่างบูตสแตรป ในการสุ่มครั้งที่ i โดย $i = 1, 2, \ldots, B$

$\hat{\theta}_B$ คือ ค่าประมาณของพารามิเตอร์ θ ด้วยวิธีบูตสแตรป

$S(\hat{\theta}^*)$ คือ ค่าประมาณค่าคลาดเคลื่อนมาตรฐานของตัวอย่างบูตสแตรป

ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ θ ด้วยวิธีบูตสแตรปที คือ

$$(\hat{\theta}_B - t^*_{1-\frac{\alpha}{2}} S(\hat{\theta}^*), \hat{\theta}_B + t^*_{1-\frac{\alpha}{2}} S(\hat{\theta}^*)) \tag{4}$$

โดยที่ $t^*_{1-\alpha/2}$ คือ ค่าควอนไทล์ที่ $1-\alpha/2$ ของ t^*_i

$\hat{\theta}_B$ คือ ค่าประมาณของพารามิเตอร์ θ ด้วยวิธีบูตสแตรป

$S(\hat{\theta}^*)$ คือ ค่าประมาณค่าคลาดเคลื่อนมาตรฐานของตัวอย่างบูตสแตรป

การประมาณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับสัมประสิทธิ์การแปรผันควอร์ไทล์

Bonett (2006a) ได้เสนอช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ สำหรับสัมประสิทธิ์การแปรผันควอร์ไทล์ ดังนี้

$$\left(\exp\left\{\log(D/S)r - z_{1-\alpha/2}v^{1/2}\right\}, \exp\left\{\log(D/S)r + z_{1-\alpha/2}v^{1/2}\right\}\right) \tag{5}$$

เมื่อ $r = n/(n-1)$, $D = \hat{Q}_3 - \hat{Q}_1$ และ $S = \hat{Q}_3 + \hat{Q}_1$

โดยที่

$\hat{Q}_1$ คือ ค่าประมาณของค่าควอร์ไทล์ที่ 1 หรือ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 ของข้อมูล

$\hat{Q}_3$ คือ ค่าประมาณของค่าควอร์ไทล์ที่ 3 หรือ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75 ของข้อมูล

$z_{1-\alpha/2}$ คือ ค่าควอนไทล์ที่ $1-\alpha/2$ ของการแจกแจงปรกติมาตรฐาน

v คือ ตัวประมาณค่าความแปรปรวนของ $\log(D/S)$ คำนวณได้ดังนี้

$$v = (1/16n)\left\{\left(\frac{3}{\hat{f}_1^2} + \frac{3}{\hat{f}_3^2} - \frac{2}{\hat{f}_1\hat{f}_3}\right)/D^2 + \left(\frac{3}{\hat{f}_1^2} + \frac{3}{\hat{f}_3^2} + \frac{2}{\hat{f}_1\hat{f}_3}\right)/S^2 - 2\left(\frac{3}{\hat{f}_3^2} - \frac{3}{\hat{f}_1^2}\right)/DS\right\}$$

โดยที่ $\hat{f}_1$ และ $\hat{f}_3$ คือตัวประมาณค่าของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของตัวประมาณค่าควอร์ไทล์ที่ 1 และควอร์ไทล์ที่ 3 ตามลำดับ ซึ่งคำนวณได้ดังนี้

$$\hat{f}_1^2 = 3(z_{1-\alpha^*/2})^2/\left\{4n(Y_{(b)} - Y_{(a)})^2\right\}$$
$$\hat{f}_3^2 = 3(z_{1-\alpha^*/2})^2/\left\{4n(Y_{(d)} - Y_{(c)})^2\right\}$$

$z_{1-\alpha^*/2}$ คือ ค่าควอนไทล์ที่ $1-\alpha^*/2$ ของการแจกแจงปรกติมาตรฐาน

โดยที่ $\alpha^* = \alpha$ เมื่อ $n \geq 30$

และ $\alpha^* = 1 - \sum_{i=a}^{n-1}\binom{n}{i}(1/4)^i(3/4)^{n-i}$ เมื่อ $n < 30$

เมื่อ $Y_{(j)}$ เป็นสถิติเชิงอันดับที่ j เมื่อ $j = a,b,c,d$ โดย $Y_{(j)} \geq 0$

โดยที่ $a = n/4 - z_{1-\alpha/2}(3n/16)^{1/2}$

$b = n/4 + z_{1-\alpha/2}(3n/16)^{1/2}$

$c = n+1-b$, $d = n+1-a$

ซึ่งค่า a,b,c และ d จะเป็นจำนวนเต็มด้วยการปัดเศษขึ้น โดยที่ $a \geq 1$

การแจกแจงความน่าจะเป็นของประชากร

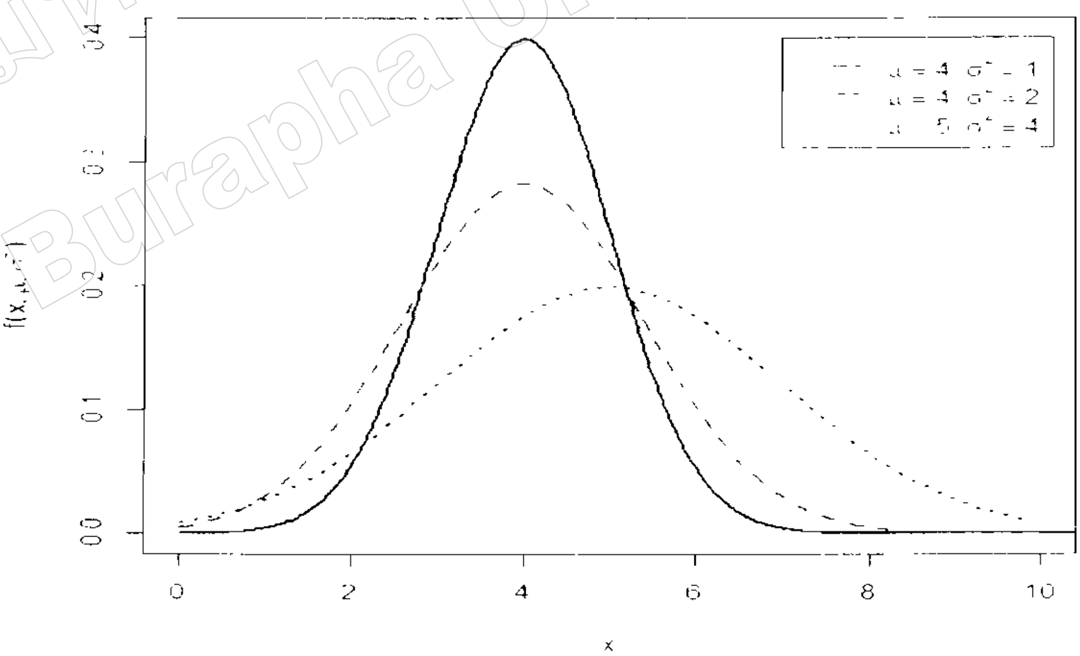
การแจกแจงปรกติ (Normal Distribution)

การแจกแจงปรกติมีชื่อเรียกอีกอย่างว่า การแจกแจงเกาส์เซียน (Gaussian Distribution) เป็นการแจกแจงที่มีความสำคัญมากสำหรับตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง เนื่องจากข้อมูลส่วนใหญ่มีการแจกแจงปรกติหรือใกล้เคียง เช่น จำนวนนักศึกษาที่สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรีในระยะเวลา 4 ปี จำนวนประชาชนที่มาใช้บริการที่ว่าการอำเภอแห่งหนึ่งในช่วงเวลาราชการ เป็นต้น

เมื่อกำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปรกติด้วยพารามิเตอร์ μ และ σ^2 ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของ X คือ

$$f(x,\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}; -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0$$

เมื่อ μ แทนพารามิเตอร์ที่บอกตำแหน่ง และ σ^2 แทนพารามิเตอร์ที่บอกรูปร่าง



ภาพที่ 2-1 กราฟแสดงลักษณะการแจกแจงปรกติ

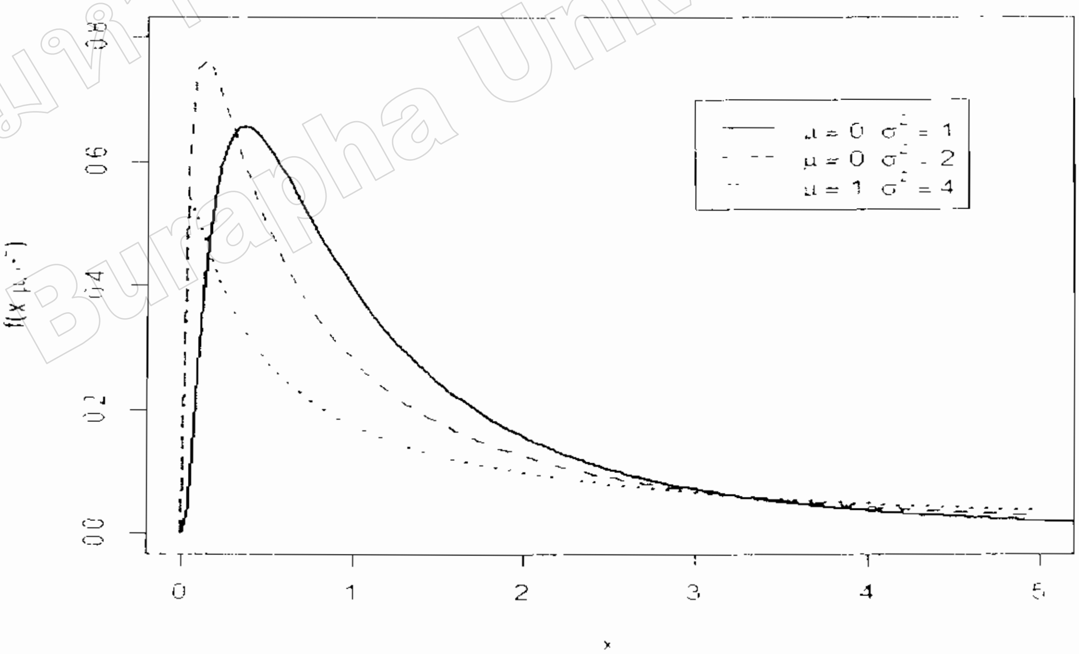
การแจกแจงล็อกนอร์มอล (Lognormal Distribution)

การแจกแจงล็อกนอร์มอล เป็นการแจกแจงแบบเบ้ขวา การแจกแจงล็อกนอร์มอลสามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้อย่างกว้างขวางในด้านวิทยาศาสตร์ สังคมศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ เช่น จำนวนการแจ้งอุบัติเหตุของลูกค้าที่ทำประกันภัยกับบริษัทในเวลาทำการ ปริมาณน้ำสูงสุดรายปีของภาคเหนือในประเทศไทย เป็นต้น

กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงล็อกนอร์มอลด้วยพารามิเตอร์ μ และ σ^2 ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของ X คือ

$$f(x,\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \frac{e^{(\log x-\mu)^2/(2\sigma^2)}}{x} \ , 0 < x < \infty, -\infty < \mu < \infty$$

เมื่อ μ แทนพารามิเตอร์ที่บอกตำแหน่ง และ σ^2 แทนพารามิเตอร์ที่บอกรูปร่าง



ภาพที่ 2-2 กราฟแสดงลักษณะของการแจกแจงล็อกนอร์มอล

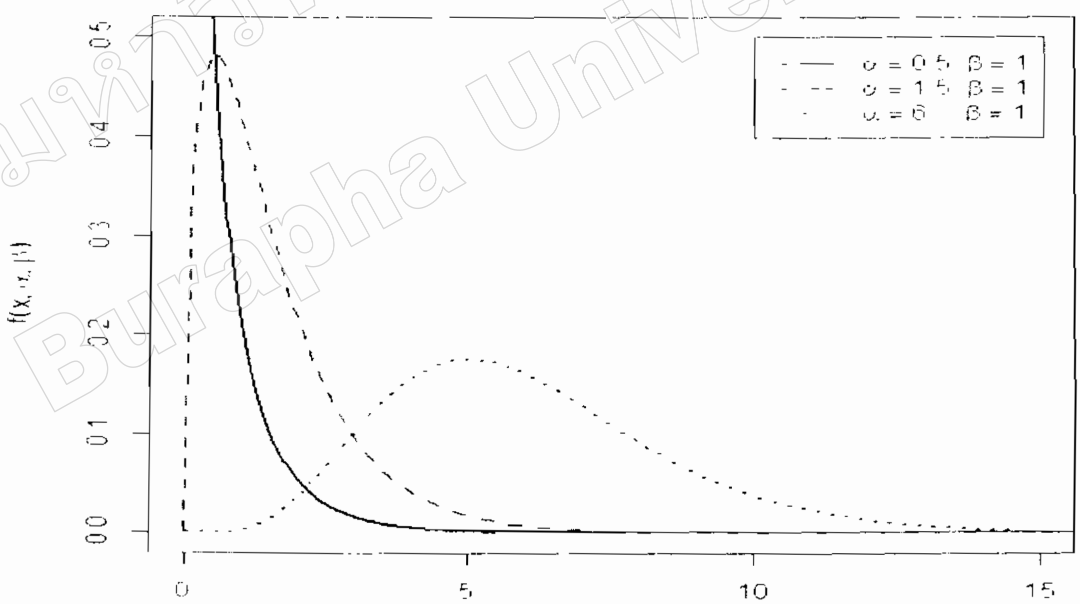
การแจกแจงแกมมา (Gamma Distribution)

การแจกแจงแบบแกมมาเป็นการแจกแจงแบบเบ้ขวา โดยมักนำมาประยุกต์กับการแจกแจงของเวลาที่รอคอยจนกระทั่งเกิดเหตุการณ์ที่สนใจ n ครั้ง ซึ่งสามารถพบในชีวิตประจำวัน เช่น ระยะเวลาที่ต้องใช้ล้างรถ n คัน ระยะเวลาที่นักเรียนใช้ในการทำข้อสอบ n ข้อ

กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแกมมา ด้วยพารามิเตอร์ α และ β ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของ X คือ

$$f(x,\alpha,\beta)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta};0\le x\le\infty,\alpha,\beta>0$$

เมื่อ α แทนพารามิเตอร์ที่บอกรูปร่าง และ β แทนพารามิเตอร์ที่บอกตำแหน่ง



ภาพที่ 2-3 กราฟแสดงลักษณะการแจกแจงแกมมา

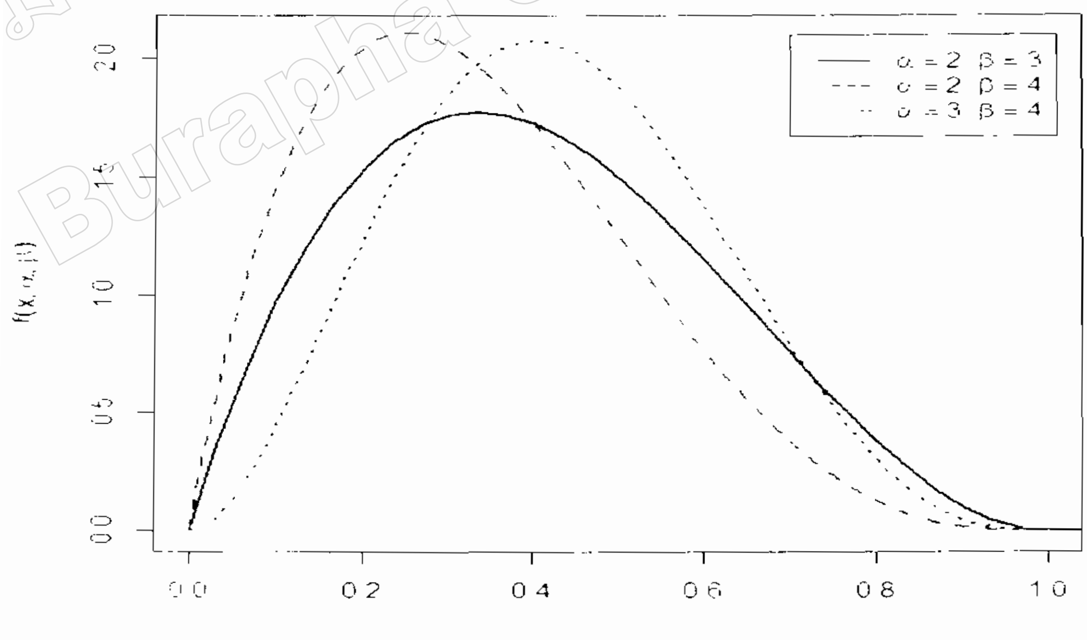
การแจกแจงบีต้า (Beta Distribution)

การแจงแจงแบบบีต้าเป็นการแจกแจงแบบเบ้ขวา โดยที่ค่าของตัวแปรสุ่มอยู่ในช่วงศูนย์ถึงหนึ่ง โดยทั่วไปแล้วจะใช้การแจกแจงบีต้าเพื่อศึกษาการแปรผันในสัดส่วนของการเกิดสิ่งใด ๆ เช่น สัดส่วนของเวลาในหนึ่งวันที่คนใช้ดูโทรทัศน์ สัดส่วนของการปนเปื้อนจุลินทรีย์ในอาหาร เป็นต้น

กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงบีต้าด้วยพารามิเตอร์ α และ β ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของ X คือ

$$f(x,\alpha,\beta)=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\ ;\ 0\le x\le 1\ ,\ \alpha,\beta>0$$

เมื่อ α แทนพารามิเตอร์ที่บอกรูปร่าง และ β แทนพารามิเตอร์ที่บอกรูปร่าง



ภาพที่ 2-4 กราฟแสดงลักษณะการแจกแจงบีต้า

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

วราฤทธิ์ พานิชกิจโกศลกุล (2551) ได้เสนอการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของข้อมูลที่มีการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน 3 วิธี คือวิธีอย่างง่าย วิธีปรับค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันด้วยเทอมค่าคงที่ $(n-1)/n$ และวิธีปรับค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันด้วยเทอมค่าคงที่ $(n-2)/n$ ผลการศึกษาพบว่าวิธีปรับค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันด้วยเทอมค่าคงที่ $(n-2)/n$ นั้นมีประสิทธิภาพดีที่สุด รองลงมาคือวิธีปรับค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันด้วยเทอมค่าคงที่ $(n-1)/n$ และวิธีอย่างง่าย ตามลำดับ นอกจากนี้ ได้เสนอช่วงความเชื่อมั่นของสัมประสิทธิ์การแปรผันเมื่อข้อมูลมีการแจกแจงปรกติโดยประมาณค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Method) จากนั้นทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของช่วงความเชื่อมั่นของสัมประสิทธิ์การแปรผันที่เสนอช่วงความเชื่อมั่นของสัมประสิทธิ์การแปรผันวิธีของ McKay ร่วมกับหลักการของ Vangle จากผลการศึกษาได้ว่าช่วงความเชื่อมั่นของสัมประสิทธิ์การแปรผันที่เสนอนั้นมีประสิทธิภาพที่ดีกว่าช่วงความเชื่อมั่นของสัมประสิทธิ์การแปรผันด้วยวิธีของ McKay ต่อมา นิทัศนีย์ เจริญงาม (2556) ได้ศึกษาช่วงความเชื่อมั่นใหม่ของผลต่างค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของการแจกแจงปรกติโดยใช้วิธีการหาช่วงความเชื่อมั่นเดี่ยวของค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของ (Donner et al. ,2010 อ้างถึงใน นิทัศนีย์ เจริญงาม, 2556) และของ (Mahmoudvand et al. ,2010 อ้างถึงใน นิทัศนีย์ เจริญงาม, 2556) มาทำการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของผลต่าง อัตราส่วนและผลรวมของค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของการแจกแจงปรกติผลการศึกษาพบว่าการใช้ช่วงความเชื่อมั่นเดี่ยวของ (Donner et al. ,2010 อ้างถึงใน นิทัศนีย์ เจริญงาม, 2556) จะมีประสิทธิภาพที่ดีเมื่อค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีขนาดต่ำ ส่วนวิธีของ (Mahmoudvand et al. ,2010 อ้างถึงใน นิทัศนีย์ เจริญงาม, 2556) จะมีประสิทธิภาพดีเมื่อค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีขนาดเพิ่มมากขึ้น

Bonett (2006b) ได้เสนอช่วงความเชื่อมั่นของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (σ) สำหรับข้อมูลของประชากรที่ไม่มีการแจกแจงปรกติ โดยช่วงความเชื่อมั่นของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานที่เสนอนั้นปรับมาจากโมเมนต์ที่สี่หรือความโด่ง ผลการศึกษาพบว่าในกรณีที่ข้อมูลของประชากรที่ไม่มีการแจกแจงปรกติและตัวอย่างขนาดเล็กช่วงความเชื่อมั่นของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานที่เสนอนั้นมีประสิทธิภาพที่ดี Bonett (2006a) ได้ศึกษาการสร้างช่วงความเชื่อมั่นค่าที่ใช้วัดการกระจาย คือ

สัมประสิทธิ์การแปรผันควอร์ไทล์ โดยช่วงความเชื่อมั่นนั้นปรับมาจากโมเมนต์ที่สี่หรือความโด่งจาก Bonett (2006b) ผลการศึกษาพบว่า ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับสัมประสิทธิ์การแปรผันควอร์ไทล์นั้นมีประสิทธิภาพที่ดีเมื่อประชากรมีการแจกแจงปรกติและประชากรมีการแจกแจงลักษณะเบ้ขวาในกรณีที่ตัวอย่างมีขนาดใหญ่

กัญญ์พิชญา พุทธะไชยทัศน์ (2553) ได้ศึกษาประสิทธิภาพของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยเปรียบเทียบระหว่างวิธีแจ็คไนฟ์ (Jackknifing) กับวิธีบูตสแตรป ผลการศึกษาพบว่ากรณีการประมาณค่าแบบจุดโดยส่วนใหญ่ประมาณวิธีบูตสแตรปนั้นมีประสิทธิภาพที่ดีกว่าวิธีแจ็คไนฟ์ กรณีการประมาณค่าแบบช่วงพบว่าวิธีบูตสแตรปจะมีประสิทธิภาพดีกว่าวิธีแจ็คไนฟ์ ต่อมา Cojbasic and Loncar (2011) ได้ศึกษาการนำวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีบูสตรปที มาใช้ในการประมาณช่วงความเชื่อมั่นแบบทางเดียวสำหรับค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (σ) จากการศึกษาพบว่าในกรณีที่ใช้วิธีบูตสแตรปทีในการประมาณค่าพารามิเตอร์นั้นมีประสิทธิภาพดีกว่าวิธีที่ไม่ใช้วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีบูสแตรปที Cojbasic, Kocovic, Loncar and Rakonjac (2012) ได้ศึกษาการนำวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีบูสแตรปทีมาใช้ในการทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับความแปรปรวน (σ^2) จากการศึกษาพบว่าในกรณีที่ใช้วิธีบูตสแตรปทีในการประมาณค่าพารามิเตอร์นั้นมีประสิทธิภาพดีกว่าวิธีที่ไม่ใช้วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีบูสแตรปที และ พรรณนา เอี่ยมสุวรรณ์ (2555) ได้ศึกษาการนำวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีบูสแตรปทีมาใช้ในการประมาณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าพิสัยควอร์ไทล์ จากการศึกษาพบว่าในกรณีที่ใช้วิธีบูตสแตรปทีในการประมาณค่าพารามิเตอร์นั้นมีประสิทธิภาพดียกเว้นในกรณีประชากรมีการแจกแจงบีต้า เมื่อ α =0.5, β=0.5 การแจกแจงแกมมา เมื่อ α =0.5, β =1 และการแจกแจงล็อกนอร์มอล เมื่อ $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ ส่วนวิธีประมาณค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวประมาณค่าพิสัยควอร์ไทล์ด้วยวิธีบูตสแตรป นั้นมีประสิทธิภาพที่ดียกเว้นกรณีที่ประชากรมีการแจกแจงบีต้า เมื่อ α =0.5, β =0.5